

线性代数

及其实验

Xianxing Daishu Jiqi Shixyan

陈东升 主编



Wuhan University Press
武汉大学出版社

线性代数及其实验

陈东升 主编
谢文昊 副主编



Wuhan University Press
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其实验/陈东升主编. — 武汉: 武汉大学出版社, 2015.8
ISBN 978-7-307-16519-9

I. ①线… II. ①陈… III. ①线性代数—实验—高等学校—教材 IV.
①O151.2-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 196617 号

责任编辑: 刘 琼 责任校对: 代秋平 版式设计: 三山科普

出版发行: 武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: cbs22@whu.edu.cn 网址: www.wdp.com.cn)

印刷: 陕西汇丰印务有限公司

开本: 787×1092 1/16 印张: 17.25 字数: 430 千字

版次: 2015 年 8 月第 1 版 印次: 2016 年 1 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-307-16519-9 定价: 36.6 元

版权所有, 不得翻印: 凡购我社的图书, 如有质量问题, 请与当地图书销售部门联系调换。

摘 要

本书涵盖了大学阶段线性代数的基本内容,包括矩阵的运算及初等变换、方阵的行列式与逆矩阵、 n 维向量与线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型等概念。本书在简化理论的基础上,加入了线性代数实验部分。本书可作为开设线性代数课程的非数学专业的本科院校的教学用书,也可供各大专院校或成人教育学院的学生作为教材使用,还可作为报考研究生的考生、自学者和科技工作者等的参考书。

本书内容全面、由浅入深、讲解细致、图文并茂;例题由实际问题引入,丰富详实;习题中加入了近几年的考研试题,以满足不同层次读者的需求。所有的实验内容都调试通过,实用性强,可作为开设“线性代数”课程专业的配套教材使用(不开设实验课程的专业,实验部分可作为选学内容供学生自学)。书中带“*”号的内容,教师可以根据学时选讲或不讲,不影响教学进程和后续课程的学习。为弥补一些学生中学阶段知识的缺陷,附录中加入了复数、求和符号 Σ 和求积符号 Π 等概念。

前 言

随着人类活动范围扩展、生活节奏加快以及技术的进步,人们能以各种快速、方便而廉价的方式获取、存储和处理数据,这就使得数据和信息量以指数形式向上增长。互联网(internet)的出现和发展,将整个世界联成一个小小的地球村,人们可以跨越时空在网上交换信息和协同工作。这样展现在人们面前的已不是局限于本部门、本单位和本行业的庞大的数据库,而是浩瀚无垠的信息海洋。对这些极度膨胀的、种类繁多的信息量,人们极大地感受到了这“信息爆炸”“混沌信息空间”和“数据过剩”带来的压力。这就是“大数据”的威力。

大数据的巨量资料,无法透过目前主流软件工具处理,这样就产生了超级计算机。我国研制的世界一流超级计算机“天河二号”,其运算一小时,就相当于13亿人用计算器计算1000年,其存储总容量相当于存储600亿册每册10万字的图书。这就是“超计算”的能力。

在这种“大数据”“超计算”的背景下,大规模开放式在线课程——慕课(MOOC)应运而生,由此“翻转”了“课堂教学”。在慕课大规模(大量参与者)、开放式(任何人都可以参与)的在线课程(通过网络交互完成教学活动)环境下,“微课程”又将唱响大规模在线课程的序曲。“微课”是为学习者自主学习获得最佳效果,经过精心的信息化教学设计,以流媒体形式展示的围绕某个知识点或教学环节开展的简短、完整的教学活动。它的形式是自主学习,目的是最佳效果,设计是精心的信息化教学设计,传播是流媒体,内容是某个知识点或教学环节,时间是简短的,本质是完整的教学活动。

面对信息时代的“超”“慕”“微”,数学课程的内容应以“全”“易”“用”的形式出现。“全”就是课程内容要全面、系统;“易”就是课程内容梯度小、看得懂、易学习;“用”就是让学生觉得有用,能够解决生产实际中的问题。

