

应用型本科 电子及通信工程专业“十二五”规划教材

电磁场与电磁波

主编 张刚兵

- 内容新颖：新知识、新技术、新工艺
- 特色鲜明：突出“应用、实践、创新”
- 定位准确：面向工程技术型人才培养
- 质量上乘：应用型本科专家全力打造



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

应用型本科 电子及通信工程专业“十二五”规划教材

电磁场与电磁波

主 编 张刚兵

副主编 钱显毅 何一鸣 肖闽进
欧阳庆荣 宋依青 马春芳

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书以麦克斯韦方程作为主线,详细地介绍了电磁场与电磁波理论所涉及的基本原理、基本规律、基本分析方法和基本计算方法,突出了电磁场与电磁波理论的实用性。本书主要内容包括电磁理论必要的数学基础、电磁场的基本问题、静态场、时变电磁场、平面电磁波和导行电磁波等。

本书可作为高等院校电子工程、通信工程、电子信息工程、微电子和应用电子技术等相关专业本科生的教材,也可作为电磁场理论、微波技术、天线等领域的工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/张刚兵主编. —西安:西安电子科技大学出版社, 2016.2

应用型本科电子及通信工程专业“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5606-3916-1

I. ① 电… II. ① 张… III. ① 电磁场—高等学校—教材 ② 电磁波—高等学校—教材

IV. ① O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 019592 号

策划编辑 马晓娟

责任编辑 王瑛 马晓娟

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2016年2月第1版 2016年2月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 14.5

字 数 341千字

印 数 1~3000册

定 价 26.00元

ISBN 978-7-5606-3916-1/O

XDUP 420800 1-1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

为了贯彻落实《国家中长期教育改革和规划纲要》和《国家中长期人才发展规划纲要》的重大改革,编者根据教育部 2011 年 5 月发布的《关于“十二五”普通高等教育本科教材建设的若干意见》和近期关于 600 所本科院校转型的要求,本着教材必须符合教育规律和人才成长规律的精神和“卓越工程师教育培养计划”的具体要求,编写了本书。

本书具有以下特色:

(1) 符合教育部《关于“十二五”普通高等教育本科教材建设的若干意见》的精神,具有时代性、先进性、创新性,可为培养造就一大批创新能力强、适应经济社会发展需要的高质量各类型工程技术人才和卓越工程师打下良好的数理基础。

(2) 特色鲜明,实用性强,方便学生自学。本书将每个知识点与相关学科、产业的应用紧密结合,可提高学生的学习兴趣,适应不同基础的学生自学。

(3) 重点突出,结论表述准确。对其相关定理及场的基本方程的描述,既有严格的数学推导,又有物理意义的描述。结论表述清晰准确,有利于帮助学生建立工程应用中的数理模型,培养学生的形象思维能力和解决实际工程的能力。

(4) 难易适中,适用面广。本书可供不同的读者学习和参考,满足普通高校教学要求。

(5) 系统性强,强化应用,可培养读者的动手能力。本书在编写过程中,吸收了国内外同类教材的优点,调研并参考了相关行业专家的意见,特别适用于卓越工程师培养,有利于培养实用型人才。本书有些理论推导部分在教学时可以删除。

张刚兵担任本书主编,并负责统稿工作。本书编写分工如下:第 1、2、7 章由张刚兵编写,第 3 章由何一鸣编写,第 4 章由钱显毅编写,第 5 章由马春芳编写,第 6 章由肖闽进编写,第 8 章由宋依青编写,第 9 章由欧阳庆荣编写。

