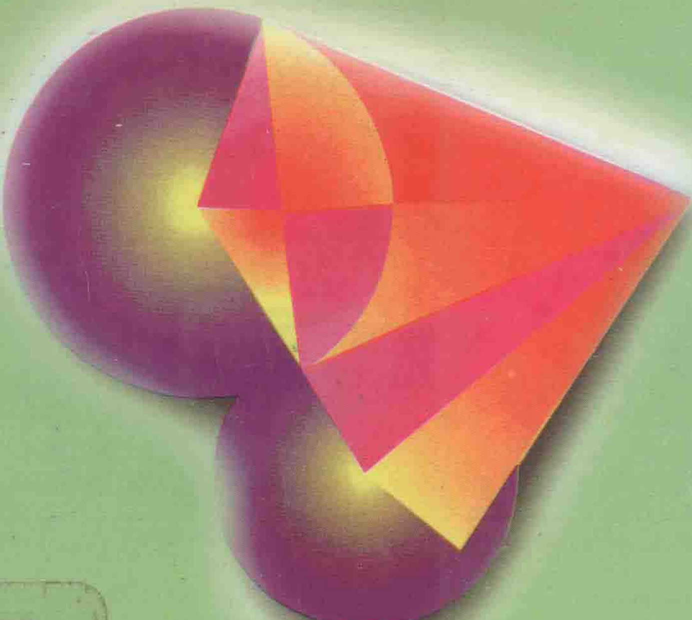
第二分册

初中数学竞赛同步辅导

主　编　刘汉文
副主编　甘超一　南秀全



华中师范大学出版社

初中数学竞赛同步辅导

第二分册

（修订本）

主　编　刘汉文

副主编　甘超一　南秀全

华中师范大学出版社

1998年·武汉

(鄂)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛同步辅导第二分册(修订本)/刘汉文主编.
—武汉:华中师范大学出版社:1998.8.
ISBN 7-5622-0902-2
Ⅰ.初…
Ⅱ.刘…
Ⅲ.数学-初中-教学参考资料
Ⅳ.G633.6

初中数学竞赛同步辅导

第二分册

(修订本)

刘汉文　主编

华中师范大学出版社出版发行
(武汉武昌桂子山　邮编:430079)
新华书店湖北发行所经销　武汉市新华印刷厂印刷

责任编辑:吴小岸　责任校对:方汉江　封面设计:蔡跃华

开本:787×1092　1/32　印张:9.375　字数:230 千字
版次:1998 年 8 月第 3 版　1998 年 8 月第 13 次印刷
印数:254 001—274 100　定价:7.00 元

再版前言

本书自1992年冬出版发行以来，行销全国各地，深受广大读者的欢迎，普遍称赞这套书好在同步，贵在实用。特别是1993年全国初中数学联赛后，发现这届联赛试题不仅有几道小题，而且还有二试的二、三两道大题与本书中的例习题雷同，有的几乎完全一样。这就从一个侧面又一次证实了：本书是一套符合我国目前初中数学竞赛实际且与中学各年级数学教学同步的实用性极强的竞赛辅导丛书。因此，本书问世几个月，第一版接连重印四次，印数达近十万册，且仍不能满足广大读者的需求。

从去年秋季起，全国各地初中开始使用了义务教育三年制新教材，笔者根据广大读者的要求和建议，力求使本书的特色更加鲜明，又在实验的基础上对此书在以下几个方面作了较大篇幅的修改：

1. 调整了某些内容顺序，严格按照1994年修改后的竞赛大纲和义务教育新教材内容及其顺序编写，使之更好地与课堂教学同步。

2. 对于目前初中数学竞赛中的重要内容（如三角形的四心等）增设专讲或作专题论述，并大量吸收了近几年国内外数学竞赛的最新优秀试题，同时还注意增加了联系实际的应用问题。

