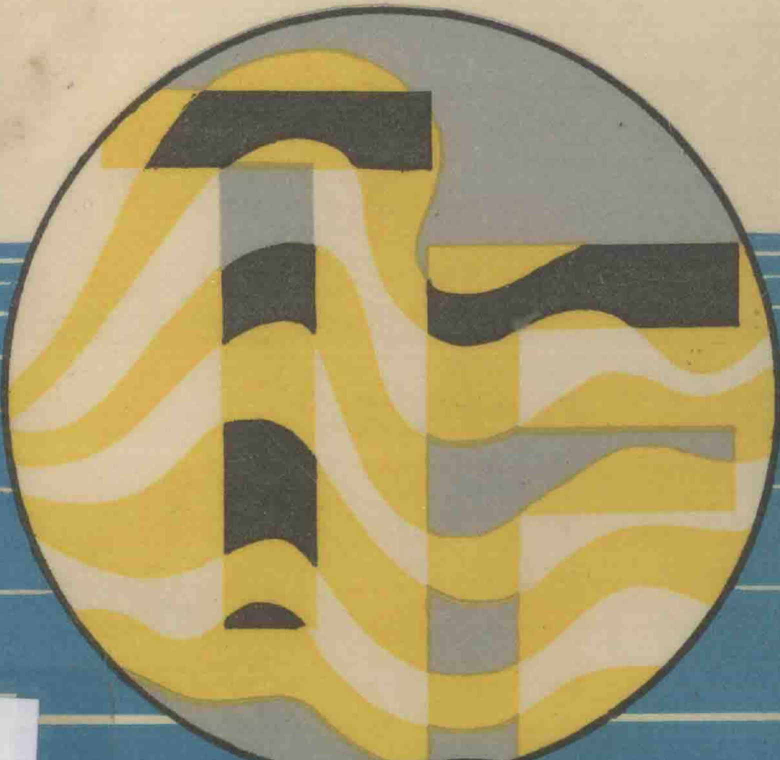
教与学丛书

数学托福

——高考数学应试必读

本册主编· 戈仁耀



· 华东理工大学出版社

教与学丛书

数学托福

—高考数学应试必读

丛书主编　孔春明
本册主编　戈仁耀

华东理工大学出版社

丛书主编　孔春明
丛书顾问　朱先权
本册主编　戈仁耀
本册副主编　黄士森
编　　委　范富成　顾汉忠　朱崇德　葛永熙　吕立美
许志浩　陶兆龙　程介才　左　坤　郭永宝
王文耀　胡晓苹　李世昌

(沪)新登字208号

教与学丛书
数学托福
——高考数学应试必读
戈仁耀　主编
华东理工大学出版社出版发行
上海市梅陇路130号
邮政编码　200237
新华书店上海发行所发行经销
常熟文化印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 12.25 字数 287 千字
1994年9月第1版　1994年9月第1次印刷
印数 1—13000 册

ISBN7-5628-0512-1/G·69　定价 7.80 元

前　言

为了帮助初、高中学生更好地过好“三考”的应试关，我们在有关专家的手导下，组织了部分富有教学经验的中学教师集体编写《教与学丛书》，《数学托福》是该丛书的分册之一。

这套丛书的编写，紧扣教材、考纲，紧密结合授课内容和目前学生的实际水平。各分册均按上、中、下三篇编写：上篇——应试精要，围绕近年各地“三考”的测试“热点”，采用释疑、辨析、归纳，以增强学生学习和复习的针对性、实效性；通过典型试题的分析解答，拓宽学生解题思路；同时还精选了各地“三考”试题加以辅证启迪。中篇——应试技巧，根据“三考”的常见题型，结合精选例题，向学生介绍应试必备的思考方法及解题技巧，以提高学生的应试能力。下篇——应试训练，精编综合练习卷供学生适应性训练，以达到最大的模拟效果。书末附有参考答案，供读者进行评估对照。

