RESEARCH AND APPRECIATION OF GEOMETRIC INEQUALITY (II)

几何不等式研究与欣赏 下卷

邓寿才 著

$\sum_1^5 k^5 x_k = a^3$

$\sum_1^5 k^3 x_k = a^2$

$\sum_1^5 kx_k = a$

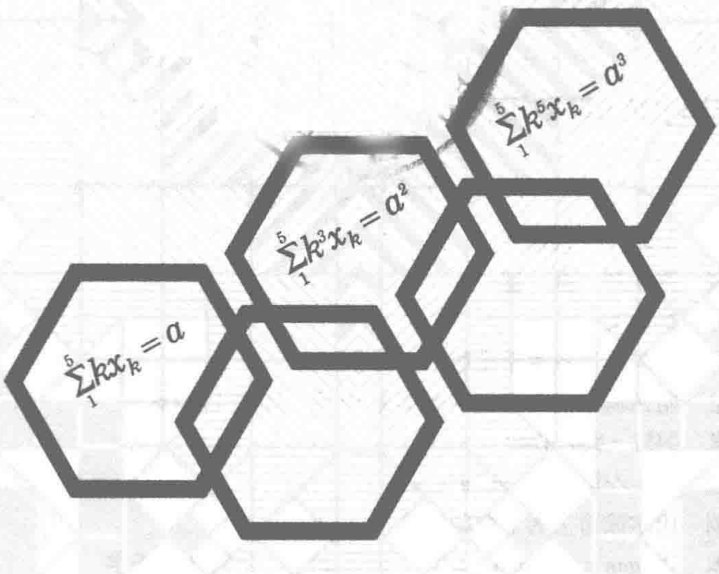
HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

RESEARCH AND APPRECIATION OF GEOMETRIC INEQUALITY (II)

几何不等式研究与欣赏

下卷

● 邓寿才 著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

众所周知,函数思想与不等式方法贯穿整个数学世界,且不等式是人们最喜爱、最欣赏的数学内容,进而兴起了不等式研究的热潮.从知识内容上讲,不等式又划分为代数不等式、三角不等式、几何不等式.为了让几何不等式结构更丰满、内容更丰富,使得其图文并茂、美不胜收,为了让几何不等式更具实用性、优美性、趣味性、欣赏性、收藏性,为了让几何不等式的光辉照亮人间,让几何不等式的花朵开满人间,芳香飘满人间,故作者怀着激动的心情写了此书.

本书适合高等院校师生及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

几何不等式研究与欣赏.下卷/邓寿才著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1

ISBN 978-7-5603-5621-1

Ⅰ.①几… Ⅱ.①邓… Ⅲ.①平面几何-研究
Ⅳ.①O123.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第220769号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 张 佳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张20.5 字数368千字
版 次 2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5621-1
定 价 48.00元

◎ 目 录

第5章 名题欣赏 ······ 1

§1 Pólya – Szego 不等式的加强与推广 ······ 1

§2 Finsler – Hadwiger 不等式的拓展 ······ 6

§3 D. Pedoe 不等式的研究与欣赏 ······ 28

§4 四边形不等与四面体不等式 ······ 82

§5 Fermat 问题研究与欣赏 ······ 130

§6 Erdös 不等式的研究与欣赏 ······ 225

名题欣赏

第5章

§1 Pólya – Szego 不等式的加强与推广

(数学家·诗人)邓寿才

1. 加 强

著名的波利亚(Pólya) – 赛戈(Szego)不等式指的是:

定理 如果$\triangle ABC$的三边长为a,b,c,面积为$\triangle$,则有

$$abc\geqslant\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\triangle\right)^{\frac{3}{2}} \tag{A}$$

等号成立仅当$\triangle ABC$为正三角形.

并且,式(A)又可加强为

$$abc\geqslant\left(\frac{3abc}{a+b+c}\right)^{\frac{3}{2}}\geqslant\left(\frac{\sqrt{3}abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^{\frac{3}{2}}\geqslant\left(\frac{4}{\sqrt{3}\triangle}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{B}$$

略正 由三角不等式

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2=9\left(\frac{abc}{4\triangle}\right)^2 \text{(}R\text{ 为外接圆半径)}$$

$$\Rightarrow\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\geqslant\frac{4}{3}\triangle \tag{1}$$

再结合不等式

$$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2\geqslant 9(abc)^{\frac{2}{3}} \tag{2}$$