限于编者水平,书中定有不少疏漏,欢迎各位读者多提宝贵意见。如需要交流或索取教学用 PPT 资料,请通过 E-mail: zhanggb@czu.cn 联系。

编 者

2015 年 8 月

目 录

第1章 矢量分析与场论基础	1	2.3.1 库仑定律	19
1.1 标量场和矢量场	1	2.3.2 电场强度	20
1.1.1 标量和矢量	1	2.3.3 电位函数	20
1.1.2 标量场和矢量场	1	2.4 电通量密度和高斯定理	21
1.2 矢量运算	2	2.4.1 电通量密度	21
1.2.1 标量积和矢量积	2	2.4.2 高斯定理	22
1.2.2 三重积	3	2.5 欧姆定律和焦耳定律的微分形式	23
1.3 常用正交坐标系	3	2.5.1 欧姆定律的微分形式	23
1.3.1 三种常用坐标系	3	2.5.2 电阻	24
1.3.2 三种坐标系之间的相互转换	5	2.5.3 焦耳定律的微分形式	25
1.4 标量场的梯度	6	2.6 电介质中的电场及电位移矢量	25
1.4.1 方向导数	6	2.6.1 电介质的极化	25
1.4.2 标量场的梯度	7	2.6.2 电位移矢量	27
1.5 矢量场的通量与散度	8	2.7 毕奥-萨伐定律及磁感应强度	28
1.5.1 矢量场的通量	8	2.7.1 安培磁力定律	28
1.5.2 矢量场的散度	9	2.7.2 毕奥-萨伐定律及磁感应强度	29
1.5.3 散度定理	9	本章小结	29
1.6 矢量场的环量与旋度	10	习题	31
1.6.1 矢量场的环量	10	第3章 静态电磁场中的介质	33
1.6.2 矢量场的旋度	11	3.1 静电场中的导体	33
1.6.3 斯托克斯定理	12	3.2 静电场中电介质的极化	34
1.7 拉普拉斯算符及其运算	12	3.2.1 物质的分类	34
1.8 亥姆霍兹定理	13	3.2.2 介质的极化	35
1.8.1 散度、旋度的比较	13	3.2.3 极化强度与束缚电荷	35
1.8.2 亥姆霍兹定理	13	3.2.4 极化介质产生的电位	37
本章小结	13	3.3 介质中的静电场方程	38
习题	15	3.3.1 介质中的高斯定理	38
第2章 电磁感应	16	3.3.2 介质的分类	39
2.1 电荷及电荷守恒定律	16	3.3.3 介电常数	39
2.1.1 电荷及电荷密度	16	3.4 导体系统中的电容	42
2.1.2 电荷守恒定律	17	3.4.1 孤立导体的电容	42
2.2 电流及电流连续性方程	17	3.4.2 双导体电容器的电容	42
2.2.1 电流及电流密度	17	3.4.3 电位系数、电容系数及部分电容	42
2.2.2 电流连续性方程	18	3.5 静电场的能量与电场力	46
2.3 库仑定律与电场强度	19		

3.5.1 静电能	46	5.1.4 静电场的应用	109
3.5.2 静电力	48	5.2 恒定磁场的分析与应用	110
3.6 物质的磁化	50	5.2.1 恒定磁场的基本方程及边界条件	110
3.6.1 磁偶极子	50	5.2.2 电感	113
3.6.2 分子电流及分子磁矩	51	5.2.3 磁场能量和磁能密度	116
3.6.3 磁化强度	52	5.2.4 恒定磁场的应用	119
3.6.4 磁化电流	52	5.3 恒定电场的分析与应用	120
3.7 磁介质中的磁场方程	53	5.3.1 恒定电场的基本方程及边界条件	120
3.7.1 磁介质中的安培环路定理	53	5.3.2 静电场与恒定电场的比较	124
3.7.2 磁介质的磁导率	54	5.3.3 恒定电场的应用	125
本章小结	56	本章小结	125
习题	57	习题	127
第4章 时变电磁场	60	第6章 静态场的解	130
4.1 法拉第电磁感应定律	60	6.1 概述	130
4.2 位移电流	62	6.1.1 边值问题及分类	130
4.3 麦克斯韦方程组	67	6.1.2 唯一性定理	131
4.3.1 麦克斯韦方程组	67	6.2 镜像法	133
4.3.2 麦克斯韦方程组的辅助方程——本构关系	68	6.2.1 静电场中的镜像法	133
4.3.3 洛伦兹力	69	6.2.2 电轴法	136
4.3.4 麦克斯韦方程组的完备性	70	6.3 分离变量法	139
4.4 时变电磁场的边界条件	72	6.3.1 直角坐标系中的分离变量法	140
4.4.1 一般情况	73	6.3.2 圆柱坐标系中的分离变量法	142
4.4.2 两种特殊情况	75	6.3.3 球坐标系中的分离变量法	145
4.5 时变电磁场的能量与能流	79	6.4 有限差分法	148
4.6 正弦电磁场	82	6.4.1 有限差分法概述	148
4.6.1 正弦电磁场的复数表示法	82	6.4.2 二维泊松方程的差分离散化	148
4.6.2 麦克斯韦方程的复数形式	84	6.4.3 边界条件的离散化	150
4.6.3 复坡印亭矢量	85	6.4.4 差分方程组的求解	153
4.6.4 复介电常量与复磁导率	86	本章小结	155
4.6.5 复坡印亭定理	87	习题	155
4.6.6 时变电磁场的唯一性定理	88	第7章 平面电磁波基础	158
4.7 波动方程	89	7.1 波动方程	158
4.8 时变电磁场的位函数	91	7.2 理想介质中的均匀平面波	159
本章小结	94	7.2.1 平面波的场	159
习题	96	7.2.2 均匀平面波的参数	161
第5章 静态场分析与应用	99	7.2.3 均匀平面波的传播特性	161
5.1 静电场的分析与应用	99	7.2.4 沿任意方向传播的均匀平面波	163
5.1.1 静电场的基本方程及边界条件	100	7.3 有耗媒质中的均匀平面波	163
5.1.2 电容	105	7.3.1 有耗媒质中平面波的传播特性	163
5.1.3 静电场的能量及能量密度	106		