江苏省太仓市第一中学孔春明先生担任丛书主编，对丛书各分册的编写原则、结构体例及编写特色负责指导，并统筹各项组织工作，各分册均由该册主编统稿。

衷心希望读者使用本书并取得较大的收获。

编者

1994年2月

目　录

上篇　应试精要

第一章　幂函数、指数函数和对数函数……1

测试点1　集合及其运算……1

测试点2　函数的定义域……6

测试点3　函数的值域与最值……10

测试点4　函数的解析式与图象……15

测试点5　函数的单调性……25

测试点6　函数的奇偶性……32

测试点7　反函数及其图象……38

测试点8　幂函数、指数函数、对数函数……43

测试点9　指数方程与对数方程……50

第二章　不等式……56

测试点10　解不等式……56

测试点11　不等式的性质与证明……62

第三章　数列、极限与数学归纳法……71

测试点12　数列与极限……71

测试点13　数学归纳法……80

第四章　复数……87

测试点14　复数的概念与运算……87

测试点15　复数的几何意义与复数方程……98

第五章　排列、组合、二项式定理……107

测试点16　排列与组合……107

测试点17　二项式定理……114

第六章　三角函数……120

测试点 18　任意角的三角函数 ……………………………120
测试点 19　三角函数的图象 ……………………………125
测试点 20　三角函数的性质 ……………………………131
测试点 21　三角函数的值域与最值 ……………………136
测试点 22　三角函数的求值 ……………………………141
测试点 23　三角恒等式的化简与证明 …………………148
测试点 24　三角条件等式的化简与证明 ………………153
第七章　反三角函数与三角方程 ………………………159
测试点 25　反三角函数 …………………………………159
测试点 26　简单的三角方程 ……………………………164
第八章　直线与平面 ……………………………………170
测试点 27　点、线、面的位置关系 ……………………170
测试点 28　角与距离 ……………………………………175
第九章　多面体与旋转体 ………………………………183
测试点 29　多面体与旋转体的概念与性质 ……………183
测试点 30　多面体与旋转体中的线面关系 ……………189
测试点 31　多面体与旋转体的截面 ……………………198
测试点 32　多面体与旋转体的侧面及其展开图 ………206
测试点 33　多面体与旋转体的体、面积计算 …………213
第十章　直线 ……………………………………………221
测试点 34　有向线段与定比分点 ………………………221
测试点 35　直线方程 ……………………………………225
测试点 36　两条直线的位置关系 ………………………229
第十一章　圆锥曲线 ……………………………………237
测试点 37　曲线与方程 …………………………………237
测试点 38　充要条件 ……………………………………244
测试点 39　圆 ……………………………………………249

测试点 40　圆锥曲线的方程与几何性质 ……………254
测试点 41　坐标轴的平移 ……………………………266
第十二章　参数方程与极坐标 ……………………273
测试点 42　参数方程 …………………………………273
测试点 43　极坐标与极坐标方程 …………………282
中篇　应试技巧
一、分类讨论的思想 ……………………………………291
二、化归与转化的思想 …………………………………300
三、数形结合的思想 ……………………………………309
四、函数与方程的思想 …………………………………319
五、选择题的解法 ………………………………………325
六、填空题的解法 ………………………………………339
下篇　应试训练
综合练习一 ………………………………………………347
综合练习二 ………………………………………………351
综合练习三 ………………………………………………356
综合练习四 ………………………………………………361
答案与提示 ………………………………………………367

上篇 应试精要

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

测试点 1 集合及其运算

高考试题中的分布情况

年份	1989		1990		1991			1992			1993			1994	
类型	全国	上海	全国	上海	全国	上海	三南	全国	上海	三南	全国	上海	3+2	上海	3+2
题号	一(1)	五	9	25	15	11	5	21	20	13	11		7	15	1

集合是数学中极其重要的概念之一。在解与集合有关的问题时，应注意：(1) 正确理解集合、子集、空集、交集、并集、全集、补集等集合概念；(2) 弄清集合中元素的实质和构成集合的三个基本性质；(3) 准确地表示元素与集合，集合与集合之间的关系；(4) 注意空集$\varnothing$的特殊性；(5) 善于用韦恩图和数轴这一数形结合的思想方法。

