

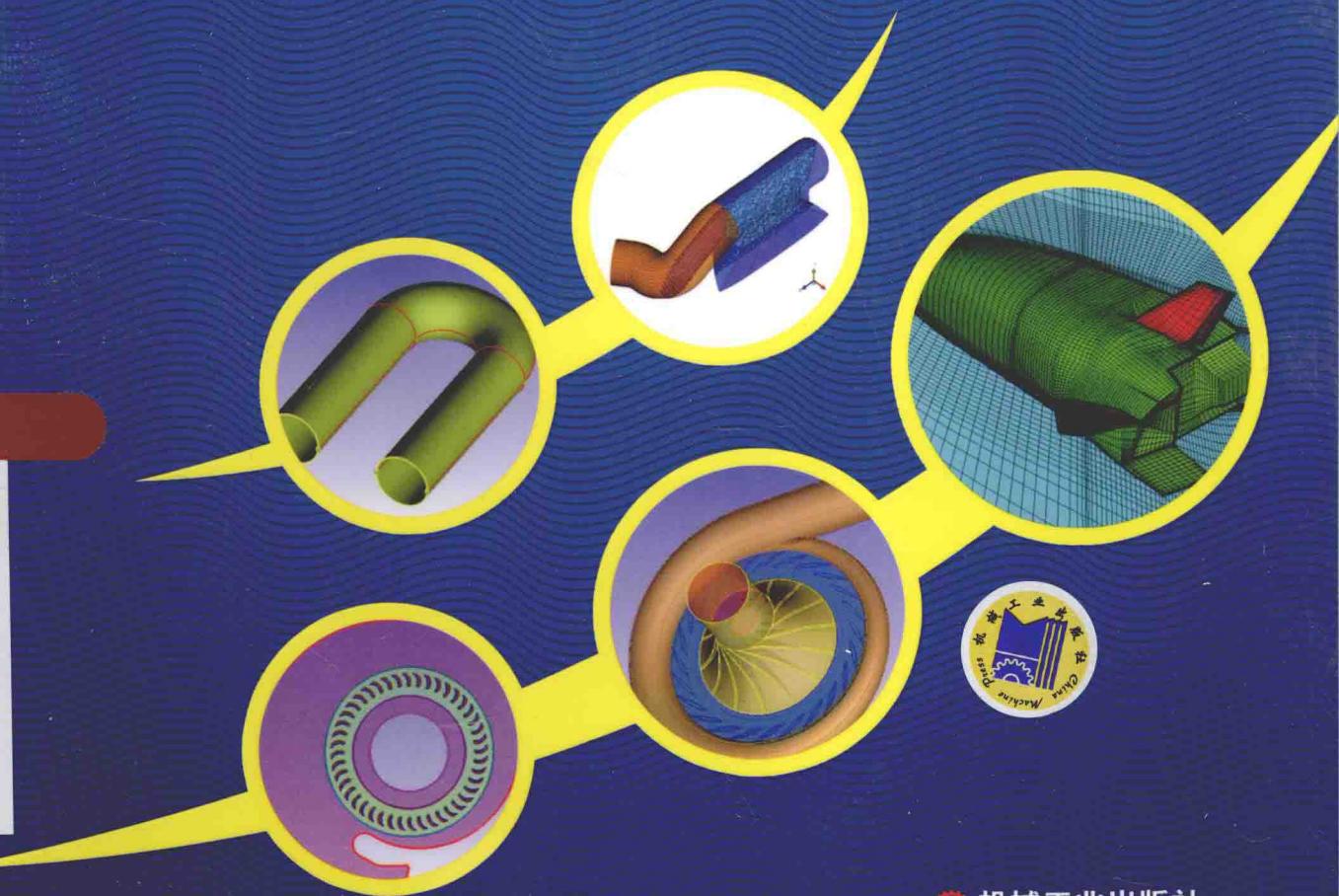
ANSYS ICEM CFD

基础教程与实例详解

JICHU JIAOCHENG YU SHILI XIANGJIE

(附光盘)

纪兵兵 张晓霞 古艳 ◎编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

ANSYS ICEM CFD 基础 教程与实例详解

(附光盘)

纪兵兵 张晓霞 古 艳 编著



机械工业出版社

本书通过大量实例系统地介绍了 ANSYS ICEM CFD 建模和生成网格的详细过程，其工程背景深厚、内容丰富、讲解详细，内容安排深入浅出。

全书共 12 章，其中第 1 章概要介绍计算流体力学和网格生成的基本知识，第 2 章简单介绍 ANSYS ICEM CFD，第 3~4 章介绍非结构网格生成方法，第 5~6 章介绍结构网格生成方法，第 7 章介绍结构网格 Block 的创建策略，第 8 章介绍节点设置的方法和原则，第 9 章介绍几何、块和网格的基本操作，第 10 章介绍网格质量的判断和提高，第 11 章是 ICEM 常见问题汇总及解决方法，第 12 章介绍 ICEM 二次开发的相关内容。网格生成与数值计算密不可分，本书采用 FLUENT 作为求解器（第 12 章中以 CFX 为求解器），通过数值计算检验生成网格的正确性。

本书在写作过程中注重层次递进，既介绍了网格生成基本原理，又详细介绍了 ICEM 生成网格操作。通过大量丰富、贴近工程的应用案例讲解 ANSYS ICEM CFD 的应用，对解决实际工程和科研问题会有很大帮助。此外，为方便读者学习，本书还配套了模型文件和教学视频，以提高读者的学习效率。