7.3.2 趋肤效应	165	第9章 导行电磁波	187
7.3.3 工程应用	165	9.1 规则波导传输的基本理论	187
7.4 电磁波的极化	167	9.1.1 纵向场法	187
7.4.1 线极化	167	9.1.2 赫兹矢量法	190
7.4.2 圆极化	167	9.2 矩形波导中的导行电磁波	194
7.4.3 椭圆极化	168	9.2.1 矩形波导中的模式及其场表达式	194
7.4.4 电磁波极化特性的工程应用	168	9.2.2 矩形波导模式的场结构	198
7.5 色散和群速	170	9.2.3 矩形波导的壁电流	200
7.5.1 色散现象与群速	170	9.2.4 矩形波导的传输功率和功率容量	201
7.5.2 相速与群速的关系	171	9.3 圆波导	202
本章小结	171	9.3.1 传输模式与场分量	203
习题	172	9.3.2 圆波导的传输功率与功率容量	206
第8章 平面电磁波的反射与透射	174	9.3.3 圆波导的三个主要模式	207
8.1 平面波向平面对分界面的垂直入射	174	9.4 同轴线中的导行电磁波	210
8.1.1 平面波向理想导体的垂直入射	174	9.4.1 同轴线的主模——TEM	210
8.1.2 平面波向理想介质的垂直入射	176	9.4.2 同轴线的高次模	211
8.2 平面波对理想介质的斜入射	178	9.4.3 同轴线的尺寸选择	214
8.2.1 相位匹配条件和 Snell 定律	178	9.5 谐振腔中的电磁场	214
8.2.2 垂直极化波的斜入射	180	9.5.1 谐振腔的基本参数	214
8.2.3 平行极化波的斜入射	181	9.5.2 矩形谐振腔	217
8.3 平面波对理想导体的斜入射	182	9.5.3 圆柱形谐振腔	218
8.3.1 垂直极化波的斜入射	182	9.5.4 同轴线型谐振腔	219
8.3.2 平行极化波的斜入射	182	本章小结	220
8.4 平面波的全透射与全反射	183	习题	220
8.4.1 全透射	183	附录 希腊字母读音表	222
8.4.2 全反射	184	参考文献	223
本章小结	184		
习题	185		

第1章 矢量分析与场论基础

矢量分析和场论相关知识是学习电磁场理论必须具备的数学工具,作为电磁场理论的基础,它们为复杂的电磁现象提供了精确的描述方式。本章简要介绍场的基本概念、矢量分析的基础知识,重点介绍标量场的梯度、矢量场的散度和旋度等相关内容。

1.1 标量场和矢量场

1.1.1 标量和矢量

电磁场中涉及的绝大多数物理量能够容易地区分为标量或矢量。一个只有大小而没有方向的物理量称为标量,如时间(t)、温度(T)、电流(I)、电压(U)、电荷(q)、质量(m)等;既有大小又有方向的物理量称为矢量,如力、力矩、速度、加速度、电场强度、磁场强度等。

标量可以用数字准确描述,如 0°C 表示某物体温度, 25 g 表示某物体的质量。而矢量则用黑斜体或带箭头的符号来表示。本书统一采用黑斜体表示矢量。模值为1的矢量称为单位矢量,常用来表示某矢量的方向。如矢量 $\mathbf{A}$ 可写成 $\mathbf{A}=a_A\mathbf{A}$,其中 a_A 是与 $\mathbf{A}$ 同方向的单位矢量, A 为矢量 $\mathbf{A}$ 的模值。

如果给定的矢量在3个相互垂直的坐标轴上的分量都已知,那么这个矢量即可确定。在直角坐标系中,如矢量 $\mathbf{A}$ 的坐标分量为 (A_x, A_y, A_z) ,则 $\mathbf{A}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad (1.1.1)$$

其中, e_x 、 e_y 、 e_z 分别表示直角坐标系中 x 、 y 、 z 方向上的单位矢量。通过矢量的加减可得到它们的和差。设

$$\mathbf{B} = e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z \quad (1.1.2)$$

则

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = e_x (A_x \pm B_x) + e_y (A_y \pm B_y) + e_z (A_z \pm B_z) \quad (1.1.3)$$

1.1.2 标量场和矢量场

场有空间占据的概念。设有一个确定的空间区域,若该区域内的每一个点都对应着某个物理量的一个确定值,则认为该空间区域确定了这个物理量的一个场。

物理量是标量的场称为标量场,如温度场、密度场和电位场等。物理量是矢量的场称为矢量场,如力场、速度场等。

如果场中的物理量不随时间而变化,只是空间和点的函数,那么称该场为稳定场(或静态场);如果场中的物理量是空间位置 and 时间的函数,那么称之为不稳定场(或时变场)。