在解含有参数的集合问题时，一般根据条件适当化为另一个等价问题并注意分类思想的应用。

在解以集合语言所叙述的代数、三角、几何问题时，要正确处理好符号语言、图象语言及一般数学语言之间的转化，以求问题的顺利解决。

【例 1】 集合 $M=\left\{x \left| x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in Z\right.\right\}$， $N=\left\{x \right|$

$x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in Z\Big\}$，则（　　）。

(A) $M=N$　　(B) $M\supset N$

(C) $M\subset N$　　(D) $M\cap N=\phi$

【解析】 集合 M、N 的元素是用弧度表示的角。

$\because$ $M=\left\{x\,\middle|\,x=(2k+1)\frac{\pi}{4}, k\in Z\right\}$，

$N=\left\{x\,\middle|\,x=(k+2)\cdot\frac{\pi}{4}, k\in Z\right\}$，

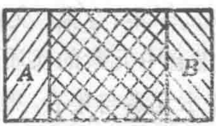
$\therefore$ $M\subset N$　选(C)。

【例 2】 若 $A\cup B=I$（I 为全集），则下列关系式一定正确的是（　　）。

(A) $B\subseteq\bar{A}$　　(B) $A\cap B=\phi$

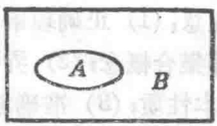
(C) $B\supseteq\bar{A}$　　(D) $\bar{A}\cup\bar{B}=I$

【解析】 当给出的集合是抽象的集合时，我们通常借助于韦恩图来解。



$A\cap B\neq\phi$

图 1



$A\cap B=\phi$

图 2

$\because$ $A\cup B=I$ 有两种情况 (1) $A\cap B\neq\phi$　(2) $A\cap B=\phi$(如图1、图2)

当 $A\cap B\neq\phi$ 时，$B\nsubseteq\bar{A}$，$\bar{A}\cup\bar{B}\neq I$ 而 $\bar{A}\subset B$

当 $A\cap B=\phi$ 时，$\bar{A}=B$

综上所述，选(C)。

【例 3】 设集合 $P=\{(x, y)\,|\,y^2-2y+x=0, x, y\in R\}$，

$Q=\{(x, y)\,|\,x=\cos^2\theta,\ y=\sin\theta+1,\ \theta\in R\}$，那么（　　）。

(A) $P=Q$　　　　(B) $P\subset Q$

(C) $P\supset Q$　　　　(D) $P\cap Q=\phi$

【解析】 这是用集合语言表示曲线方程的问题。集合P的元素是抛物线 $y^2-2y+x=0$ 上的点，集合Q的元素是抛物线 $\begin{cases}x=\cos^2\theta\\ y=\sin\theta+1\ (\theta\in R)\end{cases}$ 上的点。

$\because \begin{cases}x=\cos^2\theta\\ y=\sin\theta+1\end{cases} \Rightarrow (y-1)^2+x=1 \Rightarrow y^2-2y+x=0$

$(0\leqslant x\leqslant 1)$

所以Q的元素是抛物线$y^2-2y+x=0\,(0\leqslant x\leqslant 1)$上的点

即 $P\supset Q$ 选 (C)。

【例 4】 已知 $A=\{x\,|\,x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\,|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，　$C=\{x\,|\,x^2+2x-8=0\}$，　且 $A\cap B\supset\phi$，$A\cap C=\phi$，求 a 的值。