本书既可作为高等院校航空、航天、能源、环境、建筑、流体工程等相关专业本科生和研究生的教学参考书，也可作为计算流体力学从业人员的指导书籍。

图书在版编目 (CIP) 数据

ANSYS ICEM CFD 基础教程与实例详解/纪兵兵，张晓霞，古艳编著. —北京：机械工业出版社，2015.9
ISBN 978 - 7 - 111 - 51300 - 1

I. ①A… II. ①纪…②张…③古… III. ①有限元分析 - 应用软件 IV. ①0241.82 - 39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 195969 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：刘 涛 责任编辑：刘 涛

版式设计：赵颖喆 责任校对：李锦莉 任秀丽

封面设计：马精明 责任印制：乔 宇

北京京丰印刷厂印刷

2015 年 10 月第 1 版 · 第 1 次印刷

184mm × 260mm · 20.75 印张 · 512 千字

标准书号：ISBN 978 - 7 - 111 - 51300 - 1

ISBN 978 - 7 - 89405 - 872 - 0 (光盘)

定价：59.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线：010-88361066

机工官网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-68326294

机工官博：weibo.com/cmp1952

010-88379203

金书网：www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版

教育服务网：www.cmpedu.com



前言

计算流体力学（Computational Fluid Dynamics，CFD）是一门发展迅猛的学科，其采用数值计算方法，通过计算机求解流体运动控制方程组，研究流体运动规律。计算流体力学建立在经典流体动力学与数值计算方法基础上，通过计算机数值计算和图像显示的方法，在时间和空间上定量描述流场的数值解，从而达到对物理问题进行研究的目的，广泛应用于航空、航天、能源、水利、环境、建筑和材料等工业领域。

网格生成是计算流体力学数值计算中的重要一环。工程计算多采用成熟的程序或商业软件作为求解器，因此大部分数值计算工作是由计算机完成的，网格生成工作约占整个项目周期的 80% ~ 95%，生成一套高质量网格将显著提高计算精度和收敛速度。

目前，比较成熟的网格生成软件有 ANSYS ICEM CFD、GAMBIT、Gridgen、GridPro 等。ANSYS ICEM CFD 因其友好的操作界面、丰富的几何接口、完善的几何功能、灵活的拓扑创建、先进的 O 型网格技术、丰富的求解器接口等优势，越来越被业内人士所认可。ANSYS ICEM CFD 作为一款强大的前处理软件，不仅可以为世界上几乎所有主流 CFD 软件（如 FLUENT、CFX、STAR-CD、STAR-CCM+）提供高质量网格，还可用于完成多种 CAE（Computer Aided Engineering，计算机辅助工程）软件（ANSYS、Nastran、Abaqus 等）的前处理工作。

全书内容共 12 章，其中第 1 章概要介绍计算流体力学和网格生成的基本知识，第 2 章简单介绍 ANSYS ICEM CFD，第 3 ~ 4 章介绍非结构网格生成方法，第 5 ~ 6 章介绍结构网格生成方法，第 7 章介绍结构网格 Block 的创建策略，第 8 章介绍节点设置的方法和原则，第 9 章介绍几何、块和网格的基本操作，第 10 章介绍提高网格质量的判断和提高，第 11 章是 ICEM 常见问题汇总及解决方法，第 12 章介绍 ICEM 二次开发的相关内容。网格生成与数值计算密不可分，本书采用 FLUENT 作为求解器（第 12 章中以 CFX 为求解器），通过数值计算检验生成网格的正确性。

读者对象

本书适用于航空、航天、能源、环境、建筑、流体工程等相关专业的本科生、研究生和工程技术人员，并可作为学习掌握 ANSYS ICEM CFD 的参考用书。

本书特色

- 由浅入深——在内容的安排上，层次分明，首先讲解网格生成原理，再通过具体实例讲解非结构网格和结构网格，然后着重介绍结构网格的一些关键问题，对常见问题进行汇总并给出解决方法，最后简要介绍二次开发的相关内容。

- ◆ 贴近工程实际——本书的实例多从实际工程和科研项目中提炼出来，具有很强的参考价值，其中包括离心压气机、管内蝶阀、壳管换热器、潜艇绕流、凝固、混合管、气膜冷却、弯管流动、汽车外流、多孔介质、引射器、机翼绕流和三维溃坝等问题。
- ◆ 常见问题汇总——本书收集了学习 ANSYS ICEM CFD 的常见问题，并给出解决方案。
- ◆ 插图标示详细——ICEM 是一款操作性很强的软件，本书在插图上标示了所有的操作及顺序，便于读者练习操作。
- ◆ 视频教学——ICEM 是一款操作性很强的软件，本书不仅配备了所有的模型文件，而且还录制了多媒体教学视频，这样学习起来更加轻松，并且效率更高。

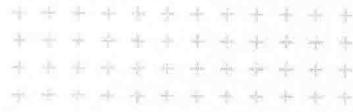
致谢

本书在成书过程中承蒙南京航空航天大学张大林教授的支持，并给予了诸多指导，在此深表感谢；感谢中国运载火箭技术研究院闫长海研究员在本书成书过程中给予的帮助；感谢 SIMWE 仿真论坛和流体中文网各位热心网友；最后感谢家人的理解与支持。本书的创作得到了机械工业出版社的大力支持，使得本书能够在第一时间面向读者。

由于作者水平有限，书中纰漏之处难免，敬请广大读者批评指正。

编 者

目 录



前言

第1章 计算流体力学与网格概述	1
1.1 计算流体力学概述	1
1.2 非结构网格概述	3
1.3 结构网格生成方法	4
1.3.1 代数方法	5
1.3.2 椭圆形微分方程方法	6
1.3.3 Thomas&Middlecoff 方法生成网格	7
本章小结	13