由数学中函数的定义可知,给定了一个标量场就相当于给定了一个数性函数 $u(M)$,

而给定了一个矢量场就相当于给定了一个矢性函数 $\mathbf{A}(M)$, 其中 M 为场对应空间区域中的任意点。在直角坐标系中, 点 M 由它的 x 、 y 、 z 坐标确定, 因此一个标量场可用数性函数表示为

$$u(M) = u(x, y, z) \quad (1.1.4)$$

而矢量场则可用矢性函数表示为

$$\mathbf{A}(M) = \mathbf{A}(x, y, z) \quad (1.1.5)$$

在标量场中, 为了直观研究其分布情况, 引入了等值面(或等量面)的概念。等值面是指场中使函数取值相同的点组成的曲面。标量场的等值面方程为

$$u(M) = C \quad (1.1.6)$$

其中, C 为常数。如温度场中的等值面就是由温度相同的点所组成的等温面; 电位场中的等值面就是由电位相同的点所组成的等位面, 如图 1.1.1 所示。等值面在二维平面上就是等值线, 如常见的等高线、等温线等。

在矢量场中, 可以用矢量线来描绘矢量场的分布情况。如图 1.1.2 所示, 在矢量场的每一点 M 处的切线方向与对应于该点的矢量方向相重合。在流体力学中, 矢量线就是流线。在电磁场中, 矢量线就是电力线和磁力线。

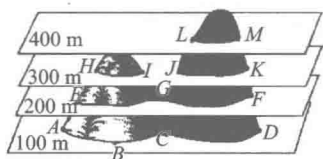


图 1.1.1 等值面

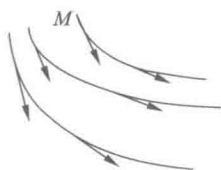


图 1.1.2 矢量场的矢量线

1.2 矢量运算

1.2.1 标量积和矢量积

矢量的乘积有两种定义: 标量积(点积)和矢量积(叉积)。

1. 标量积

如图 1.2.1 所示, 有两个矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$, 它们之间的夹角为 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 。两个矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的点积记为 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, 它是一个标量, 定义为矢量 $\mathbf{A}$ 与矢量 $\mathbf{B}$ 的大小和它们之间夹角的余弦之积, 即 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$ 。

在直角坐标系中, 各单位坐标矢量的点积满足如下关系:

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0 \quad (1.2.1a)$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \quad (1.2.1b)$$

矢量 $\mathbf{A}$ 与矢量 $\mathbf{B}$ 的点积可表示为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.2.2)$$

矢量点积满足交换律和分配律:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.2.3a)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1.2.3b)$$

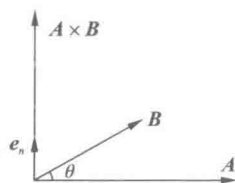


图 1.2.1 矢量及其叉积

2. 矢量积

两个矢量的叉积记为 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ，它是一个矢量，垂直于包含矢量 $\mathbf{A}$ 和矢量 $\mathbf{B}$ 的平面，方向满足右手螺旋法则，即当右手四指从矢量 $\mathbf{A}$ 到 $\mathbf{B}$ 旋转 θ 角时大拇指所指的方向，其大小为 $AB\sin\theta$ ，即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_n AB\sin\theta \quad (1.2.4)$$

式中， $\mathbf{e}_n$ 是叉积方向的单位矢量。

在直角坐标系中，各单位坐标矢量的叉积满足如下关系：

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (1.2.5a)$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \quad (1.2.5b)$$

矢量 $\mathbf{A}$ 与矢量 $\mathbf{B}$ 的叉积可表示为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.2.6)$$

叉积不满足交换律，但满足分配律：

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.2.7a)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1.2.7b)$$

1.2.2 三重积

矢量 $\mathbf{A}$ 与矢量 $(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 的点积称为标量三重积。标量三重积满足：

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.2.8)$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的模表示由 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 为相邻边所形成的平行四边形的面积，因此 $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 的模是平行六面体的体积。矢量 $\mathbf{A}$ 与矢量 $(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 的叉积称为矢量三重积。矢量三重积满足：

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.2.9)$$

1.3 常用正交坐标系

为了描述电磁场在空间中的分布和变化规律，必须引入坐标系。虽然物理规律对任何坐标系都等价，但在求解实际问题时，根据被研究对象几何形状的不同，适当选择坐标系，可使求解简便，并且使其解的形式简洁，能直观反映其性质。下面介绍几种常用坐标系。

1.3.1 三种常用坐标系

在电磁场理论中，最常用的三种坐标系是直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

1. 直角坐标系

直角坐标系是最常用和最被人们熟知的坐标系，这里只做简单介绍。直角坐标系由 x 轴、 y 轴和 z 轴及其交点 O (称为坐标原点) 组成，3 个坐标变量的变化范围均为负无穷到正无穷，如图 1.3.1 所示。