【解析】 由已知得 $B=\{2, 3\}$，$C=\{2, -4\}$，

$\because$　$A\cap C=\phi$　　$\therefore$　$2\notin A$，$-4\notin A$

$\because$　$A\cap B\supset\phi$ 即 $A\cap B\neq\phi$，$\therefore$　$3\in A$

将 $x=3$ 代入方程 $x^2-ax+a^2-19=0$，解得 $a=5$，$a=-2$。

当 $a=5$ 时，$A=\{3, 2\}$，$A\cap C=\{2\}\neq\phi$，不合题意。

当 $a=-2$ 时，$A=\{3, -5\}$，符合题意，$\therefore$　$a=-2$。

说明：注意检查所求的 a 是否符合题意，是否符合构成集合的特性。

【例 5】 设函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}(3-x)$ 的定义域集合为A，函数$y=-4^{x-\frac{1}{2}}-3\cdot 2^x+1$ 的值域集合为 B，集合$C=\{x\,|\,x^2-$

$\log_2 ab\cdot x+\log_2 a\cdot\log_2 b\leqslant 0\ (a<b)\}$ 且满足(1) $(A\cup B)\cup C=\{x|x<3\}$，(2) $(A\cup B)\cap C=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，求 a、b 的值。

【解析】 由已知得，集合 $A=\{x|2<x<3\}$，$B=\{x|x<1\}$，$C=\{x|\log_2 a\leqslant \log_2 b\}$。

$\because$ $(A\cup B)\cap C=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$

$\therefore$ $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}\subseteq C$

又 $(A\cup B)\cup C=\{x|x<3\}$，记 $I=\{x|x<3\}$

$\therefore$ $\overline{A\cup B}=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}\subseteq C$

即 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}=C$ $\therefore$ $\log_2 a=-1$，$\log_2 b=2$，

得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=4$。

从图 3 数轴上也可得出上述结论，但注意边界值的遗漏。

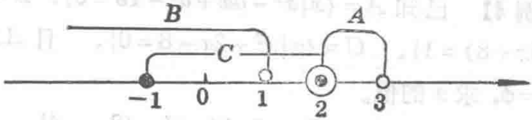


图 3

【例 6】 设 $A=\{x|10+3x-x^2\geqslant 0\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，$A\cap B=\phi$，求 m 的取值范围。

【解析】 $\because$ $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}\neq\phi$

$\therefore$ $A\cap B=\phi$ 有两种情况：

(1) $B=\phi$，这时，$2m-1<m+1$，得 $m<2$

(2) $B\neq\phi$，则 $\begin{cases}2m-1\geqslant m+1\\ m+1>5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2m-1\geqslant m+1\\ 2m-1<-2\end{cases}$，得 $m>4$

$\therefore$ $m\in(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$

【思考】

1. 设集合 $M=\{x|x>3\}$，$P=\{x|x<3\}$，那么"$x\in M$ 或 $x\in P$"是"$x\in M\cap P$"的（　）。

（上海试题）

（A）充分条件但非必要条件
（B）必要条件但非充分条件
（C）充分必要条件
（D）既不是充分条件也不是必要条件

2. 已知集合 $P=\{a|a=i^n-i^{-n}\quad n\in Z$（i 是虚数单位）那么集合 P 等于（　）。

（浙江测试题）

（A）$\{0, 2i\}$　　（B）$\{0, 2i, 2\}$
（C）$\{0, 2, -2\}$　　（D）$\{0, 2i, -2i\}$

3. 设 I 为全集，子集 $A=\{x|f(x)=0]$，$B=[x|g(x)=0\}$，$C=\{x|h(x)=0\}$，则方程 $\dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{h(x)}=0$ 的解集是（　）。

（北京测试题）

（A）$A\cap B\cap C$　（B）$A\cap B$　（C）$A\cap B\cap\overline{C}$　（D）$A\cap B\cup C$

4. 若集合 $M=\{y|y=2^x\quad x\in R\}$，$N=\{y|y=x^2\quad x\in R\}$，则（　）。

（江苏测试题）

（A）$M\cap N=\{2, 4\}$　　（B）$M\cap N=\{4, 6\}$
（C）$M\supset N$　　（D）$M\subset N$

5. 已知集合 $P=\{z||z+2|+|z-2|=6, z\in c\}$，$Q=\{z||z+1|=1\quad z\in c\}$，那么 P 与 Q 的关系是（　）。