即可推出式(B)来,而且,式(A)还有一个直线的加强

$$abc \geqslant \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\triangle\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}\sum (b-c)^2(b+c-a) \tag{C}$$

证明 利用式(B)和三元均值不等式及海伦公式有

$$\begin{aligned}\sum a^2(b+c-a) &\geqslant 3\left[\prod a^2(b+c-a)\right]^{\frac{1}{3}}\\ &= 3\left(abc \cdot \frac{abc}{a+b+c} \cdot 16\triangle^2\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant\\ &\quad 3\left[\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\triangle\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{4}{9}\sqrt{3}\triangle\right) \cdot 16\triangle^2\right]^{\frac{1}{3}}\\ &= 3\left(\frac{\triangle}{\sqrt{3}}\triangle\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow abc &= \frac{1}{3}\sum a^2(b+c-a) + \frac{1}{6}\sum (b-c)^2(b+c-a) \geqslant\\ &\quad \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\triangle\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}\sum (b-c)^2(b+c-a)\end{aligned}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

2. 推　广

虽然不等式(A)的左边 abc 为一个单项式,但我们可以指数方面将它进行推广.

$\boxed{\text{推广 1}}$:设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 $\triangle$,指数 $\alpha,\beta,\gamma \in (0,1)$ 且满足 $\alpha+\beta+\gamma=2$. 则

$$a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} \geqslant 12\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \cdot \triangle \tag{D}$$

特别地,当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(D)化为代数不等式

$$\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

当 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2}{3}$ 时,式(D)化为式(A).

证明 首先易得

$$\sum (1-\beta)(1-\gamma) \leqslant \frac{1}{3}\left[\sum (1-\alpha)\right]^2 = \frac{1}{3}\left(3-\sum \alpha\right)^2 = \frac{1}{3}(3-2)^2 = \frac{1}{3}$$

然后利用三角母不等式(其中 $x,y,z\in\mathbf{R}$),有

$$2\sum yz\cos(\pi-2A)\leqslant\sum x^2$$

$$\Rightarrow -2\sum yz\cos 2A\leqslant\sum x^2$$

$$\Rightarrow -2\sum yz(1-2\sin^2 2A)\leqslant\sum x^2$$

$$\Rightarrow 4\sum yz\sin^2 A\leqslant\sum x^2+2\sum yz=(\sum x)^2$$

$$\Rightarrow\sum yza^2\leqslant(\sum x)^2R^2=(\sum x)^2\cdot\left(\frac{abc}{4\triangle}\right)^2$$

$$\Rightarrow(x+y+z)^2(abc)^2\geqslant 16xyz\triangle^2\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)\tag{1}$$

令
$$\frac{1}{x}=1-\alpha,\frac{1}{y}=1-\beta,\frac{1}{z}=1-\gamma$$

$$\Rightarrow\sum\frac{1}{x}=\sum(1-\alpha)=3-\sum\alpha=3-2=1$$

在式(1)中应用加权不等式,有

$$(\sum x)^2(abc)^2\geqslant 16xyz\triangle^2\cdot\sum(1-a)a^2\geqslant$$

$$16xyz\triangle^2(\prod a^{2(1-a)})$$

$$=16xyz\triangle^2(a^{(1-\alpha)},b^{(1-\beta)},c^{(1-\gamma)})^2$$

$$\Rightarrow a^\alpha b^\beta c^\gamma\geqslant\frac{4\sqrt{xyz}\cdot\triangle}{x+y+z}$$

$$=\frac{4\triangle\sqrt{\prod(1-\alpha)}}{\sum(1-\beta)(1-\gamma)}\geqslant$$

$$12\sqrt{\prod(1-\alpha)}\triangle$$

即式(D)成立,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2}{3}$.

下面,我们再建立更好的指数推广.

$\boxed{\text{推广 2}}$:设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 $\triangle$,指数 $x,y,z\in(0,\frac{1}{2})$,且满足 $x+y+z=1$,则

$$a^xb^yc^z\geqslant 2\left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{\triangle}\tag{E}$$

其中

$$p=\sqrt{x^x y^y z^z}$$

$$q=[(1-2x)^{1-2x}\cdot(1-2y)^{1-2y}\cdot(1-2z)^{1-2z}]^{\frac{1}{4}}$$

特别地,当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时,$\frac{p}{q}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$,式(E) 化为

$$(abc)^{\frac{1}{3}}\geqslant\left(\frac{4\triangle}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow abc\geqslant\left(\frac{4\triangle}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

这正是式(A).

