全国普通高等教育"十二五"规划教材

公共基础课系列

概率论与数理统计

主编　王　清　张西学

Probability and Mathematical Statistics

江苏凤凰科学技术出版社

全国普通高等教育“十二五”规划教材

公共基础课系列

Probability and Mathematical Statistics

概率论与数理统计

主　编　王　清　张西学

副主编　于加东　李海霞　李远伟

赵学良　郑　鹏　宋吾利

主　审　王昌元

江苏凤凰科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 王清等主编. —南京:江苏凤凰科学技术出版社,2014.8

ISBN 978-7-5537-3232-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①王… Ⅲ.①概率论—高等职业教育—教材②数理统计—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 108625 号

概率论与数理统计

主　　编	王　清　张西学
责任编辑	徐祝平
责任校对	郝慧华
责任监制	曹叶平　方　晨
出版发行	凤凰出版传媒股份有限公司 江苏凤凰科学技术出版社
出版社地址	南京市湖南路 1 号 A 楼,邮编:210009
出版社网址	http://www.pspress.cn
经　　销	凤凰出版传媒股份有限公司
照　　排	南京紫藤制版印务中心
印　　刷	江苏凤凰数码印务有限公司
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张	14.25
字　　数	425 000
版　　次	2014 年 8 月第 1 版
印　　次	2014 年 8 月第 1 次印刷
标准书号	ISBN　978-7-5537-3232-9
定　　价	37.00 元

内容简介

本书适用于高等学校应用型本科理、工、医、文、管类培养目标，是针对普通高等学校非数学专业本科应用型教学的基础课程。全书共八章，内容包括随机事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机向量及其分布、数字特征、大数定理和中心极限定理、样本与抽样分布、参数估计、假设检验。各章后选配了适量类型习题，A 类为基本要求，B 类为拔高要求，选取了近 5 年来硕士研究生入学《数学一》《数学三》考试真题，有考研需求的同学可作为考研复习的质量标志和重要参考。复习题是第二阶段（复习阶段）学习的加速器，并在书后附有习题参考答案和部分习题详解。书末给出三个附录、六张附表。附录介绍了加法原理、乘法原理、排列与组合，这是学习古典概型的基础。本书力求使用较少和通俗的高等数学知识，强调概率统计概念的阐释，概率与数理统计思维方式和特点解析，训练解决实际问题的能力，并注意举例的梯度和多样性，举一反三。力求做到易教易学，最终目的是提高同学们对数学学习掌握和应用计算机解决实际问题的能力，同时为同学们考取研究生和进一步的发展打下坚实基础。

概率论与数理统计的理论与方法已广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中，同时又向基础学科、工科等学科渗透，与其他学科相结合发展成为边缘学科，这是概率论与数理统计发展的一个新趋势。

本书可作为高等学校理、工、农、医、经济、管理、文科等专业的概率与数理统计课程的教材，也可作为实际工作者的自学参考。

前　言

概率论与数理统计是研究与揭示随机现象统计规律的一门学科，随着现代科学技术的发展，概率论与数理统计的应用方法也正逐步渗入到自然科学、技术科学以及经济管理等多个领域中。概率论与数理统计在医学、军事、社会科学、工程技术及农业上都得到了广泛的应用，因此在我国各大高校被列为必修课程。

概率论和数理统计都是近代数学的分支，概率论是对随机现象统计规律演绎的研究，数理统计是对随机现象统计规律归纳的研究，两者之间相互渗透、相互关联。针对这两门学科的特点，本书在编排上也大致分成两部分：第一大块为概率论部分，包括随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理五部分；第二大块为数理统计部分，包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验等。

本书由泰山医学院应用数学教研室主任王清主编，参考了国内外最新教材和研究成果，结合 10 多年该课程教育教学和科研成果，且贴近同学们实际需求编写而成。为了帮助读者巩固所学知识，本书在习题的选择上既有基础性的主客观题，也有较为复杂的主观综合应用题，旨在通过课后练习使读者进一步开拓思路、加深理解和掌握各个知识点，提高读者的综合素质和创新能力。

全国硕士入学考试《数学一》《数学三》内容为第一章至第八章前三节。全部完成本课程教学，建议至少 54 学时以上，标 * 的为选学内容，教师可根据不同专业的培养目标有选择性地进行教学。