在直角坐标系中，以坐标原点为起点，指向点

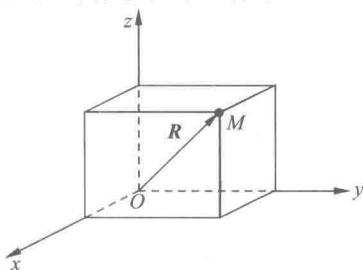


图 1.3.1 直角坐标系

$M(x, y, z)$ 的矢量称为点 M 的位置矢量, 可表示为

$$\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (1.3.1)$$

位置矢量的微分元可表示为

$$d\mathbf{R} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \quad (1.3.2)$$

其中, dx 、 dy 和 dz 分别表示位置矢量在 x 、 y 和 z 增加方向的微分元。与单位坐标矢量相垂直的 3 个面积元分别为

$$dS_x = \mathbf{e}_x dydz \quad (1.3.3a)$$

$$dS_y = \mathbf{e}_y dxdz \quad (1.3.3b)$$

$$dS_z = \mathbf{e}_z dxdy \quad (1.3.3c)$$

体积元可表示为

$$dV = dxdydz \quad (1.3.4)$$

2. 圆柱坐标系

圆柱坐标系的 3 个坐标变量是 ρ 、 ϕ 和 z , 它们的变化范围分别是 $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ 。

如图 1.3.2 所示, 圆柱坐标系的 3 个单位坐标矢量分别是 $\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\phi$ 、 $\mathbf{e}_z$, 它们之间符合右手螺旋法则, 除 $\mathbf{e}_z$ 是常矢量外, $\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\phi$ 都是变矢量, 方向均随点 M 的位置而改变。

在圆柱坐标系中, 矢量 $\mathbf{R}$ 可表示为

$$\mathbf{R} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z \quad (1.3.5)$$

位置矢量的微分元可表示为

$$d\mathbf{R} = d(\rho\mathbf{e}_\rho) + d(z\mathbf{e}_z) = \mathbf{e}_\rho d\rho + \rho d\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_z dz \quad (1.3.6)$$

其中, $d\rho$ 、 $\rho d\phi$ 和 dz 分别表示位置矢量在 ρ 、 ϕ 和 z 增加方向的微分元, 如图 1.3.3 所示。与单位坐标矢量相垂直的 3 个面积元分别为

$$dS_\rho = \mathbf{e}_\rho d\phi dz \quad (1.3.7a)$$

$$dS_\phi = \mathbf{e}_\phi d\rho dz \quad (1.3.7b)$$

$$dS_z = \mathbf{e}_z \rho d\rho d\phi \quad (1.3.7c)$$

体积元可表示为

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.3.8)$$

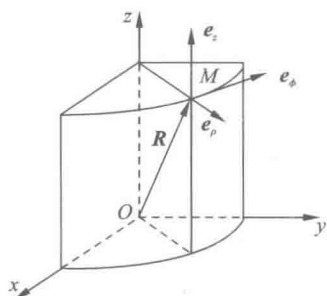


图 1.3.2 圆柱坐标系

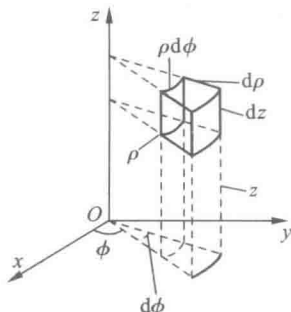


图 1.3.3 圆柱坐标系中的长度元、面积元和体积元

3. 球坐标系

球坐标系的 3 个坐标变量是 r 、 θ 和 ϕ , 它们的变化范围分别是 $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ 。

如图 1.3.4 所示, 在球坐标系中, 过空间中任意一点 M 的单位坐标矢量是 e_r 、 e_θ 和 e_ϕ , 它们分别是 r 、 θ 和 ϕ 增加的方向, 且符合右手螺旋法则, 都是变矢量。

在球坐标系中, 矢量 A 可表示为

$$A = A_r e_r + A_\theta e_\theta + A_\phi e_\phi \quad (1.3.9)$$

其中, A_r 、 A_θ 和 A_ϕ 分别是矢量 A 在 3 个坐标方向上的投影。

球坐标系中的位置矢量为

$$R = r e_r \quad (1.3.10)$$

它的微分元可表示为

$$dR = d(re_r) = e_r dr + e_\theta r d\theta + e_\phi r \sin\theta d\phi \quad (1.3.11)$$