证明 由于 $\sum(\pi-2A)=\pi$,应用三角母不等式有

$$2\sum yz\cos(\pi-2A)\leqslant\sum x^2$$

$$\Rightarrow 4\sum yz\sin^2 A\leqslant(\sum x)^2=1$$

$$\Rightarrow\sum yza^2\leqslant R^2=\left(\frac{abc}{4\triangle}\right)^2$$

注意到

$$\sum(1-2x)=3-2\sum x=1.$$

$$\left(\frac{abc}{4\triangle}\right)^2\geqslant\sum yza^2=xyz\sum\left[(1-2x)\cdot\frac{a^2}{x(1-2x)}\right]\geqslant$$

$$xyz\prod\left[\frac{a^2}{x(1-2x)}\right]$$

$$=\frac{xyz(abc)^2(a^x b^y c^z)^{-4}}{\prod[x(1-2x)]^{1-2x}}$$

$$\Rightarrow(a^x b^y c^z)^4\geqslant\frac{(x^x y^y z^z)^2}{\prod(1-2x)^{1-2x}}(4\triangle)^2$$

$$\Rightarrow a^x b^y c^z\geqslant 2\frac{p}{q}\sqrt{\triangle}$$

等号成立仅当(记 $m=R^2\cos A\cos B\cos C$)

$$\frac{\sin(\pi-2A)}{x}=\frac{\sin(\pi-2B)}{y}=\frac{\sin(\pi-2C)}{z}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin 2A}{x}=\frac{\sin 2B}{y}=\frac{\sin 2C}{z}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin A\cos A}{x}=\frac{\sin B\cos B}{y}=\frac{\sin C\cos C}{z}$$

$$\Rightarrow\frac{x(y+z-x)}{ma^2}=\frac{y(z+x-y)}{mb^2}=\frac{z(x+y-z)}{mc^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x(1-2x)}{a^2} = \frac{y(1-2y)}{b^2} = \frac{z(1-2z)}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{x(1-2x)}} = \frac{b}{\sqrt{y(1-2y)}} = \frac{c}{\sqrt{z(1-2z)}}$$

§2 Finsler-Hadwiger 不等式的拓展

(诗人) 邓寿才

1. 简　介

1938 年,芬斯勒(Finsler) 与哈德维格尔(Hadwiger) 共同建了优美的:

定理　设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 $\triangle$,则有

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\triangle+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2 \tag{A}$$

关于式(A) 的证明较多,下选其一.

证明　式(A) 等价于

$$\sum(b+c-a)(c+a-b) \geqslant \sqrt{3\left(\sum a\right)\prod(b+c-a)} \tag{1}$$

作代换,令

$$\begin{cases} x=b+c-a>0 \\ y=c+a-b>0 \\ z=a+b-c>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y+z}{2} \\ b=\dfrac{z+x}{2} \\ c=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

代入式(1) 得

$$\sum yz \geqslant \sqrt{3xyz\left(\sum x\right)}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum yz\right)^2 \geqslant 3xyz\left(\sum x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum y^2z^2 \geqslant 2\sum x^2yz$$

$$\Leftrightarrow \sum x^2(y-z)^2 \geqslant 0$$

因此式(A) 显然成立,等号成立仅当

$$a=b=c \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ 为正三角形}$$

由于不等式(A) 天生“爱美”,喜欢“梳妆打扮” 成多种“发型”,即

$$2(bc+ca+ab)-(a^2+b^2+c^2) \geqslant 4\sqrt{3}\triangle \tag{A_1}$$

$$\prod(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})\cdot(\sum\sqrt{2})\geqslant 4\sqrt{3}\triangle \tag{A_2}$$

$$(a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 4\sqrt{3}\triangle \tag{A_3}$$

$$\sum a(b+c-a)\geqslant 4\sqrt{3}\triangle \tag{A_4}$$

$$\sum(b+c-a)(c+a-b)\geqslant 4\sqrt{3}\triangle \tag{A_5}$$

$$\sum bc\sin^2\frac{A}{2}\geqslant\sqrt{3}\triangle \tag{A_6}$$

$$(abc)^2(\prod\sin\frac{A}{2})(\sum\cos^2\frac{A}{2})\geqslant 4\sqrt{3}\triangle^3 \tag{A_7}$$

$$\sqrt{3}s\leqslant 4R+r \tag{A_8}$$

(Colombier - Doucet 不等式),其中 s,R,r 分别表示 $\triangle ABC$ 的半周长、外接圆半径、内切圆半径.