第2章 ANSYS ICEM CFD

基础	14
2.1 认识 ANSYS ICEM CFD	14
2.1.1 ANSYS ICEM CFD 的特点	14
2.1.2 ICEM 14.0 的新特征	17
2.1.3 ICEM 文件类型	18
2.2 ICEM 操作界面	19
2.2.1 菜单栏	19
2.2.2 工具栏	23
2.2.3 标签栏	23
2.2.4 模型树	26
2.2.5 选择工具栏	27
2.2.6 其他窗口	28
2.3 ICEM 基础知识	28
2.3.1 鼠标和键盘的基本操作	28
2.3.2 ICEM 基础词汇	29
2.3.3 ICEM 常用设置和工具	30
2.3.4 ICEM 网格生成流程	31
本章小结	31

第3章 非结构壳/面网格生成及实例

3.1 壳/面网格概述	32
3.1.1 壳/面网格类型	32
3.1.2 壳/面网格生成方法	33

3.1.3 网格尺寸	33
3.1.4 壳/面网格生成流程	34
3.2 非结构壳/面网格生成实例 1——周期性流动和传热	
3.2.1 问题描述与分析	34
3.2.2 生成几何模型	35
3.2.3 定义网格参数	40
3.2.4 导出网格	43
3.2.5 数值计算及后处理	46
3.3 非结构壳/面网格生成实例 2——离心压气机	
3.3.1 问题描述与分析	49
3.3.2 生成几何模型	49
3.3.3 定义网格参数	58
3.3.4 导出网格	60
3.3.5 数值计算及后处理	62
3.4 非结构壳/面网格生成实例 3——潜艇	
3.4.1 问题描述与分析	67
3.4.2 修改几何模型	68
3.4.3 定义网格参数	78
3.4.4 生成网格	83
本章小结	84
第4章 非结构体网格生成及实例	
4.1 非结构体网格概述	85
4.1.1 非结构体网格类型	85
4.1.2 自动体网格生成方法	86
4.1.3 自动体网格生成流程	87
4.2 非结构体网格生成实例 1——蝶阀	
4.2.1 问题描述与分析	87
4.2.2 修改几何文件	88
4.2.3 定义网格参数	89

4.2.4 生成网格	93
4.2.5 数值计算及后处理	94
4.3 非结构体网格生成实例 2——换热器	
4.3.1 问题描述与分析	96
4.3.2 创建几何模型	97
4.3.3 定义网格参数	108
4.3.4 生成网格	110
4.3.5 数值计算及后处理	113
4.4 非结构体网格生成实例 3——潜艇	
4.4.1 问题描述与分析	115
4.4.2 定义网格参数	115
4.4.3 生成网格	120
4.4.4 数值计算及后处理	122
本章小结	123
第 5 章 二维结构网格生成及实例	124
5.1 结构网格生成流程	124
5.2 二维结构网格生成实例 1——凝固	
5.2.1 问题描述与分析	125
5.2.2 创建几何模型	125
5.2.3 创建 Block	129
5.2.4 建立映射关系	132
5.2.5 生成网格	134
5.2.6 数值计算及后处理	137
5.3 二维结构网格生成实例 2——流动传热	
5.3.1 问题描述与分析	140
5.3.2 创建几何模型	141
5.3.3 创建 Block	147
5.3.4 建立映射关系	150
5.3.5 生成网格	153
5.3.6 数值计算及后处理	156
5.4 二维结构网格生成实例 3——气膜冷却	
5.4.1 问题描述与分析	158
5.4.2 创建几何模型	159
5.4.3 创建 Block	163
5.4.4 建立映射关系	166
5.4.5 生成网格	171
5.4.6 数值计算及后处理	173

本章小结	176
第 6 章 三维结构网格生成及实例	177
6.1 三维结构网格生成流程概述	177
6.2 三维结构网格生成实例 1——弯管流动	
6.2.1 问题描述与分析	178
6.2.2 修改几何模型	178
6.2.3 创建 Block	181
6.2.4 建立映射关系	183
6.2.5 生成网格	188
6.2.6 数值计算及后处理	191
6.3 三维结构网格生成实例 2——汽车外流	
6.3.1 问题描述与分析	193
6.3.2 修改几何模型	193
6.3.3 创建 Block	198
6.3.4 建立映射关系	206
6.3.5 生成网格	206
6.3.6 数值计算及后处理	210
6.4 三维结构网格生成实例 3——多孔介质	
6.4.1 问题描述与分析	213
6.4.2 修改几何模型	213
6.4.3 创建 Block	214
6.4.4 生成网格	220
6.4.5 数值计算及后处理	222
本章小结	225
第 7 章 Block 创建策略	226
7.1 自下而上生成 Block 的方法	
7.1.1 自下而上创建 Block 实例	226
7.1.2 其他自下而上生成 Block 的方法	230
7.2 O-Block	
7.2.1 O-Block 概述	234
7.2.2 ICEM 创建 O-Block 的方法	235
7.2.3 应用案例 1——O-Block 的嵌套	238
7.2.4 应用案例 2——C-Block	243
7.2.5 应用案例 3——Y-Block	245
7.3 Block 的坍塌	248
本章小结	251
第 8 章 节点设置	252