“线性代数”是高校大多数专业学生必修的基础课程,是学习后续专业课程、考研的基础,也是解决实际问题的有力工具。通过计算机平台解决线性代数大规模的计算及实际问题的复杂算法,是大学生和科研人员应具备的基本素质。许多学生在学习线性代数时(甚至在工作或深造后的很长一段时间内)很难真正体会线性代数的基础性地位和作用,以至于在学习线性代数的过程中提不起兴趣,即便是学习好的学生,也不知如何使用(包括实际应用以及概念、性质、定理的使用),如何在讲线性代数时尽可能突出它的应用,一直是大多数教师思考的问题。美国在1992—1997年间,国家科学基金项目ATLAST就是在“用软件工具提高线性代数教学”思想指导下立项研究的。研究者认为:会矩阵不会计算是“瘸子”;会计算不会矩阵仍是“瘸子”。把两者的优势结合起来,才能在科学应用的道路上走得更远。

目前国内“线性代数”课程的教学偏理论,缺少实际应用背景,虽然有些教材加入了一些应用问题,但缺乏解决这些问题的计算能力,因为有些实际问题计算很繁琐;有些教材虽然把解决实际问题的能力通过计算机软件加以实现,但教材的理论体系不够完备。所以“线性代数”需要一种完备理论和计算机能力相结合的教材。为此作者产生了编写“线

性代数及其实验”教材的思想，通过多年探索终于成型。

本书以矩阵、线性变换为主线，展开了行列式、逆矩阵、 n 维向量和线性方程组、特征值与特征向量、二次型等知识的论述。同时，在每一部分知识中都融进一些基础实验和应用实验。基础实验涵盖了“线性代数”的基础理论知识点，通过相应实验教会学生如何使用 MATLAB 进行线性代数的相关计算，使学生深入领悟理论知识；应用实验以具体实例为背景介绍如何将线性代数基础知识与实际应用相结合，使学生深入理解线性代数在实际中的应用，借助 MATLAB 数学软件激发学生学习的兴趣。

本书力求达到传统和现代教学的结合，每一小部分的知识点都可作为流媒体的“微”课设计，每一章节都可作为大课堂媒体的讲授。学生抓“微”（目），教师抓“大”（纲），纲举目张，以得到最好的教学效果。

本书的图、表、式、定义、定理的序号按章排序，例题序号按节排序。定理、性质证明结束后用段落符号“¶”表示。为了节省空间，本书的公式符号尽量和文字排成一行，若公式、符号较大时，单独成行。如果某个公式符号需要注明式号，则单独成行。

几十年的教学生涯使我深感学无止境，在即将谢幕之际，要为后人留下一些经验和思考。本书集众人所长，叙个人思想，在编写过程中参考了许多文献和网上资料，限于篇幅，对于没有列出的参考文献表示歉意和感谢。

全书由郑州轻工业学院陈东升编写、统稿，西安石油大学理学院谢文昊分担了本书约 7 万字的编写任务。其他作者做了相应的工作。对各位编委的辛勤工作表示真挚的谢意。

武汉大学出版社、郑州轻工业学院以及相关的兄弟院校对本书的编写和出版给予了热忱的关怀和支持，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，书中错、漏及欠妥之处在所难免，敬请广大读者、同行批评指正。

陈东升

2015 年 3 月

目 录

摘 要

前 言

第一章 矩阵运算及初等变换	1
§1.1 矩阵的概念	1
一、引例	1
二、矩阵的定义	1
三、特殊矩阵	4
习题 1.1	6
§1.2 矩阵的运算	7
一、矩阵的线性运算	7
二、矩阵的乘法	8
三、矩阵的转置	13
*四、共轭矩阵	15
习题 1.2	15
§1.3 分块矩阵及运算	16
一、分块矩阵	16
二、分块矩阵的运算	17
三、常用的分块形式	19
习题 1.3	21
§1.4 初等变换	22
一、线性方程组的初等变换	22
二、矩阵的初等变换	23
三、初等矩阵	27
习题 1.4	30
总习题一	31
*实验 1 矩阵的基本运算及初等变换	34
一、实验目的	34
二、实验指导	34
三、应用实验	37
第二章 方阵的行列式	40
§2.1 n 阶行列式	40
一、2 阶和 3 阶行列式	40
二、 n 阶行列式的定义	43
*三、 n 阶行列式按排列、反序数展开	46
习题 2.1	50