而且,式(A) 又等价于三角不等式

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3} \tag{A_9}$$

可见,式(A) 不仅"如花似玉","貌若天仙",还居然有九种变换外形,好像孙悟空在变换,又像万花筒五彩缤纷,这在众多的几何不等式中,是少见的,这就是式(A) 与众不同、别具一格的地方.

2. 加　强

许多美妙的不等式,都可加强,式(A) 更不例外,而且,它至少有四个加强

$$\sum a^2\geqslant 4(\sum\tan\frac{\pi-A}{4})+\sum(b-c)^2 \tag{B}$$

$$abc\prod(b+c-a)\geqslant\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\triangle\right)^3 \tag{B_1}$$

$$\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3}\triangle(1+k)^{\frac{1}{6}}+Q+\sum(b-c)^2 \tag{B_2}$$

其中

$$\begin{cases}k=\dfrac{\sum(b-c)^2}{(\sum a)^2}\\ Q=\dfrac{1}{2}(\sum x)\sum(y-z)^2\end{cases},\begin{cases}x^3=a(b+c-a)\\ y^3=b(c+a-b)\\ z^3=c(a+b-c)\end{cases}$$

$$\sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}\triangle + \sum (b-c)^2 + M \tag{B_3}$$

其中

$$M = \frac{2\sum (p-a)^2(b-c)^2}{\sum a(p-a)}, p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

限于篇幅,我们仅证明式(B_2)和(B_3).

证明 应用式(B_1)有

$$\begin{aligned}
3xyz &= 3\left[abc\prod (b+c-a)\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= 3\left(\frac{abc}{a+b+c}\cdot 16\triangle^2\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= 3\left(\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\cdot 16\triangle^2\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant \\
&\quad 3\left(\frac{4}{3}\triangle\cdot 16\triangle^2\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= 4\sqrt{3}\triangle\cdot\left[\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}\right]^{\frac{1}{6}} \\
&= 4\sqrt{3}\triangle(1+k)^{\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum x^3 &= 3xyz + \left(\sum x\right)\left(\sum x^2 - \sum yz\right) \\
&= 3xyz + Q
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum x^3 \geqslant 4\sqrt{3}\triangle(1+k)^{\frac{1}{6}} + Q$$

$$\Rightarrow \sum a(b+c-a) \geqslant 4\sqrt{3}\triangle(1+k)^{\frac{1}{6}} + Q$$

$$\Rightarrow \sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}\triangle(1+k)^{\frac{1}{6}} + Q + \sum (b-c)^2$$

等号成立仅当 $a=b=c$(即 $\triangle ABC$ 为正三角形).

下面我们证明式(B_3):

证明 记

$$\begin{aligned}
N &= \sum a^2 - \sum (b-c)^2 = 2\sum a(p-a) \\
&= 4\sum (p-a)(p-b)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow N^2 = 16\sum (p-a)^2(p-b)^2 + 32p\prod (p-a)$$

$$\Rightarrow N^2 - 48\triangle^2 = 16\left[\sum (p-a)^2(p-b)^2 - p\prod (p-a)\right]$$

$$= 16[\sum (p-a)^2(p-b)^2 - \sum (p-a)\prod (p-a)]$$

$$= 16[\sum (p-a)^2(p-b)^2 - \sum (p-a)^2(p-b)(p-c)]$$

$$= 8\sum \{(p-a)^2[(p-b)^2 - 2(p-b)(p-c) + (p-c)^2]\}$$

$$= 8\sum (p-a)^2(b-c)^2$$

$$\Rightarrow (N + 4\sqrt{3}\triangle)(N - 4\sqrt{3}\triangle) = 8\sum (p-a)^2(b-c)^2$$

$$\Rightarrow N - 4\sqrt{3}\triangle = \frac{8\sum (p-a)^2(b-c)^2}{N + 4\sqrt{3}\triangle} \geqslant \frac{8\sum (p-a)^2(b-c)^2}{N + N} = M$$

$$\Rightarrow N \geqslant 4\sqrt{3}\triangle + M$$

$$\Rightarrow \sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}\triangle + M + \sum (b-c)^2$$

3. 完善与配对

有些优美的不等式,不仅有加强,还有完善和配对.