（合肥测试题）

（A）$P\supset Q$　（B）$P\subset Q$　（C）$P=Q$　（D）$P\cap Q=\phi$

6. I 为全集，P、Q 为非空集合，且 $P\cup Q=I$，那么 P、Q 必然满足的关系是（　）。

（北京测试题）

(A) $P\cap Q\subset P$　　　　(B) $P\cap Q\subset Q$

(C) $\overline{P}\cap\overline{Q}=\phi$　　　　(D) $P\cap Q=\phi$。

7. 设 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-mx+2=0\}$，且 $A\cap B=B$，求 m 的值。

8. 关于实数不等式 $\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$，$a\in R$ 的解集分别为 A、B，求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围。

(上海试题)

9. 设 $A=\{a^2, a+1, -3\}$，$B=\{a-3, -1, a+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求 a 的值。

10. 若全集 $I=\{x|\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x\}$，$A=\{x|\arcsin(\sin x)=x\}$，$B=\{x|\cos(\arccos x)=x\}$，$C=\{x|\arccos(\cos x)=x\}$，求 $B\cup C$，$A\cap\overline{C}$

(杭州测试题)

测试点 2　函数的定义域

高考试题中的分布情况

年份	1989		1990		1991			1992			1993			1994	
类型	全国	上海	全国	上海	全国	上海	三南	全国	上海	三南	全国	上海	3+2	上海	3+2
题号	15	三(2)		1 26					7				24		

函数定义域是函数的一个重要特征。研究函数的性态、图象、最值等有关函数问题时，首先要考虑函数的定义域。

函数的定义域通常由解析式(使解析式有意义)或由实际问题(使实际问题有意义)确定。近年来对定义域的考查从求简单函数的定义域提高到求复合函数的定义域。

【例 1】 求函数 $y=\sqrt{2+\log_{\frac{1}{2}}x}+\sqrt{\operatorname{tg}x}$ 的定义域

【解析】 解不等式组$\begin{cases}2+\log_{\frac{1}{2}}\geqslant 0 & ① \\ \operatorname{tg} x\geqslant 0 & ②\end{cases}$

由①得 $0<x\leqslant 4$，由②得 $k\pi\leqslant x<k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in z)$

所以函数 y 的定义域为$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)\cup[\pi,\ 4]$。

【例 2】 求下列函数的定义域。

(1) $y=\sqrt{\log_x(3x-2)}$，

(2) $y=\lg(a^x-k\cdot 2^x)$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$

【解析】 (1) $\log_x(3x-2)\geqslant 0$ ① 若 $x>1$，

得 $$3x-2\geqslant 1\Rightarrow x>1$$

② 若 $0<x<1$

得 $$0<3x-2<1\Rightarrow\frac{2}{3}<x<1$$

所以所求的定义域为$\left(\dfrac{2}{3},\ 1\right)\cup(1,\ +\infty)$。

(2) 由 $a^x-K\cdot 2^x>0$，得 $\left(\dfrac{a}{2}\right)^x>K$

① 若 $K\leqslant 0$，$\because$ $a>0$ 且 $a\neq 1$，而 $\left(\dfrac{a}{2}\right)^x>0$