3. 删去了不符合目前初中数学竞赛要求的诸如平面几何的梅涅劳斯定理、塞瓦定理、托勒密定理等内容和一些陈旧的过难的试题，以便与全国联赛要求保持一致。

为了给学有余力的学生每节课提供三道与教学同步的竞

赛训练题，我们把多年在教学中积累的一——三年级训练题编成第四分册。现在，本套书一、二、三分册分别供初一、初二、初三年级使用，四分册可供三个年级课堂同步训练使用。

全书由特级教师、中国数学奥林匹克高级教练员刘汉文老师和高级教师、优秀教练员南秀全老师修改，由本书主编统稿审定。

由于时间仓促，书中不妥或错误之处在所难免，我们热忱期待广大读者提出改进意见，以便今后再版时加以改正。

这里借再版之机，再次向广大读者表示衷心的感谢！

为本书（初二分册）原版提供初稿的有（以姓氏笔画为序）：

卞清胜　王平　王定成　甘超一
刘汉文　朱经永　许泽民　汪　博
吴远伦　陈中柱　陈铁山　林文博
南秀全　姜文清　袁竟超　涂玉水
阎家发　谢永年

刘汉文

1994 年 9 月

序

数学奥林匹克不仅成为数学界的热门话题，甚至整个教育界、科学界也是一个重要议题。究其原因不外乎有：中国的中学生在国际数学奥林匹克中取得了极为优异的成绩；中国的数学界已提出要在21世纪初率先赶上世界先进水平，并寄希望于年轻一代数学才子。近几年来，湖北省，尤其是湖北黄冈地区，在各类各级数学奥林匹克竞赛中成绩十分突出，引起了全国乃至全世界的注视。

本书是中国数学奥林匹克高级教练员、特级教师、黄冈地区教研室副主任刘汉文同志主编的。全书有以下鲜明特点：

（一）严格按照初中数学课本的内容及其顺序编写，但不重复课本内容，对课本有关内容进行适当的加深拓宽。对于竞赛必需的知识，而课本中很少涉及或是空白，则依据学生知识和能力的实际，分别安排在不同年级，并对其最基本的理论作必要的阐述。因而本书是与课堂教学同步开展课外活动的极好辅导读物。

（二）依据《数学竞赛大纲》，阐述竞赛知识、方法和能力培养。各讲多数例题选自近几年国内外数学竞赛题，通过对例题解前的分析和解后的说明，系统归纳了整个初中数学竞赛范围内的知识方法和技巧，同当前数学竞赛命题热点相吻合，因而本书能使读者受到系统的奥林匹克数学基本理论教育和解题技巧的训练。

（三）书中各讲配备的练习、模拟题，都是作者多年辅导竞赛选手时用过的训练题中精选出来的，所以本书具有很强的实用性。

本书的作者既有国家奥林匹克集训队的专家，又有中学特级教师，他们都是数学竞赛的优秀教练员．这些同志既有丰富的中学教学经验，又有训练数学才子的高超办法，可以说，通过阅读此书，在一定程度上可以回答：为什么黄冈地区高中数学竞赛自 1983 年以来连续九年荣获湖北团体总分第一名、初中数学竞赛连续三年蝉联团体冠军．

相信本书的出版有助于进一步提高我国的初中数学竞赛的水平．

邓宗琦

一九九二年二月

目　录

第一讲　因式分解

因式分解是中学数学中最重要的一种恒等变形，是解决许多数学问题的有力工具. 同时，因式分解的方法灵活多变，技巧性强. 下面，我们在初中教材的基础上，结合近年来数学竞赛的实际，补充换元法、拆项、添项法、待定系数法、双十字相乘法和轮换对称法等常见的因式分解方法.

一　换元法

换元法就是在一个比较复杂的代数式中，根据其特征，把其中的某些部分看成一个整体，并用一个新的文字(新元)代替，从而使这个代数式的结构简化，便于分解.

例 1　分解因式：$(x^2+3x-3)(x^2+3x+4)-8$.

分析　此式为 x 的四次多项式，若将其展开，一定很复杂. 观其特征，可令 $x^2+3x=y$，通过换元，将 x 的四次多项式转化为 y 的二次多项式，化繁为简，变难为易.

解　令 $x^2+3x=y$，则

$$\begin{aligned}原式&=(y-3)(y+4)-8\\&=y^2+y-20\\&=(y-4)(y+5)\\&=(x^2+3x-4)(x^2+3x+5)\\&=(x-1)(x+4)(x^2+3x+5).\end{aligned}$$

本题亦可令

$x^2+3x-3=y$，或 $x^2+3x+4=y$，或 $x^2+3x+\frac{1}{2}=y$.

例 2 分解因式：$(2x-7)(2x+5)(x^2-9)-91$.

分析 可将此式第一项的三个因式重新分解组合，转化为例 1 的情形再分解.