完善 $\triangle ABC$ 中,设 $Q = \sum (b-c)^2$,则有

$$4\sqrt{3}\triangle + 3Q \geqslant a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}A + Q \tag{C}$$

证明 我们只需证明式(C)的左边成立即可. 设 $x,y,z > 0$,且

$$\begin{cases} a = y^2 + z^2 \\ b = z^2 + x^2 \\ c = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \triangle = xyz\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ Q = \sum (y^2 - z^2)^2 \end{cases}$$

于是,我们只需证

$$\sqrt{3}\triangle + 3Q \geqslant a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow 3\sum (y^2 - z^2)^2 + 4xyz\sqrt{3\sum x^2} \geqslant \sum (y^2 + z^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sum y^2z^2 - \sum x^4 \leqslant xyz\sqrt{3\sum x^2}$$

$$\Leftrightarrow st \leqslant xyz\sqrt{3\sum x^2} \tag{1}$$

其中

$$\begin{cases} s = \sum x \leqslant \sqrt{3\sum x^2} \\ t = \prod (y + z - x) \end{cases}$$

因此,我们只需证

$$t=\prod(y+z-x)\leqslant xyz \tag{2}$$

若 $y+z-x,z+x-y,x+y-z$ 中两正一负,则式(2)左边 <0,成立.

若 $y+z-x,z+x-y,x+y-z$ 中一正两负,由对称性不妨设

$$y+z-x\geqslant 0$$

$$\begin{cases}z+x-y<0\\x+y-z<0\end{cases}\Rightarrow 2x<0\Rightarrow x<0$$

矛盾.

因此,$y+z-x,z+x-y,x+y-z$ 均为正数,利用均值不等式有

$$2\sqrt{(y+z-x)(z+x-y)}\leqslant(y+z-x)+(z+x-y)=2z$$

$$2\sqrt{(z+x-y)(x+y-z)}\leqslant(z+x-y)+(x+y-z)=2x$$

$$2\sqrt{(x+y-z)(y+z-x)}\leqslant(x+y-z)+(y+z-x)=2y$$

将以上三式相乘,即得式(2),逆推之式(C)成立,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

因为式(A)"天生丽质",自然有"如意配对":

配对 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 $\triangle$,则有

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4\triangle}+\sum\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 \tag{D}$$

证明 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,有三角不等式

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a+b+c\leqslant 3\sqrt{3}R$$

$$\Rightarrow\sum\frac{1}{bc}=\frac{a+b+c}{abc}\leqslant\frac{3\sqrt{3}R}{abc}=\frac{3\sqrt{3}}{4\triangle}$$

$$\Rightarrow\frac{3\sqrt{3}}{4\triangle}-\sum\frac{1}{bc}\geqslant 0$$

$$\Rightarrow\sum\frac{1}{a^2}\leqslant\sum\frac{1}{a^2}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\triangle}+\sum\frac{1}{bc}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4\triangle}+\frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2\leqslant$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4\triangle}+\sum\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{a^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4\triangle} + \sum\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

4. 参数推广

式(A) 还有一个漂亮的参数推广:

$\boxed{\text{推广 1}}$:设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 $\triangle$,$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为任意正数,则有

$$\sum a^2 \geqslant mk\triangle + \sum (b-c)^2 \tag{E}$$

其中

$$\begin{cases} m = 4\sqrt[3]{9}(\lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 + \lambda_3{}^2)^{-\frac{1}{6}} \\ k = \left(\dfrac{\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

显然,当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ 时,$mk = 4\sqrt{3}$,式(E) 化为式(A).

证明 应用 Cauchy 不等式有

$$\sum \lambda_1 a = \sqrt{\left(\sum \lambda_1{}^2\right)\left(\sum a^2\right)} \leqslant \sqrt{9R^2 \sum \lambda_1{}^2} = 3\left(\frac{abc}{4\triangle}\right)\sqrt{\sum \lambda_1{}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{abc}{\sum \lambda_1 a} \geqslant \frac{4\triangle}{3\sqrt{\sum \lambda_1{}^2}}$$