本书由王昌元教授主审，张西学教授对全书提出了宝贵的意见，参与收集资料的有宋炳晶、刘静如。感谢他们的大力帮助。

因编者水平所限，书中难免存有不足之处，敬请广大读者给予指正。

王　清

目　　录

第一章　随机事件及其概率

概率论是研究随机现象数量规律的学科，是数理统计的理论基础。本章重点介绍概率论的两个最基本概念：随机事件及其概率。主要内容包括：随机实验、样本空间、随机事件的频率与概率、条件概率以及事件的独立性等，并介绍古典概型和几何概型、条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式，这些内容是进一步学习概率论的基础。

第一节　随 机 事 件

一、随机现象

人们发现，苹果熟了一定掉在地上；水在一个标准大气压下，加热到100℃必然沸腾。这类现象，在一定条件下必然发生，称为**确定性现象**。抛掷一枚质地均匀的硬币，结果可能正面向上，也可能反面向上，并且在每次抛掷前无法确定抛掷的结果；明天的天气状况如何等。这类现象，我们事先无法准确知道结果，称为**不确定性现象或随机现象**。

二、随机现象的统计规律性

随机现象具有不确定性，这仅是随机现象的表面。事实上，随机现象在大量的重复观察时，其每种可能的结果出现的频率却具有稳定性。大量重复抛掷质地均匀的硬币，正反面出现的次数比接近 $1:1$。我们把随机现象在大量重复观察时表现的量的规律性称为**随机现象的统计规律性**。**概率论研究的对象是随机现象的统计规律**。

研究随机现象，就需要进行试验。满足下面三个条件的试验称为**随机试验**：

1°　可重复性：试验可在相同条件下重复进行；

2°　可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能的结果；

3°　随机性：进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

为方便起见，随机试验也简称为试验，并常记为 E。

三、样本空间

在随机试验中，其可能出现的结果是明确的，我们把实验的每一个可能的结果称为一个**样本点**，随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，通常用字母 S 或 Ω 表示。

例 1.1.1　E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况。

$$S=\{H,T\}$$

E_2：抛一枚硬币两次，观察正面 H、反面 T 出现的情况。

$$S=\{HH,HT,TH,TT\}$$

E_3：抛一枚硬币三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况。

$$S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$$

或用 1 表示正面，0 表示反面。

$$S=\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$$

E_4：抛一枚硬币三次，观察正面出现的次数。

$$S=\{0,1,2,3\}$$

E_5：在生产线上任意抽取节能灯管一个，测试它的使用寿命。

$$S=\{t\mid 0\leqslant t\}=[0,+\infty)$$

四、随机事件

试验 E 的样本空间 S 的子集称为**随机事件**，又简称为**事件**，习惯上用大写的英文字母 A、B、C 等表示。它们在试验中发生与否，都带有随机性，所以称为随机事件。

样本空间 S 包含了所有的样本点，而随机事件不过是由具有某些特征的样本点组成的，所以从集合论的观点来看，一个随机事件是样本空间 S 的一个子集在试验中，当且仅当事件中所包含的一个样本点出现时，称这一事件发生。

由一个样本点组成的单点集合，称为**基本事件**。

S 由所有样本点组成，因而在任何一次试验中，必然要出现 S 中的某一样本点，也就是在试验中，S 必然会发生，所以又称 S 为**必然事件**。相应地，空集$\varnothing$可以看作是 S 的子集，但$\varnothing$不包含任何样本点，在每次试验中都不可能发生，所以称$\varnothing$是**不可能事件**。为了方便起见，可以把必然事件和不可能事件看作随机事件的两个极端情形。

例 1.1.2 在 E_2 中事件 A："第二次出现的是 H"，

则 $A=\{HH,TH\}$，显然 $A\subset S$。

在 E_3 中事件 B："三次出现同一面"，

则 $B=\{000,111\}$，显然 $B\subset S$。

例 1.1.3 在抛掷一枚骰子的实验中，"向上的点数小于 7"的事件为必然事件 S，"向上的点数大于 7"的事件是不可能事件$\varnothing$。

五、事件之间的关系及其运算

1. 事件的包含 如果事件 A 的发生必然导致事件 B 发生，那么称事件 B 包含事件 A，或事件 A 包含于事件 B，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，如图 1-1。

显然 $\varnothing\subset A\subset S$。

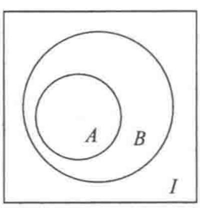


图 1-1

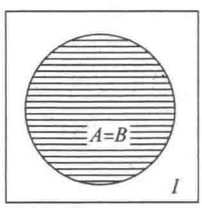


图 1-2

2. 事件的相等 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，那么称事件 A 等于事件 B，记为 $A=B$，如图 1-2。