解 原式$=[(2x-7)(x+3)][(2x+5)(x-3)]-91$

$=(2x^2-x-21)(2x^2-x-15)-91$.

令 $2x^2-x=y$，则

原式$=(y-21)(y-15)-91$

$=y^2-36y+224$

$=(y-8)(y-28)$

$=(2x^2-x-8)(2x^2-x-28)$

$=(2x^2-x-8)(x-4)(2x+7)$.

例 3 分解因式：$(x+1)^4+(x+3)^4-272$.

分析 为了展开括号之后可以消项，且注意到 $x+1$ 与 $x+3$ 的平均数为 $x+2$，故采用平均代换，令 $x+2=y$.

解 令 $y=\dfrac{(x+1)+(x+3)}{2}=x+2$，则

原式$=(y-1)^4+(y+1)^4-272$

$=2(y^4+6y^2+1)-272$

$=2(y^4+6y^2-135)$

$=2(y^2-9)(y^2+15)$

$=2(y+3)(y-3)(y^2+15)$

$=2(x+5)(x-1)(x^2+4x+19)$.

例 4 分解因式：$(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$.

分析 从式子特征看，把 $a+b$ 及 ab 各看作一个整体，可使问题简化.

解 设 $a+b=m$，$ab=n$，则

原式$=(m-2n)(m-2)+(1-n)^2$

$$=m^2-2m-2mn+4n+(1-n)^2$$
$$=m^2-2m(n+1)+(n+1)^2$$
$$=(m-n-1)^2$$
$$=(a+b-ab-1)^2$$
$$=(ab-a-b+1)^2$$
$$=(a-1)^2(b-1)^2.$$

二　拆项、添项法

拆项是将代数式中的某项拆成两项或更多项的代数和的一种恒等变形. 添项是特殊的拆项，即把零拆成两个相反项的和. 由于因式分解是多项式乘法的逆运算，而在乘法运算的整理化简中把同类项合并了，所以在因式分解时，常常通过适当的拆项和添项，把某些被合并的同类项恢复原状，以便能使用公式或提取公因式进行分组分解. 我们熟知的十字相乘法实际上是一种拆项法，配方法则是一种特殊的添项法. 如何拆项或添项，依赖于对题设代数式特点的观察和分析.

例 5　分解因式：$2x^3+11x^2+17x+6$.

分析　原式不缺项，直接分组分解难以进行. 可考虑拆项分解，把中间的两项各分拆成两项，原式变成六项，再按每组系数对应成比例的原则分成三组，每组两项，使三组系数比为 $2:4=7:14=3:6$.

解　原式 $=(2x^3+4x^2)+(7x^2+14x)+(3x+6)$

$$=2x^2(x+2)+7x(x+2)+3(x+2)$$
$$=(x+2)(2x^2+7x+3)$$
$$=(x+2)(2x+1)(x+3).$$

例 6　分解因式：$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2$.

分析　注意到原式与 $(x^2-y^2-z^2)^2=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2$

$+2y^2z^2-2x^2z^2$ 仅仅一项之差，故可将 $-2y^2z^2$ 分拆为 $2y^2z^2$ 与 $-4y^2z^2$ 两项.

解 原式 $=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2+2y^2z^2-2x^2z^2-4y^2z^2$

$$=(x^2-y^2-z^2)^2-(2yz)^2$$

$$=(x^2-y^2-z^2+2yz)(x^2-y^2-z^2-2yz)$$

$$=[x^2-(y-z)^2][x^2-(y+z)^2]$$

$$=(x+y-z)(x-y+z)(x+y+z)(x-y-z).$$

例 7 分解因式：$(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$.（扬州市，1986 年）

分析 注意到首、末两项均为完全平方式，对它们配方，需添加 $2x^2(1-y^2)$、$-2x^2(1-y^2)$ 两项.

解

$$\text{原式}=(1+y)^2+2x^2(1-y^2)+x^4(1-y)^2-2x^2(1+y^2)-2x^2(1-y^2)$$

$$=[1+y+x^2(1-y)]^2-4x^2$$

$$=(x^2+2x+1+y-x^2y)(x^2-2x+1+y-x^2y)$$

$$=[(x+1)^2-y(x^2-1)][(x-1)^2-y(x^2-1)]$$

$$=(x+1)(x+1-xy+y)(x-1)(x-1-xy-y)$$

例 8 证明：具有如下性质的自然数有无穷多个：对于任意的自然数 n，$z=n^4+a$ 都不是素数.