8.1 ICEM 节点设置	252
8.1.1 节点参数	252
8.1.2 节点过渡	255
8.1.3 粗化/细化网格	255
8.1.4 Mesh Law 简介	256
8.2 边界层网格概述	258
8.3 边界层网格对计算结果的 影响	261
8.3.1 实例 1——引射器	261
8.3.2 实例 2——翼型绕流	265
本章小结	266
第 9 章 几何、块和网格的基本 操作	267
9.1 基本操作	267
9.1.1 平移	267
9.1.2 旋转	268
9.1.3 镜像	269
9.1.4 缩放	270
9.2 镜像操作练习	271
9.3 旋转操作练习	274
本章小结	277
第 10 章 网格质量判断与提高	278
10.1 ICEM 判断网格质量的标准	278
10.2 调整网格质量	280
10.3 提高网格质量练习	281
本章小结	288
第 11 章 ICEM 常见问题详解	289
11.1 二维结构网格的要求	289
11.2 计算域内体现低维度元素	290
11.3 多域网格	292
11.3.1 交界面为 Interior 的多域 网格	292
11.3.2 交界面为 Interface 的多 域网格	295
11.4 创建周期性网格	300
11.5 恢复删除的 Block	303
11.6 ICEM 在 CFX 中的应用	305
11.6.1 问题分析	305
11.6.2 生成网格	306
11.6.3 数值计算	306
本章小结	312
第 12 章 ICEM 二次开发	313
12.1 二次开发概述	313
12.2 ICEM 二次开发实例	314
12.2.1 问题描述与分析	314
12.2.2 生成几何模型	315
12.2.3 创建 Block	316
12.2.4 建立映射关系	319
12.2.5 生成网格	320
12.2.6 C++ 调用 RPL 文件	321
本章小结	322
参考文献	323



第1章

计算流体力学与网格概述

本章简要介绍计算流体力学与网格的相关知识。通过学习本章，读者将对计算流体力学的起源、发展以及应用有所了解，对网格的生成原理有清晰的认识。深刻体会网格生成思路和方法，一定会使读者在学习 ANSYS ICEM CFD 的过程中事半功倍。

知识要点：

- 计算流体力学概述
- 结构网格生成原理
- 非结构网格概述
- ICEM 生成结构网格的方法

1.1 计算流体力学概述

流体力学根据研究方法的不同主要分为三类：实验流体力学、理论流体力学和计算流体力学。17世纪，英国和法国奠定了实验流体力学基础；18和19世纪，理论流体力学逐渐在欧洲发展起来；计算流体力学基本概念的提出可以追溯到20世纪初，它是在航空航天工业的推动下，在偏微分方程理论、数值计算方法、网格生成方法和计算机科学等相关学科的影响下发展而来的新兴学科。

计算流体力学是以流体力学为基础，以数值计算为工具，通过求解三大控制方程（即连续性方程、动量方程以及能量方程）及附加方程来获得相关参数，对流动问题进行分析的方法。

相比较实验流体力学和理论流体力学，以飞行器设计为例，计算流体力学的主要优点如下。

- 1) 费用低、周期短，成本低。
- 2) 实验受风洞以及实验条件的限制，只能使用较小模型在一定马赫数范围内进行，而计算流体力学可以在较为宽广的范围内考察整机性能。
- 3) 考察流动的细微结构以及发展过程。
- 4) 模拟多种重要状态，如黏性效应、化学反应和非平衡状态等。
- 5) 限制假设少，应用范围广，可以模拟复杂流场。

计算流体力学既是一种研究工具，可以用来帮助解释某些物理实验和理论分析结果，甚至确定实验数据和分析过程不能明确解释的物理现象；同时还可以作为一种工程工具，广泛应用于航空、航天、船舶、车辆、发动机、化学、桥梁、制冷、工业设计、城市规划设计、环境工程和建筑等领域。

使用商业软件进行工程计算的基本流程如图 1-1 所示，包括：

- 1) 分析待求解问题。
- 2) 确定计算域，修改和简化几何模型。
- 3) 生成网格，离散计算域。
- 4) 选择合适的求解模型并设定边界条件。
- 5) 开展计算。
- 6) 判断计算结果是否准确可信，若结果不可信，则重复 3)、4) 两步。若结果可信，开展后续工作。
- 7) 后处理。

上述流程中 6) 关系到计算结果的可信度，是非常重要的一环，将在后续章节中详细讲解相关内容。

“Grid generation is , unfortunately from a technology standpoint , still something of an art, as well as a science.”^[1]——Bharat K. Soni。网格生成不仅仅是一种技术，从某种意义来说也是一门艺术和科学。

网格，是在计算区域内一系列的离散点。计算流体力学通过离散控制方程，使用数值方法得到网格节点上的数据（如速度、温度和压力等），即数值解。控制方程的离散方法主要包括有限控制体积法、有限差分法和有限单元法。

当前商用计算流体力学求解器多采用有限控制体积法，如 FLUENT、CFX 等。对具体问题进行计算前，首先就要针对计算区域在空间上完成网格划分，生成数值计算用网格的方法称为网格生成技术。由于工程中所遇到的流动问题多发生在复杂区域内，因此不规则区域内的网格生成方法非常重要。自 1979 年 Thomson 等三人提出贴体坐标网格的生成方法以来，网格生成技术在计算流体力学中的重要性日益为人们所认识，如今网格生成技术已经成为计算流体力学的重要分支之一。图 1-2 为航天器外流场网格示意图，图 1-3 为汽车内流场网格示意图。