3. 和事件 如果事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这样的事件称为 A 与 B 的和事件，

简称为和，记为 $A\cup B$ 或 $(A+B)$，$A\cup B=\{x\,|\,x\in A$ 或 $\in B\}$，如图 1-3。

推广：

(1) 有限个：$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生$\}$。

(2) 无穷可列个：$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots=\{A_1,A_2,\cdots$至少有一个发生$\}$。

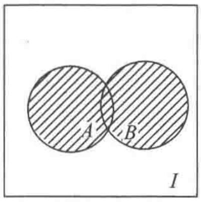


图 1-3

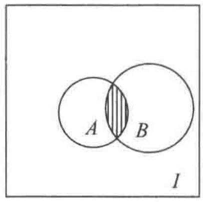


图 1-4

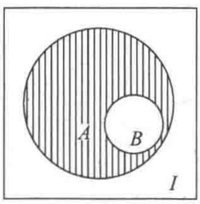
4. 积事件 如果事件 A 与事件 B 同时发生，这样的事件称为 A 与 B 的积事件，简称为积，记为 $A\cap B$ 或 AB，$A\cap B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$，如图 1-4。

推广：

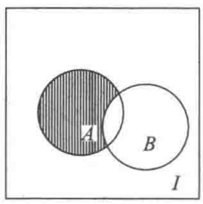
(1) 有限个：$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生$\}$。

(2) 无穷可列个：$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots=\{A_1,A_2,\cdots$同时发生$\}$。

5. 差事件 如果事件 A 发生但事件 B 不发生，这样的事件称为 A 与 B 的差事件，简称为差，记为 $A-B$，$A-B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\notin B\}$，如图 1-5。



(1)



(2)

图 1-5

6. 互不相容 如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，那么称 A 与 B 是互不相容的或互斥的，如图 1-6。注意：基本事件是两两互不相容的。

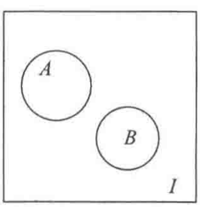


图 1-6

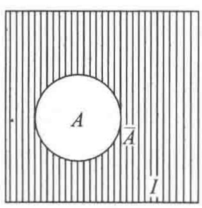


图 1-7

7.对立事件 若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互为**逆事件**或互为**对立事件**，A 的对立事件记为$\overline{A}$，$\overline{A}=S-A$，如图 1-7。

另外，注意：$A-B=A-AB=A\overline{B}$。

在很多场合，用集合论的表达方式表示事件显得简练些，也更容易理解些。但对初学概率论者来说，重要的是要学会用概率论的语言来解释集合间的关系及运算，并能运用它们。事件间的关系及运算与集合间的关系和运算之间的对应关系见表 1－1。

表 1－1　事件间的关系及运算与集合间的关系及运算之间的对应关系

概率论	集合论
样本空间	$S=\{\omega\}$
事件	子集
事件 A 发生	$\omega\in A$
事件 A 不发生	$\omega\notin A$
必然事件	S
不可能事件	$\varnothing$
事件 A 发生导致 B 发生	$A\subset B$
“事件 A 与 B 至少有一个发生”	$A\cup B$
“事件 A 与 B 同时发生”	$A\cap B$
“事件 A 发生而 B 不发生”	$A-B$
事件 A 与 B 互不相容	$AB=\varnothing$

8. 事件的运算规则：

交换律：

$$A\cup B=B\cup A \quad A+B=B+A$$
$$A\cap B=B\cap A \quad AB=BA$$

结合律：

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \quad (AB)C=A(BC)$$

分配律：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A(B+C)=AB+AC$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A+BC=(A+B)(A+C)$$

德·摩根律：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \quad \overline{A+B}=\overline{A}\ \overline{B}$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B} \quad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$$

例 1.1.4　设随机事件 A,B,C 为样本空间 S 的随机事件，用 A,B,C 的运算表示下列事件：

(1) A 发生，而 B 与 C 不发生。

(2) A,B,C 都不发生。

(3) A,B,C 至少有两个发生。

(4) A,B,C 至少有一个发生。

(5) A,B,C 恰好有一个发生。

(6) A,B,C 恰好有两个发生。

解:(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$

(2) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(3) $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$

(4) $A+B+C$

(5) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$

(6) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$

第二节　事件的概率

一、事件的频率

定义 1.2.1　设 A 是一个事件,在相同的条件下,进行了 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**,比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**,记为 $f_n(A)$。具有下列基本性质:

1°　$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

2°　$f_n(S)=1$;

3°　若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两互不相容,则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)。$$

人们经过长期实践发现,虽然随机事件在某次试验或观察中可以出现也可以不出现,但在大量试验中可呈现出明显的规律性——频率稳定性。因此,概率是可以通过频率来“测量”的,或者说频率是概率的一个近似。

如抛掷钱币试验,大量重复实验后,硬币正反面出现的频率接近相等(表1-2)。

表 1-2

试验者	抛币次数 n	“正面向上”次数	频率
De Morgan	2 084	1 061	0.518
Bufen	4 040	2 048	0.506 9
Pearson	12 000	6 019	0.501 6
Pearson	24 000	12 012	0.500 5

二、事件的概率

定义 1.2.2　随机事件 A 发生可能性大小的度量(数值),称为事件 A 发生的**概率**,记作 $P(A)$,且满足:

1°　**非负性**:对于每一事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

2°　**规范性**:对于必然事件 S,有 $P(S)=1$;

3°　**可列可加性**:若事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容,则:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

由概率的公理化定义,可以推导出**概率的七个性质**。

1. 对于不可能事件$\varnothing$,有 $P(\varnothing)=0$。

证明:取 $A_i=\varnothing(i=1,2,3,\cdots)$,显然这是一列两两不相容事件,由定义 1.2.2 的 3°

$$P(\varnothing) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_u) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing)$$

因此 $P(\varnothing)=0$。

2. 有限可加性 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \tag{1.2.1}$$

证明:令 $A_i=\varnothing(i=n+1,n+2,n+3,\cdots)$,由定义 1.2.2 的 3°

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. 若事件 A,B 满足 $A \subset B$,则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A) \tag{1.2.2}$$

且

$$P(B) \geqslant P(A) \tag{1.2.3}$$

证明:由 $A \subset B$,$B=A+(B-A)$ 且 $A(B-A)=\varnothing$,

根据概率的有限可加性[(1.2.1)式]得:

$$P(B) = P(A) + P(B-A)$$

$$P(B-A) = P(B) - P(A) \geqslant 0$$

所以 $P(B) \geqslant P(A)$。

4. 对于任一事件 A,有

$$P(A) \leqslant 1$$

证明:因为 $A \subset S$ 由性质(1.2.3)式

$$P(A) \leqslant P(S) = 1$$

5. 逆事件的概率 对于任一事件 A,有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{1.2.4}$$

证明:因为 $A+\overline{A}=S$,$A\overline{A}=\varnothing$ 由(1.2.1)式,得

$$P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(S) = 1$$

故得证。

6. 加法公式 对于任意的事件 A,B,有

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.2.5}$$

证明:因为 $A+B=A+(B-AB)$,$A(B-AB)=\varnothing$,$AB \subset A$,由性质 2[(1.2.1)式]得

$$P(A+B) = P(A) + P(B-AB)$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

性质 6 称为概率的加法公式。另有

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

推广:

(1) 设 A_1, A_2, A_3 是任意的三个事件,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3) \tag{1.2.6}$$

(2) 对于任意 n 个事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k)\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

7. 减法公式　对任意事件 A,B

$$P(A-B)=P(A)-P(AB) \tag{1.2.7}$$

证明:因为 $A=(A-B)+AB,(A-B)\cap(AB)=\varnothing$

由性质 2[(1.2.1)式]得

$$P(A)=P(A-B)+P(AB)$$

所以 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$。

例 1.2.1　甲、乙两城市在某季节内下雨的概率分别为 0.4 和 0.35,而同时下雨的概率为 0.15,求在此季节内甲、乙两城市中至少有一个城市下雨的概率。

解:令 $A=\{$甲城下雨$\}$,$B=\{$乙城下雨$\}$,按题意所要求的概率是

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.35-0.15=0.6$$

例 1.2.2　已知 $P(A)=0.4,P(B)=0.25,P(A-B)=0.25$

求:(1) $P(AB)$;(2) $P(A+B)$;(3) $P(B-A)$;(4) $P(\overline{A}\,\overline{B})$。

解:(1) 由 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$得

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)-P(A-B)\\&=0.4-0.25\\&=0.15\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}P(A+B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.4+0.25-0.15\\&=0.5\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}P(B-A)&=P(B)-P(AB)\\&=0.25-0.15\\&=0.1\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})&=1-P(A+B)\\&=1-0.5\\&=0.5\end{aligned}$$

第三节　等可能概型(古典概型)