其中, dr 、 $r d\theta$ 和 $r \sin\theta d\phi$ 表示位置矢量沿球坐标方向的 3 个长度微分元, 如图 1.3.5 所示。与单位坐标矢量相垂直的 3 个面积元分别为

$$dS_r = e_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (1.3.12a)$$

$$dS_\theta = e_\theta r \sin\theta dr d\phi \quad (1.3.12b)$$

$$dS_\phi = e_\phi r dr d\theta \quad (1.3.12c)$$

体积元可表示为

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (1.3.13)$$

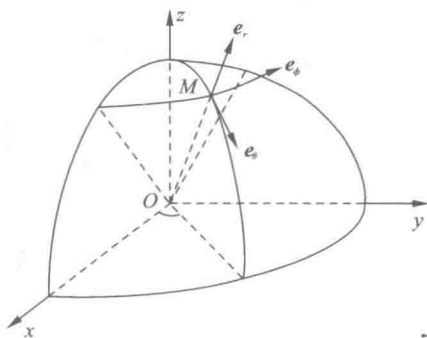


图 1.3.4 球坐标系

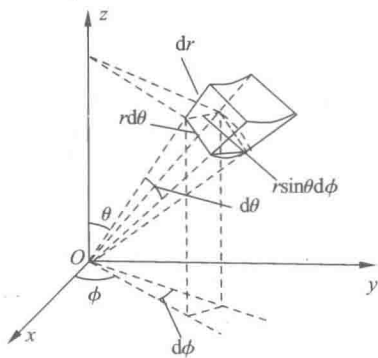


图 1.3.5 球坐标系的长度元、面积元和体积元

1.3.2 三种坐标系之间的相互转换

如图 1.3.6 所示, 在空间中有任意一点 M , 它的直角坐标系的坐标是 (x, y, z) , 圆柱坐标系的坐标是 (ρ, ϕ, z) , 球坐标系的坐标是 (r, θ, ϕ) , 则各坐标之间的关系如下:

(1) 直角坐标系与圆柱坐标系的关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos\phi \\ y = \rho \sin\phi \\ z = z \end{cases} \quad (1.3.14a)$$

或

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases} \quad (1.3.14b)$$

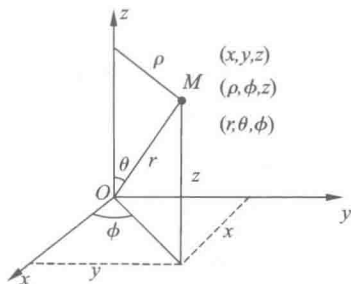


图 1.3.6 三种坐标系相互关系示意图

(2) 直角坐标系与球坐标系的关系为

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.3.15a)$$

或

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \end{cases} \quad (1.3.15b)$$

(3) 圆柱坐标系与球坐标系的关系为

$$\begin{cases} \rho = r \sin \theta \\ \phi = \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.3.16a)$$

或

$$\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \\ \phi = \phi \end{cases} \quad (1.3.16b)$$

同理可得 3 种坐标系的单位坐标矢量间的关系, 如直角坐标系与圆柱坐标系的单位坐标矢量的关系为

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_x \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \phi \\ \mathbf{e}_\phi = -\mathbf{e}_x \sin \phi + \mathbf{e}_y \cos \phi \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (1.3.17a)$$

或

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_\rho \cos \phi - \mathbf{e}_\phi \sin \phi \\ \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_\rho \sin \phi + \mathbf{e}_\phi \cos \phi \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (1.3.17b)$$

1.4 标量场的梯度

1.4.1 方向导数

标量场的等值面只描述了场量 u 的分布状况, 而场中某点的标量沿着各个方向的变化率可能不同, 为此, 引入方向导数来描述标量场的这种变化特性。标量场在某点的方向导数表示标量场自该点沿某一方向上的变化率。

如图 1.4.1 所示, 标量场 u 在点 M 处沿 l 方向上的方向导数定义为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M') - u(M)}{\Delta l} \quad (1.4.1)$$

式中, Δl 为点 M 和 M' 之间的距离。

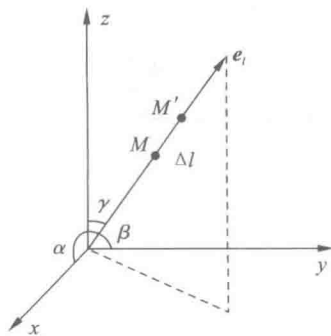


图 1.4.1 标量场的方向导数

在直角坐标系中, 设 l 方向的单位矢量为 $\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_x \cos\alpha + \mathbf{e}_y \cos\beta + \mathbf{e}_z \cos\gamma$, $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ 为 l 的方向余弦, 则方向导数可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \quad (1.4.2)$$

1.4.2 标量场的梯度

在标量场中, 从一个给定点出发有无穷多个方向。一般而言, 标量场在给定点沿不同方向的变化率是不同的。引入标量场梯度的概念来描述标量场在哪个方向变化率最大。

标量场 u 在点 M 处的梯度是一个矢量, 它的方向是沿场量 u 变化率最大的方向, 大小等于其最大的变化率, 并记为 $\text{grad } u$, 即

$$\text{grad } u = \mathbf{e}_l \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{\max} \quad (1.4.3)$$

式中, $\mathbf{e}_l$ 是场量 u 变化率最大方向上的单位矢量。

在直角坐标系中, 标量场 u 沿 l 方向的方向导数可以写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) (\mathbf{e}_x \cos\alpha + \mathbf{e}_y \cos\beta + \mathbf{e}_z \cos\gamma) \\ &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_l |\mathbf{G}| \cos(\mathbf{G}, \mathbf{e}_l) \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