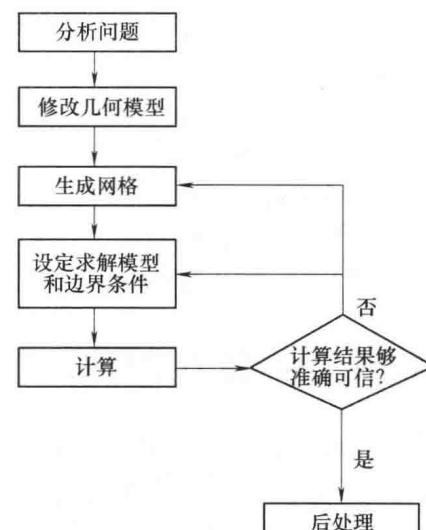


图 1-1 工程计算基本流程

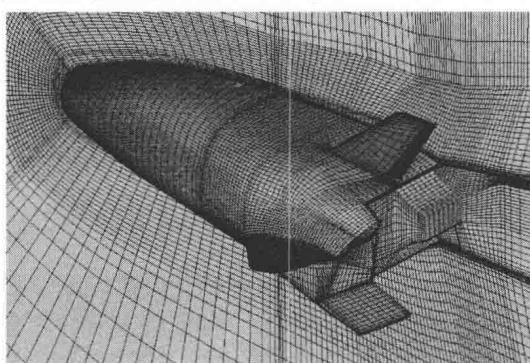


图 1-2 航天器外流场网格

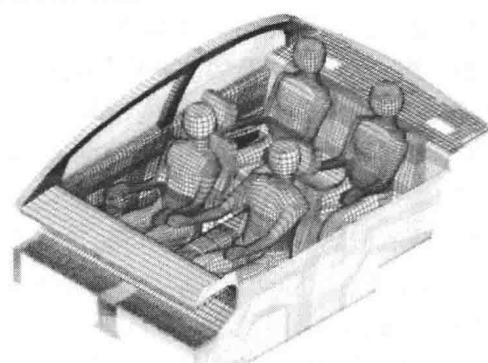


图 1-3 汽车内流场网格

工程计算多以成熟的商业软件作为求解器，因此大部分数值计算工作是由计算机完成的。生成网格耗费时间占整个项目周期的 80% ~ 95%。高质量的网格将显著提高计算精度和收敛速度，缩短项目周期，节约项目成本。

网格按存储方式可以分为结构网格和非结构网格。结构网格可以用固定的法则予以命名和存储，图 1-4 为结构网格示意， i 、 j 为节点编号方向，该网格中所有节点均可用 i 、 j 的编号来表示，如小圆中的节点可以表示为 i_4j_5 。与结构化网格不同，非结构化网格的节点位置不能用一个固定的法则予以有序的命名，如图 1-5 所示。

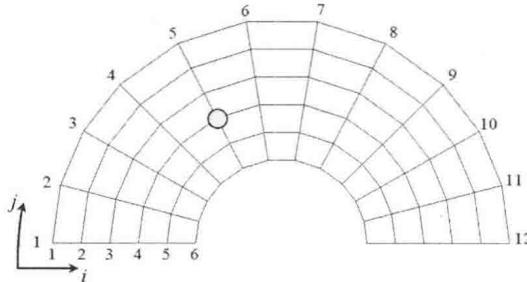


图 1-4 结构网格示意

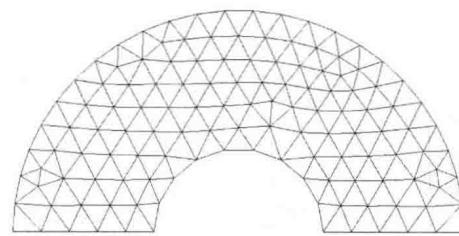


图 1-5 非结构网格示意

对于复杂的工程问题，生成结构网格的工作量较大，但计算量小，可以较好地控制网格质量，同时保证边界层网格，计算速度快，更易收敛；非结构网格对复杂模型的自适应性好，工作量小，但计算量大，对计算机要求较高，网格质量不易控制，边界层网格不好保证。

1.2 非结构网格概述

由于结构网格生成方法的限制，使其不能够解决任意形状和任意连通区域的网格划分，针对这一问题，20 世纪 60 年代提出了非结构网格手段。非结构网格对几何模型的适应性好，可以对复杂区域划分网格。

非结构网格生成方法主要有以下三种^[6]。

(1) 四叉树（二维）/八叉树（三维）方法

该方法的基本思想是先用一个较粗的矩形（二维）/立方体（三维）网格覆盖或包含物体的整个计算域，然后按照网格尺度的要求不断细分矩形（立方体），即将一个矩形分为四（八）个子矩形（立方体），最后将各矩形（立方体）划分为三角形（四面体）。

四叉树/八叉树方法是直接将矩形/立方体划分为三角形/四面体，由于不涉及邻近点面的查询以及邻近单元间的相交性和相容性判断问题，所以网格生成速度很快。不足之处是网格质量较差，特别是在流场边界附近，被切割的矩形/立方体可能千奇百怪，由此划分的三角形/四面体网格质量也很难保证。

(2) Delaunay 方法

Delaunay 方法的依据是 Dirichlet 在 1850 年提出的一种利用已知点集将已知平面划分为凸多边形的理论。该理论的基本思想是，假设平面内存在点集，则能将此平面域划分为互不重合的 Dirichlet 子域，每个 Dirichlet 子域内包含点集中的一点，而且对应于该域的包含点，即构成唯一的 Delaunay 三角形网格。将上述 Dirichlet 的思想简化为 Delaunay 准则，即