分析 本题的关键在于寻找一类具有某种结构特征的自然数 a，使其与 n^4 之和都能分解为两个大于 1 的自然数之积. 注意到四次式 n^4，可设 a 为四次式，又考虑到对此二项配方后，应减去一完全平方式，故设 $a=4k^4$.

证 设 $a=4k^4$（k 为大于 1 的自然数），则

$$z=n^4+4k^4=n^4+4n^2k^2+4k^4-4n^2k^2$$

$$=(n^2+2k^2)^2-(2nk)^2$$

$$=(n^2+2k^2+2nk)(n^2+2k^2-2nk)$$

$$=(n^2+2k^2+2nk)[(n-k)^2+k^2] \quad ①$$

因 n 为自然数，k 为大于 1 的自然数，

故 $n^2+2k^2+2nk>1$，$(n-k)^2+k^2>1$，

这样，①式右边的两个因子都是大于 1 的整数，即 z 是合数. 由于大于 1 的自然数 k 有无穷多个，故有无穷多个自然数 a，使 n^4+a 对一切自然数 n 都不是素数.

三　待定系数法

待定系数法是先假定一个含有待定系数的恒等式，然后根据多项式恒等的性质，列出几个含有待确定系数的方程组，解之求得各待定系数的值，或者从方程组中消去这些待定系数，求出原来那些已知系数间所存在的关系，从而把问题解决.

多项式恒等式的性质：

1. 若 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$，则 $a_0=b_0$，$a_1=b_1$，$\cdots$，$a_n=b_n$.

2. 若 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$，则用 x 取值范围内的任一值代 x，其左右两边值恒相等.

例 9　分解因式：$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$.

分析　先用十字相乘法对二次项分解，再利用待定系数法分解.

解　因 $x^2+2xy-8y^2=(x-2y)(x+4y)$，故设原式$=(x-2y+a)(x+4y+b)$，即

$$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$$

$$=x^2+2xy-8y^2+(a+b)x+(4a-2b)y+ab. \quad ①$$

比较两边对应项系数，得$\begin{cases}a+b=2\\4a-2b=14\\ab=-3.\end{cases}$

解之，得 $a=3, b=-1$.

故原式$=(x-2y+3)(x+4y-1)$.

说明 一般地，对于 n 个待定系数，只要有 n 个方程联立，就可以确定它们的值. 因此，当由比较系数得到的方程多于 n 个时，必须把由其中 n 个方程所求得的值代入其余的方程逐一检验，若有的解对某个方程不成立，则需将此解舍去；若所得方程组无解，则说明原式不能分解成所设形式的因式.

例 10 求证：$x^2-2xy+y^2+x+y-4$ 不能分解为两个一次因式的乘积.

证明 设原式$=(x-y+a)(x-y+b)$. 则

$$x^2-2xy+y^2+x+y-4$$

$$=x^2-2xy+y^2+(a+b)x-(a+b)y+ab.$$

比较两边对应项系数，得

$$\begin{cases}a+b=1 & ①\\a+b=-1 & ②\\ab=-4. & ③\end{cases}$$

方程①与②矛盾，所以以上方程组无解.

故原式不能分解为两个一次因式的乘积.

例 11 分解因式：$x^4-x^3+x^2+2$.

分析 x 的四次多项式如果可以分解，则可以分解为$(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)$或$(ax+b)(cx^3+dx^2+ex+f)$形式的因式乘积. 分解时先试第一种形式，如果可行的 话，就不必试第二种形式. 因为在同一数集上多项式的因式分解，形式是唯一的.

解 设原式$=(x^2+ax+1)(x^2+bx+2)$或原式$=(x^2+ax-1)(x^2+bx-2)$，先试第一种形式，如果可行的话，就不必试第二种形式.

$$x^4-x^3+x^2+2$$
$$=x^4+(a+b)x^3+(ab+3)x^2+(2a+b)x+2.$$

比较对应项系数，得$\begin{cases}a+b=-1\\ab+3=1\\2a+b=0.\end{cases}$

解之，得 $a=1,b=-2$.

故原式$=(x^2+x+1)(x^2-2x+2)$.