其中, 矢量 $\mathbf{G} = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$, 它是与方向 l 无关的矢量, 只有当方向 l 与矢量 $\mathbf{G}$ 的方向一致时, 式(1.4.4)才取得最大值。

根据梯度的定义, 可得直角坐标系中梯度的表达式为

$$\text{grad } u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.4.5a)$$

圆柱坐标系中梯度的表达式为

$$\text{grad } u = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.4.5b)$$

球坐标系中梯度的表达式为

$$\text{grad } u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (1.4.5c)$$

在矢量分析中, 经常用到哈密顿算符(算子)“ ∇ ”(读作 Del), 在直角坐标系中有

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.4.6)$$

可见, 算符“ ∇ ”兼有矢量和微分的双重作用。在直角坐标系中, 标量场的梯度可用算符“ ∇ ”表示为

$$\text{grad } u = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \nabla u \quad (1.4.7)$$

梯度运算符合下列运算规则(C 为常数, u 、 v 分别为标量场函数):

$$\nabla(Cu) = C\nabla u \quad (1.4.8a)$$

$$\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v \quad (1.4.8b)$$

$$\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v \quad (1.4.8c)$$

$$\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(v\nabla u - u\nabla v)}{v^2} \quad (1.4.8d)$$

$$\nabla f(u) = f'(u) \nabla u \quad (1.4.8e)$$

【例 1.4.1】已知标量场 $u(x, y, z) = xy + yz + 2$, 求该标量场在点 $(1, 1, 0)$ 处的梯度及该点方向导数的最大值和最小值。

解 根据梯度的定义式可得

$$\nabla u = e_x y + e_y (x + z) + e_z y$$

将相应的坐标值代入上式, 得

$$\nabla u = e_x + e_y(1+0) + e_z = e_x + e_y + e_z$$

在该点任意方向的方向导数都是在该点的梯度沿该方向的投影, 而该点梯度的模为 $|\nabla u| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, 所以该点的方向导数的最大值为 $\sqrt{3}$, 最小值为 $-\sqrt{3}$ 。

1.5 矢量场的通量与散度

矢量场在空间中的分布形态多种多样, 为了分析矢量场在空间中的分布规律和场源的关系, 本节介绍矢量场的通量和散度的概念。

1.5.1 矢量场的通量

描述矢量场时, 矢量线可以形象描绘出场的分布, 但它不能定量描述矢量场的大小。在分析矢量场性质的时候, 往往引入矢量场穿过曲面的通量这一重要概念。假设 S 是一个空间曲面, dS 为曲面 S 上的面元, 取一个与此面元相垂直的法向单位矢量 e_n , 则称矢量 $dS = e_n dS$ 为面元矢量。

单位矢量 e_n 的取法有两种: 对开曲面上的面元, 要求围成开曲面的边界走向与 e_n 之间满足右手螺旋法则, 如图 1.5.1 所示; 对闭合面上的面元, e_n 一般取外法线方向。

在矢量场 F 中, 任取一个面元矢量 dS , 因为面元很小, 可认为其上各点的 F 值相同, 则 F 与 dS 的点积为矢量 F 穿过面元矢量 dS 的通量。通量是一个标量。例如, 每秒通过面积 dS 的水流量是水流速度和 dS 的乘积。

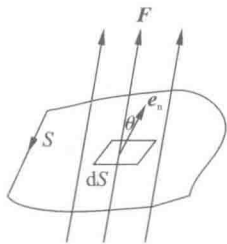


图 1.5.1 矢量场的通量

对于空间开曲面 S , 矢量 F 穿过开曲面 S 的通量定义为

$$\Psi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS = \int_S F \cos\theta dS \quad (1.5.1a)$$

对于空间闭合曲面 S , 矢量 F 穿过闭合曲面 S 的通量定义为

$$\Psi = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS = \oint_S F \cos\theta dS \quad (1.5.1b)$$

其中, θ 是矢量 F 和 e_n 的夹角。由通量的定义可知, 若矢量与面元矢量成锐角, 则通过面积元的通量为正值; 若成钝角, 则通过面积元的通量为负值。

闭合曲面的通量是穿出闭合曲面 S 的正通量与进入闭合曲面 S 的负通量的代数和, 即穿出闭合曲面 S 的净通量。矢量场 F 的通量说明了在一个区域中场与源的一种关系。当通量大于 0 时, 表示穿出闭合曲面 S 的通量多于进入的通量, 此时闭合曲面 S 内必有发出矢

量线的源,称为有正源;当通量小于0时,表示穿出闭合曲面 S 的通量少于进入的通量,此时闭合曲面 S 内必有汇集矢量线的源,称为有负源;当通量为零时,表示穿出闭合曲面 S 的通量等于进入的通量,此时闭合曲面 S 内正通量源和负通量源的代数和为0,称为无源。