$\therefore$ $x\in\mathrm{R}$。

② 若 $K>0$，当 $\dfrac{a}{2}>1$，即 $a>2$ 时 $x>\log_{\frac{a}{2}}K$。

当 $0<\dfrac{a}{2}<1$ 时，即 $0<a<2(a\neq 1)$，$x<\log_{\frac{a}{2}}K$。

当 $\dfrac{a}{2}=1$ 时，即 $a=2$，1) $0<K<1$ 时 $x\in K$。

2) $K>1$ 时 $x\in\phi$。

说明：当涉及函数的单调性，或者函数表达式中含有影

响定义域的参数时，必须通过分类讨论来求函数的定义域。

【例 3】 设 $a\in R$, $n\in N$ 且 $n\geqslant 2$ 如果

$$f(x)=\lg\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+an^x}{n}$$

的定义域是 $(-\infty, 1]$，求 a 的取值范围。

【解析】 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 1]$，故不等式

$$1+2^x+\cdots+(n-1)^x+an^x>0,$$

即 $$a>-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right]=g(x),$$

对于一切 $x\in(-\infty, 1]$ 恒成立。由 $g(x)$ 的单调性可知，

$$g(1)=-\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1-n}{2}$$

是 $x\in(-\infty, 1]$ 上的最大值 所以 a 的取值范围为 $\left(\frac{1-n}{2},+\infty\right)$。

说明：已知定义域，求函数解析式中的参数的取参考的值范围通常转化为其在定义域上恒成立的不等式求解。

【例 4】 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$，求 $g(x)=f(x+a)\cdot f(x-a)$ $(a\leqslant 0)$ 的定义域。

【解析】 要使函数有意义，当且仅当

$$\begin{cases}0<x+a\leqslant 1\\0<x-a\leqslant 1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}-a<x\leqslant 1-a\\a<x\leqslant 1+a\end{cases}\because\quad a\leqslant 0$$

$\therefore\quad -a\geqslant a,\ 1-a\geqslant 1+a$。

所以当 $1+a>-a$ 即 $-\frac{1}{2}<a\leqslant 0$ 时、函数定义域为 $(-a, 1+a]$

当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，函数定义域为 ϕ。

【例 5】 已知函数 $y=\arccos(2x-1)$ 的值域是 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 求它的定义域。

【解析】 $\frac{\pi}{6} \leqslant \arccos(2x-1) \leqslant \frac{2\pi}{3}$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant 2x-1 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

所以函数的定义域为 $\left[\frac{1}{4}, \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right]$。

【思考】

1. 设函数 $y=\lg(x^2-x-2)$ 的定义域为 A, 函数 $y=\sqrt{\frac{x+2}{1-x}}$ 的定义域为 B, 则 $A \cap B=$__________

(广东测试题)

2. 函数 $y=\log_2 \log_{\frac{1}{2}} x$ 的定义域是__________。

(上海试题)

3. 求函数 $y=\log_a[\log_a(\log_a x)]$ $(a>0$, 且 $a \neq 1)$ 的定义域。

(江苏测试题)

4. 求函数 $y=\sqrt{6-5 \cdot a^x+a^{2x}}$ $(a>0$, 且 $a \neq 1)$ 的定义域。

5. 已知函数 $y=\frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 确定参数 k 的取值范围。

6. 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求 $f(\sqrt{x}-2)$ 的定义域。

7. 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 求函数 $f(\ln|x|)$ 的定义域。

8. 已知 $f(2x-1)$ 的定义域是 $[0, 2)$, 求 $f(x)$ 的定义域。

测试点 3　函数的值域与最值

高考试题中的分布情况

年份	1989		1990		1991			1992			1993			1994	
类型	全国	上海	全国	上海	全国	上海	三南	全国	上海	三南	全国	上海	3+2	上海	3+2
题号		七	6 10	27	21	22	24	15	18 26		22	26	22		14 20 21 (文)

函数的值域由函数的定义域和对应法则两个因素决定。因此在求函数的值域时，不但要重视对应法则的作用，更要注意定义域对值域的制约作用。在使用判别式法求函数值域时要研究其可靠性。

函数的最值与函数的值域有着密切的关系如果函数的值域为 $[m, n]$，那么函数的最大值就是 n，最小值就是 m。反过来，则不一定。（例如函数 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$ 的最大值是 1，最小值是 -1，但函数的值域不是 $[-1, 1]$，而是 $\{-1, 1\}$，只含两个数。）

【例 1】 函数 $y=\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的值域是(　　)。

(A) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$　　(B) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

(C) $[0, \pi)$　　(D) $(0, \pi]$

【解析】 $\because$ $0<\frac{1}{\sqrt{x}}\leqslant 1 \Rightarrow x\geqslant 1$

$\therefore$ $0\leqslant \arccos\frac{1}{\sqrt{x}}<\frac{\pi}{2}$

所以函数的值域是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 选 (A)。