四* 双十字相乘法

对于形如 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$ 的二元二次多项式，可以采用双十字相乘凑出，这比待定系数法更方便.

例 12 分解因式：$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$.

分析 先用十字相乘法分解关于 x 的二次项 $x^2+2xy-8y^2$. 然后再用十字相乘法，分解关于 y 的二次三项式(若 y^2 的系数为完全平方数，则分解关于 x 的二次三项式). 因 y^2 的系数在上一次十字相乘时已分解，故这次只分解常数项，拼凑 y 的系数，最后检验关于 x 的二次三项式(若第二次分解关于 x 的二次三项式，则最后检验关于 y 的二次三项式).

解 原式$=(x-2y+3)(x+4y-1)$.

例 13 分解因式：$3x^2+4y^2+3z^2+8xy-8yz-10xz$.

分析 先将原式整理成关于 x、y 的二元二次多项式，将 z 看成常数，再用双十字相乘法分解.

解 原式$=3x^2+8xy+4y^2-10zx-8zy+3z^2$
$$=(x+2y-3z)(3x+2y-z).$$

五 轮换对称法

这里着重介绍对称式和轮换式等特殊多元多项式的因式分解.

如果把一个多项式中的两个字母互换,得到的式子都和原式恒等,则称这个多项式是关于这些字母的对称式.例如,$a+b$、ab、a^2-ab+b^2 都是关于 a、b 的对称式;$x+y+z$、$x^2+y^2+z^2$、xyz 都是关于 x、y、z 的对称式.

显然,对称式的和、差、积、商(分母不为零)仍为对称式.

一个关于 x、y、z、…、w 的多项式,如果把 x 换成 y,y 换成 z,…,w 换成 x,得到的式了与原式恒等,则称这个多项式是关于这些字母的轮换式.例如,$x+y+z$,$xy^2+yz^2+zx^2$,$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$都是关于 x、y、z 的轮换式,我们称轮换字母的方法为轮换法.

显然,轮换式的和、差、积、商(分母不为零)仍为轮换式.对称式一定是轮换式,而轮换式不一定是对称式.例如,$xy^2+yz^2+zx^2$ 是关于 x、y、z 的轮换式,但是如果 x、y 互换,得到 $yx^2+xz^2+zy^2$,显然,$yx^2+xz^2+zy^2\neq xy^2+yz^2+zx^2$,所以 $xy^2+yz^2+zx^2$ 不是对称式.

例 14 分解因式:$a^3+b^3+c^3-3abc$.

分析 此式是关于 a、b、c 的三次齐次对称式,若能分解,则必为一次齐次对称式$(a+b+c)$和二次齐次对称式$[(a^2+b^2+c^2)+k(ab+bc+ca)]$之积,这里 k 是待定系数.

解 设原式$=(a+b+c)[(a^2+b^2+c^2)+k(ab+bc+ca)]$.

比较两边同类项 abc 项的系数,得 $k=-1$.

所以原式$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

说明 (1) 关于两个字母 x、y 的齐次对称式是:

一次：$l(x+y)$，

二次：$l(x^2+y^2)+mxy$，

三次：$l(x^3+y^3)+mxy(x+y)$，

…

关于三个字母 x、y、z 的齐次对称式的一般形式是：

一次：$l(x+y+z)$，

二次：$l(x^2+y^2+z^2)+m(xy+yz+zx)$，

三次：

$l(x^3+y^3+z^3)+m[x^2(x+y)+y^2(z+x)+z^2(x+y)]+nxyz$，

…

其中 l、m、n 为常数.

(2) 一次、二次齐次轮换式与一次、二次齐次对称式的一般形式是相同的，但三次以上的就不同了.

例 15 分解因式：$xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)$.

分析 此式是关于 x、y、z 的四次齐次轮换式，注意到 $x=y$ 时，原式 $=0$，所以原式有因式 $x-y$，根据轮换性知，亦有因式 $y-z$，$z-x$，而 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 是三次轮换式，所以原式还有一个一次齐次轮换式因式，即 $k(x+y+z)$.

解 设原式 $=k(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$.

比较两边同类项 x^3y 项的系数，得 $k=-1$.

所以原式 $=-(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$.

例 16 分解因式：

$$(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$$

分析 此式为 x、y、z 的五次齐次对称式，当 $x=0$ 时，原式为 0，所以原式有因式 x，根据轮换式知，亦有因式 y、z.