一、等可能概型

试验 E_3:抛一枚硬币三次,观察正面 H、反面 T 出现的情况。

$$S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$$

有以下两个特点:

1°　试验的样本空间只含有有限个样本点;

2°　试验中每个基本事件发生的可能性相同。

这样的试验称为等可能概型(古典概型)。

设古典概率 E 的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同,即 $P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})$。又由于基本事件是两两互不相容的,于是

$$\begin{aligned}1=P(S)&=P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\})\\&=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\})=nP(\{e_i\})\end{aligned}$$

所以 $P(\{e_i\})=\dfrac{1}{n},i=1,2,\cdots,n$。

若事件 A 包含 k 个基本事件,即

$$A=\{e_{i1}\}\cup\{e_{i2}\}\cup\cdots\cup\{e_{ik}\}$$

则有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\{e_{i1}\})+P(\{e_{i2}\})+\cdots+P(\{e_{ik}\})\\&=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中的基本事件总数}}\end{aligned}$$

所以求古典概型的概率的基本步骤:

(1) 算出所有基本事件的个数 n。

(2) 求出事件 A 包含的所有基本事件数 k。

(3) 代入公式 $P(A)=\dfrac{k}{n}$,求出 $P(A)$。

例 1.3.1 设 10 个产品中有 3 个是次品,今从中任取 3 个,试求取出产品中至少有一个是次品的概率。

解:令 $A=$\{取出 3 个产品中至少有一个是次品\},则 $\overline{A}=$\{取出产品中皆为正品\},得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$$

例 1.3.2 从 9 件正品、3 件次品的箱中任取样品 2 次,每次取一件。试分别以有放回抽样(即每次所抽的产品观察后放回)和不放回抽样(即每次所抽的产品观察后不放回)两种抽样方式,求下列事件的概率:

A 表示“取得两件正品”。

B 表示“第一次取得件正品,第二次取得次品”。

C 表示“取得一件正品,一件次品”。

解:显然 12 件产品任取 2 件的一种取法为一个基本事件

(1) 在有放回情况下:样本空间所含基本事件总数为 12^2

A 包含基本事件总数 9×9

$$P(A)=\frac{9^2}{12^2}=\frac{9}{16}$$

B 包含的基本事件总数为 9×3

$$P(B)=\frac{9\times3}{12^2}=\frac{3}{16}$$

C 包含的基本事件总数为 $9\times3+3\times9$

$$P(C)=\frac{9\times6}{12^2}=\frac{3}{8}$$

(2) 在不放回情况下：样本空间所含基本事件总数为 12×11

A 包含的基本事件总数为 $9\times8=72$

$$P(A)=\frac{9\times8}{12\times11}=\frac{6}{11}$$

B 包含的基本事件总数为 $9\times3=27$

$$P(B)=\frac{9\times3}{12\times11}=\frac{9}{44}$$

C 包含的基本事件总数为 $9\times3+3\times9=54$

$$P(C)=\frac{9\times6}{12\times11}=\frac{9}{22}$$

例 1.3.3　有 5 双不同型号的鞋子，从中任取 4 只。求下列事件的概率：

(1) 取出的 4 只鞋恰好为 2 双；

(2) 取出的 4 只鞋都是不同型号的；

(3) 取出的 4 只鞋恰好有两只配成一双。

解：设 A＝"取出的 4 只鞋恰好为 2 双"

B＝"取出的 4 只鞋都是不同型号的"

C＝"取出的 4 只鞋恰好有两只配成一双"

从 5 双鞋子(10 只)中任取 4 只，取法总数为 C_{10}^4。

A 中包含基本事件数为 C_5^2。

B 中包含基本事件数为 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$。

C 中包含基本事件数为 $C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1$。

于是

(1) $P(A)=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^4}=\dfrac{\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}}{\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{1}{20}$。

(2) $P(B)=\dfrac{C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{21}$。

(3) $P(C)=\dfrac{C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\dfrac{4}{7}$。

例 1.3.4　某酒店在某一周曾接待过 12 次来访，已知所有这 12 次接待都是在周一和周四进行的，问是否可以推断接待时间是有规定的？

解：假设酒店的接待时间没有规定，而各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的，则 A 表示 12 次来访在周一和周四事件的概率为

$$P(A)=\frac{2^{12}}{7^{12}}=3.0\times10^{-7}$$

一般的，概率小于 5%的事件为**小概率事件**。实际中，小概率事件在一次试验中几乎不发生(**实际推断原理**)。由反证法可以推断接待时间是有规定的。

二、几何概型

简单地说，如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度(面积或体积或度数)