于是

$$\begin{aligned} N &= \sum a^2 - \sum (b-c)^2 \\ &= \sum a(b+c-a) \geqslant 3\left[\prod a(b+c-a)\right]^{\frac{1}{3}} \\ &= 3\left(16\triangle^2 \cdot \frac{abc}{\sum a}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 3\left(16\triangle^2 \cdot \frac{abc}{\lambda_1 a} \cdot \frac{\sum \lambda_1 a}{\sum a}\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant \\ &\quad 3\left(16\triangle^2 \cdot \frac{4\triangle}{3\sqrt{\sum \lambda_1{}^2}} \cdot \frac{\sum \lambda_1 a}{\sum a}\right)^{\frac{1}{3}} = mk\triangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum a^2 \geqslant mk\triangle + \sum (b-c)^2$$

5. 多边形推广

我们先将式(A) 推广到双圆四边形中去:

$\boxed{\text{推广 2}}$ 设双圆四边形 $ABCD$ 的边长为 a,b,c,d,面积为 $\triangle$,则

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant 4\triangle+Q \tag{F}$$

其中

$$Q=\sum(a-b)^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2$$

显然,式(A) 与式(F) 的外观结构一致,像一对比翼双飞的蝴蝶.

证明 由于 $ABCD$ 为双圆四边形,则

$$p=b+d=a+c=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$$

$$\Rightarrow(a,b,c,d)=(p-c,p-d,p-a,p-d)$$

$$\triangle=\sqrt{abcd},d^2=(a+c-b)^2=a^2+b^2+c^2+2ca-2ab-2bc$$

这样,式(F) 化为

$$2a^2+2b^2+2c^2+2ac-2ab-2bc\geqslant 4\triangle+2(a-b)^2+2(b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca\geqslant 2\triangle+b^2 \tag{1}$$

且

$$\begin{aligned}ab+bc+ca&=b(a+c)+ac\\&=b(b+d)+ac\\&=b^2+bd+ac\\&=b^2+bd+ac\geqslant b^2+2\sqrt{abcd}\\&=b^2+2\triangle\end{aligned}$$

这表明式(1) 成立,从而式(F) 成立,等号成立仅当

$$\begin{cases}b+d=a+c\\bd=ac\end{cases}\Rightarrow a=b=c=d$$

即 $ABCD$ 为正方形.

然而,式(A) 的多边形推广是:

$\boxed{\text{推广 3}}$:设平面凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长为 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}_+)$ 面积为 $\triangle$,指数 $m\geqslant 1$. 则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{2m}\geqslant n\left(\frac{4\triangle\tan\frac{\pi}{n}}{n}\right)^m+\frac{Q}{(n-2)^2} \tag{G}$$

其中

$$Q=\sum_{1\leqslant i<j<n}(a_i^m-a_j^m)^2$$

等号成立仅当 $A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形,其中当 $n=3$ 时,必须 $m=1$,其余当 $n\geqslant 4$ 时,$m\geqslant 1$.

由于当 $n=3,m=1$ 时,式(G) 等价于式(A). 下面,我们只需证明当 $n\geqslant 4,m\geqslant 1$ 时的情况.

证明 我们简记 $\sum\limits_{1\leqslant i<j<n}$ 为 $\sum$,利用等周不等式有

$$\sum_{i=1}^n a_i^m\geqslant n\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i}{n}\right)^m\geqslant n\left(\frac{4\triangle\tan\frac{\pi}{n}}{n}\right)^{\frac{m}{2}}$$

$$\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^n a_i^m\right)^2\geqslant n^2\left(\frac{4\triangle\tan\frac{\pi}{n}}{n}\right)^m$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^n a_i^{2m}+2\sum a_i^m a_j^m\geqslant n^2\left(\frac{4\triangle\tan\frac{\pi}{n}}{n}\right)^m$$

注意到

$$Q=\sum(a_i^m-a_j^m)^2$$
$$=(n-1)\sum_{i=1}^n a_i^{2m}-2\sum a_i^m a_j^m$$

则有

$$n\sum_{i=1}^n a_i^{2m}\geqslant n^2\left(\frac{4\triangle\tan\frac{\pi}{n}}{n}\right)^m+Q$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^n a_i^{2m}\geqslant n\left(\frac{4\triangle\tan\frac{\pi}{n}}{n}\right)^m+\frac{Q}{n}$$

由于

$$n\geqslant 4\Rightarrow(n-2)^2-n=(n-1)(n-4)\geqslant 0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{(n-2)^2}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^n a_i^{2m}\geqslant n\left(\frac{4\triangle\tan\frac{\pi}{n}}{n}\right)^m+\frac{Q}{(n-2)^2}$$

等号成立仅当 $Q=0\Rightarrow A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形.