每个三角形的外接圆内不存在除自身三个角点外的其他点，进而给出划分三角形的简化方法：给定一个人工构造的简单初始三角形网格系，引入一个新点，标记并删除初始网格系中不满足 Delaunay 准则的三角形单元，形成一个多边形空洞，连接新点与多边形的顶点构成新的 Delaunay 网格系。重复上述过程直至达到预期的分布。

Delaunay 方法的一个显著优点就是它能使给点集构成的网格体系中每一个三角形单元最小角尽可能大，使得尽可能得到等边的高质量三角形单元。另外，Delaunay 方法在插入新点的同时生成几个单元，因此网格生成效率高，并且可以直接推广到三维问题。

Delaunay 的不足之处在于它可能构成非凸域流场边界以外的单元或与边界正交，即不能保证流场边界的完整性。为了实现任意形状非结构网格的生成，必须对流场附近的操作做某些限制，这可能使得边界附近的网格丧失 Delaunay 性质。同时对于三维复杂外形，对边界网格要求较高。

(3) 阵面推进法

阵面推进法的基本思想是首先将流场边界划分为小的阵元，构成初始阵面，然后选定某一阵面，组成新的阵面，这一阵面不断向流场中推进，直至整个流场被非结构网格覆盖。

阵面推进法也有其自身的优点和缺点。首先，阵面推进法的初始面即为流场边界，推进过程即阵面不断向流场内收缩的过程，所以不存在保证边界完整性的问题；其次，阵面推进是一个局部过程，相交性判断仅涉及局部临近的单元，因而减少了由于计算机截断误差导致推进失败的可能，而且局部性使得执行过程可以在推进的任意中间状态重新开始；再者，在流场内引入新点是伴随推进过程自动完成的，因而易于控制网格步长分布，但是每推进一步，仅生成一个单元，因此阵面推进法的效率较其他非结构网格生成方法效率要低。推进效率低的另一个原因是在每一步推进过程中，都涉及邻近点、邻近阵元的搜索以及正交性判断；另外，尽管阵面推进法的思想可以直接推广到三维问题，但在三维情况下，阵面的形状可能非常复杂，相交性判断也就变得更加繁琐。

ANSYS ICEM CFD 中非结构网格生成方法包括四叉树/八叉树方法、Delaunay 方法以及其他网格生成方法，详细内容可以参考第 4 章。

1.3 结构网格生成方法^[2]

本节讲解的重点是结构网格生成方法。结构网格生成方法主要有代数生成方法和偏微分方程生成方法。本节将以钝头体外流场网格生成为例（其形状如图 1-6 所示），主要介绍几种比较典型的结构网格生成方法。

结构网格的生成过程就是计算平面到几何平面的坐标映射过程。如图 1-7 所示，矩形即为计算平面，钝头体外流场即为几何平面。计算平面可以体现节点编号，如点 1 可以编号为 $i'_j'_l'$ ；几何平面可以体现节点坐标。计算平面的点 $1'、2'、3'、4'$ 和几何平面的点 $1、2、3、4$ 一一对应，各条边一一对应。如 $1'_3$ 上有均匀分布的节点 $5'、6'$ ，则 1_3 上也应有均匀分布的 5、6 与之相对

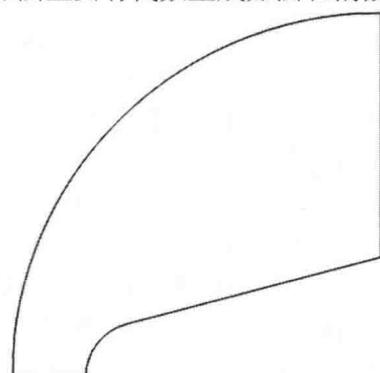


图 1-6 钝头体外流场

应。

边界上的节点坐标确定后，可以采用不同的方法得到内部节点坐标。代数生成方法就是通过代数差值来求得内部节点坐标，而偏微分方程生成方法则是通过求解一定形式的偏微分方程求得内部节点坐标。

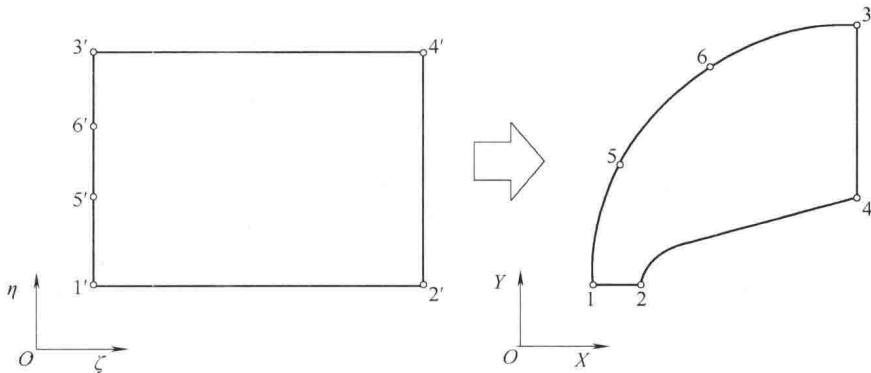


图 1-7 结构网格生成过程

1.3.1 代数方法

代数生成方法是利用已知边界值通过差值获得计算网格的方法。“超限差值”由于使用方便，对简单区域可以获得较好的网格，对于复杂区域还可以预置网格（即作为使用偏微分方程生成网格的初始条件）。下面介绍二维双线性超限差值的方法。