1.5.2 矢量场的散度

通量是矢量场在一个大范围面积上的积分量,只能说明场在一个区域中总的情况,而不能说明区域内每点场的性质。为了研究场中任一点矢量场 $\mathbf{F}$ 与源的关系,缩小闭合面,使包含这个点在内的体积元趋于零,并定义如下的极限为矢量场在某点处的散度,记为 $\operatorname{div}\mathbf{F}$,即

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (1.5.2)$$

矢量场的散度可表示为哈密顿算子与矢量 $\mathbf{F}$ 的标量积,即

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (1.5.3)$$

在直角坐标系中

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x F_x + \mathbf{e}_y F_y + \mathbf{e}_z F_z) \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.5.4a)$$

类似地,可推出圆柱坐标系和球坐标系的散度计算式:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.5.4b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \right) \quad (1.5.4c)$$

散度运算符合下列运算规则:

$$\nabla \cdot (k\mathbf{F}) = k(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (1.5.5a)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \pm \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} \pm \nabla \cdot \mathbf{G} \quad (1.5.5b)$$

$$\nabla \cdot (u\mathbf{F}) = u\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla u \quad (1.5.5c)$$

其中, k 为常数, u 为标量函数。

矢量场的散度是标量,它表示在矢量场中给定点单位体积内散发出来的矢量的通量,反映了矢量场在该点的通量源强度。在矢量场某点处,若散度为正,则该点存在发出通量线的正源;若散度为负,则该点存在发出通量线的负源;若散度为零,则该点无源。

1.5.3 散度定理

由散度的定义可知,矢量的散度是矢量场中任意点处单位体积内向外散发出来的通量,将它在某一个体积上作体积分就是该体积内向外散发出来的通量总和,而这个通量显然和从该限定体积 V 的闭合曲面 S 向外散发的净通量是相同的,于是可得

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.5.6)$$

这就是散度定理,也称高斯定理。

[例 1.5.1] 设有一点电荷 q 位于坐标系的原点, 在此电荷产生的电场中任意一点的电位移矢量 $\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r}$, 其中 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, 求该电位移矢量的散度及穿过以原点为球心、 R 为半径的球面的电通量。

解 因为

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r} = \frac{q(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \mathbf{e}_x D_x + \mathbf{e}_y D_y + \mathbf{e}_z D_z \\ D_x &= \frac{qx}{4\pi r^3}, D_y = \frac{qy}{4\pi r^3}, D_z = \frac{qz}{4\pi r^3} \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} &= \frac{q(r^2 - 3x^2)}{4\pi r^5}, \frac{\partial D_y}{\partial y} = \frac{q(r^2 - 3y^2)}{4\pi r^5}, \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{q(r^2 - 3z^2)}{4\pi r^5}\end{aligned}$$

所以

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{q(3r^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2)}{4\pi r^5} = 0$$

电位移矢量的散度在 $r=0$ 以外的空间都为 0, 仅在 $r=0$ 处, 存在点电荷 q 这个场源。以原点为球心、 R 为半径的球面所包含的闭合曲面的单位矢量方向与球面的法线方向一致, 而球面的法线方向与电位移矢量方向一致, 所以要求的电通量是

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi R^2} 4\pi R^2 = q$$

1.6 矢量场的环量与旋度

矢量场的散度描述了通量源的分布情况, 反映了矢量场的一个重要性质。实际中并不是所有的矢量场都由通量源激发, 有些矢量场由旋涡源激发。本节讨论矢量场的环量和旋度。

1.6.1 矢量场的环量

矢量 $\mathbf{F}$ 沿闭合路径 l 的曲线积分

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l F \cos\theta dl \quad (1.6.1)$$

称为矢量场 $\mathbf{F}$ 沿闭合路径 l 的环量(旋涡量)。其中: $d\mathbf{l}$ 是曲线的线元矢量, 大小为 dl , 方向为使其包围的面积在其左侧; θ 是矢量 $\mathbf{F}$ 与线元矢量 $d\mathbf{l}$ 的夹角, 如图 1.6.1 所示。

环量是一个代数量, 它的大小和正负不仅与矢量场的分布有关, 而且与所取的积分环绕方向有关。矢量的环量与矢量穿过闭合曲面的通量一样, 都是描述矢量场性质的重要物理量。根据前面的内容, 如果矢量穿过闭合曲面的通量不为零, 则表示该闭合曲面内有通量源。同样, 如果矢量沿闭合曲线的环量不为零, 则表示闭合曲线内有另一种源, 即旋涡源。

磁场中, 磁场强度在环绕电流的闭合曲线上的环量不为零, 其电流就是产生该磁场的旋涡源。

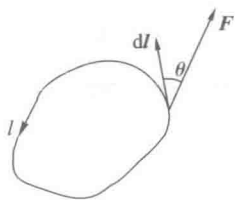


图 1.6.1 有向闭合路径