在任意坐标下，计算区域内网格点的坐标表示为 $\vec{r}(\zeta, \eta)$ ，在已知边界点分布的情况下如图 1-8 所示，插值得到的网格点为

$$\vec{r} = \vec{r}_\zeta + \vec{r}_\eta - \vec{r}_{\zeta\eta} \quad (1-1)$$

式中， \vec{r}_ζ 为 ζ 方向插值函数， \vec{r}_η 为 η 方向插值函数， $\vec{r}_{\zeta\eta}$ 为修正差值函数。

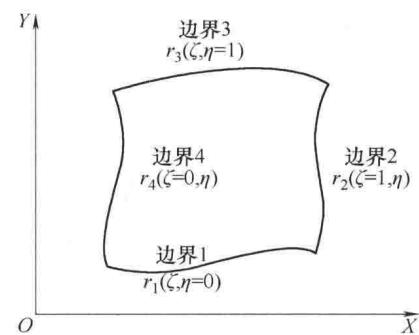


图 1-8 计算网格二维区域示意图

对于 \vec{r}_ζ 有

$$\vec{r}_\zeta = \sum_{n=1}^N \phi_n \left(\frac{\xi}{I} \right) \vec{r}_n \quad (1-2)$$

式中， \vec{r}_n 为型函数，具体可以为 Lagrange 多项式

$$\phi_n \left(\frac{\xi}{I} \right) = \prod_{l=1}^N \frac{\xi - \xi_l}{\xi_n - \xi_l} \quad (l \neq n) \quad (1-3)$$

仿此可以写出其他差值函数，则式 (1-1) 可以写为

$$\vec{r}(\zeta, \eta) = \sum_{n=1}^N \phi_n \left(\frac{\xi}{I} \right) \vec{r}(\xi_n, \eta) + \sum_{m=1}^M \psi_m \left(\frac{\eta}{J} \right) \vec{r}(\xi, \eta_m) - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \phi_n \left(\frac{\xi}{I} \right) \psi_m \left(\frac{\eta}{J} \right) \vec{r}(\xi_n, \eta_m) \quad (1-4)$$

当 Lagrange 型函数中 $M = 2$ 、 $N = 2$ ，插值方法称为双线性超限插值，型函数 $\phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right)$ 和

$\psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right)$ 的具体形式为

$$\vec{\xi} = \frac{\xi - \xi_{\min}}{\xi_{\max} - \xi_{\min}}, \phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) = \begin{cases} 1 - \vec{\xi} & n = 1 \\ \vec{\xi} & n = 2 \end{cases} \quad (1-5)$$

$$\vec{\eta} = \frac{\eta - \eta_{\min}}{\eta_{\max} - \eta_{\min}}, \psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right) = \begin{cases} 1 - \vec{\eta} & m = 1 \\ \vec{\eta} & m = 2 \end{cases} \quad (1-6)$$

当 Lagrange 型函数中 $M = 3$ 、 $N = 3$ ，插值方法称为双二次超限插值，型函数 $\phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right)$ 和

$\psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right)$ 的具体形式为

$$\vec{\xi} = \frac{\xi - \xi_{\min}}{\xi_{\max} - \xi_{\min}}, \phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) = \begin{cases} 2\left(\vec{\xi} - \frac{1}{2}\right), (\vec{\xi} - 1) & n = 1 \\ 4\vec{\xi}(1 - \vec{\xi}) & n = 2 \\ 2\vec{\xi}\left(\vec{\xi} - \frac{1}{2}\right) & n = 3 \end{cases} \quad (1-7)$$

$$\vec{\eta} = \frac{\eta - \eta_{\min}}{\eta_{\max} - \eta_{\min}}, \psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right) = \begin{cases} 2\left(\vec{\eta} - \frac{1}{2}\right), (\vec{\eta} - 1) & m = 1 \\ 4\vec{\eta}(1 - \vec{\eta}) & m = 2 \\ 2\vec{\eta}\left(\vec{\eta} - \frac{1}{2}\right) & m = 3 \end{cases} \quad (1-8)$$

使用双线性超限差值方法划分钝头体外流场二维网格结果如图 1-9 所示。

1.3.2 椭圆形微分方程方法

图 1-7 所示变换关系可以由一个椭圆形微分方程确定，这种方法最早由 Thompson 等人提出。在 x 、 y 平面内取 Laplace 方程：

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \quad (1-9)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \quad (1-10)$$

在式 (1-9) 和式 (1-10) 中， ξ 和 η 是因变量， x 和 y 是自变量，将两组方程对调一下写出逆方程，使 x 和 y 变成因变量，结果为

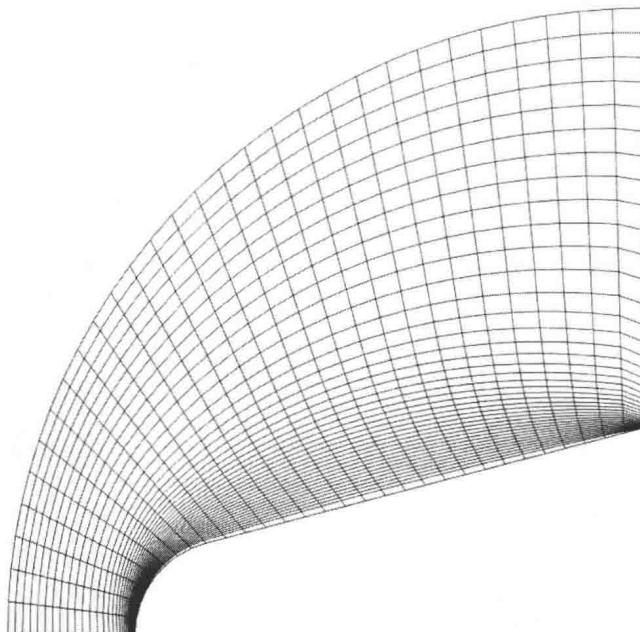


图 1-9 代数方法生成网格结果

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \quad (1-11)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \quad (1-12)$$

式中，

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \\ \beta &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \gamma &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \end{aligned} \quad (1-13)$$

计算过程中，将式（1-11）和式（1-12）采用中心差分进行离散，使用 ADI 方法进行求解。使用椭圆形微分方程方法划分钝头体外流场二维网格的结果如图 1-10 所示。

1.3.3 Thomas&Middlecoff 方法生成网格

求解椭圆型微分方程生成网格的优点是：①所得网格线是光滑的；②可以处理复杂的边界。其缺点是较难实现内部节点的控制。为了实现用边界上的节点的分布控制内部节点的分布，同时实现边界网格正交，通常的做法是在式（1-11）和式（1-12）右端加上源项，Thomas&Middlecoff 法是比较典型的方法。

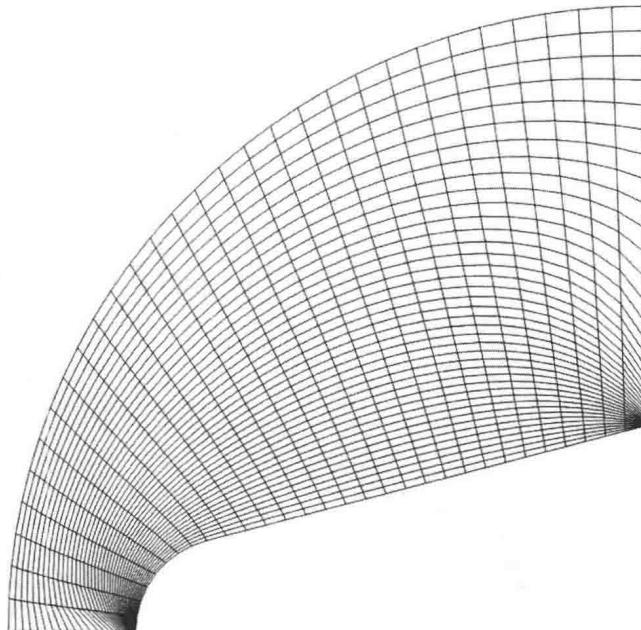


图 1-10 椭圆形微分方程生成网格结果

在式 (1-11) 和式 (1-12) 右边加上源项 $P(\xi, \eta)$ 、 $Q(\xi, \eta)$ 后，方程变为 Possion 方程。

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta) \quad (1-14)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \quad (1-15)$$

假设

$$P = \phi(\xi, \eta) \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (1-16)$$

$$Q = \psi(\xi, \eta) \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (1-17)$$

将式 (1-16) 和式 (1-17) 分别代入式 (1-14) 和式 (1-15) 可得

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \phi \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \psi \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1-18)$$

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \phi \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + \psi \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1-19)$$

联立式 (1-18) 和式 (1-19)，消去 ψ 可得

$$\alpha \left[\frac{\partial y}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \phi \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \phi \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \left[2\beta \frac{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} / \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} / \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)}{\partial \eta} \right] \quad (1-20)$$

式中, $\frac{\partial x}{\partial \eta} / \frac{\partial y}{\partial \eta}$ 就是物理平面上 $\xi = \text{const}$ 的曲线簇在 $\eta = 0$ (或 $\eta = 1$) 的边界上的斜率 dx/dy 。

对 $\xi = \text{const}$ 的曲线簇在 $\eta = 0$ (或 $\eta = 1$) 的边界上提出以下几点要求。

1) 边界附近局部的为直线, 即曲率为零, 于是有

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} / \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1-21)$$

2) 在边界附近, $\xi = \text{const}$ 的曲线同 $\eta = 0$ (或 $\eta = 1$) 的边界线正交, 即要求

$$\beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0 \quad (1-22)$$

根据以上条件, 式 (1-15) 可化为

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \phi \frac{\partial x}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} / \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \phi \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \quad (1-23)$$

而由 $\beta = 0$ 的条件可知, $\frac{\partial x}{\partial \eta} / \frac{\partial y}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi} / \frac{\partial x}{\partial \xi}$, 代入式 (1-18) 得

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \phi \frac{\partial x}{\partial \xi} = -\frac{\partial y}{\partial \xi} / \frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \phi \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \quad (1-24)$$

由此推得在 $\eta = 0$ (或 $\eta = 1$) 的边界上 Φ 可按下式计算:

$$\phi = - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) / \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] \quad (1-25)$$

同理, 可以推导得到在 $\xi = 0$ (或 $\xi = 1$) 的边界上 ψ 的计算式为

$$\psi = - \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) / \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] \quad (1-26)$$

上述方法只能确定边界上的 ϕ 和 ψ 值, 内部各点的 ϕ 和 ψ 值通过超限差值法获得。这种方法所构造的源项函数, 能够使得区域内部的网格分布收到边界上预先设置好的分布控制, 且在一定程度上使边界的网格保持正交。图 1-11 所示为使用该方法生成的网格。

上面主要讲解了二维结构网格生成方法, 通过比较上述三种结构化网格生成方法发现, 代数生成方法计算量小, 偏微分方程方法计算量较大。偏微分方法, 尤其是 Thomas&Middlecoff 方法生成的网格光滑, 正交性好, 边界附近网格质量高。

同一个计算平面可以映射多个几何平面生成网格, 如图 1-12 和图 1-13 所示。