§2.2 行列式的性质	51
一、行列式的性质	51
二、利用性质计算行列式	55
习题 2.2	59
§2.3 行列式展开定理	61
一、行列式按任意一行(列)展开	61
二、代数余子式的性质	64
习题 2.3	65
§2.4 克莱姆法则	66
一、克莱姆法则	66
二、齐次线性方程组有非零解的条件	68
习题 2.4	70
总习题二	71
*实验 2 行列式的计算	72
一、实验目的	72
二、实验指导	72
三、应用实验	75
第三章 方阵的逆矩阵	77
§3.1 方阵的逆矩阵	77
一、逆矩阵的概念	77
二、可逆矩阵的判定及求法	78
三、解矩阵方程	84
习题 3.1	88
§3.2 矩阵的秩	89
一、矩阵的秩的概念	89
二、用初等变换求矩阵的秩	91
三、矩阵的秩的性质	94
习题 3.2	95
§3.3 线性方程组的消元法	96
一、高斯消元法	96
二、线性方程组有解的判定定理	98
习题 3.3	104
*§3.4 投入产出数学模型	105
一、投入产出平衡方程组	105
二、消耗系数	107
习题 3.4	112
总习题三	112
*实验 3 逆矩阵及矩阵的秩	114
一、实验目的	114

二、实验指导	114
三、应用实验	116
第四章 n 维向量与线性方程组	119
§4.1 n 维向量空间	119
一、 n 维向量及其运算	119
二、向量空间及其子空间	121
习题 4.1	122
§4.2 向量组的线性关系	123
一、向量组的线性表示	123
二、向量组的线性相关性	128
三、线性表示与线性相关的关系定理	132
习题 4.2	134
§4.3 向量组的秩	135
一、向量组的极大线性无关组与秩	135
二、向量组的秩与矩阵的秩间的关系	138
三、向量空间的基、维数与坐标	141
四、基变换与坐标变换	143
习题 4.3	146
§4.4 线性方程组解的结构	147
一、齐次线性方程组解的结构	147
二、非齐次线性方程组解的结构	152
习题 4.4	154
总习题四	155
*实验 4 向量组的线性相关性与线性方程组解的结构	158
一、实验目的	158
二、实验指导	158
三、应用实验	160
第五章 方阵的特征值与特征向量	164
§5.1 n 维向量的内积、长度与正交	164
一、向量的内积与正交	164
二、施密特 (Schmidt) 正交化过程	166
三、正交矩阵	169
习题 5.1	170
§5.2 特征值与特征向量	171
一、特征值与特征向量的概念	171
二、特征值与特征向量的计算	172
三、特征值与特征向量的性质	174
习题 5.2	177
§5.3 相似矩阵及矩阵的对角化	177

一、相似矩阵的概念与性质	177
二、矩阵与对角矩阵相似的条件	179
三、实对称矩阵的对角化	180
习题 5.3	184
*§5.4 最小二乘问题	185
一、最小二乘法	185
二、最小二乘直线	187
习题 5.4	189
总习题五	189
*实验 5 特征值与特征向量及矩阵的相似对角化	191
一、实验目的	191
二、实验指导	191
三、应用实验	194
第六章 二次型	197
§6.1 二次型及其标准形	197
一、二次型及矩阵表示	197
二、二次型的标准形	200
习题 6.1	208
§6.2 正定二次型	209
一、二次型与对称矩阵有定性的概念	209
二、正定二次型与正定矩阵的判定	209
习题 6.2	212
*§6.3 二次型的应用问题	213
一、二次型在求函数极值中的应用	213
二、二次曲线(曲面)的化简问题	216
习题 6.3	220
总习题六	220
*实验 6 二次型及其标准形	222
一、实验目的	222
二、实验指导	222
三、应用实验	226
附录一 复数、数环和数域	228
附录二 连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$	232
习题参考答案与提示	234
参考文献	265

第一章 矩阵运算及初等变换

矩阵是线性代数研究的重要对象，线性代数的许多内容都可借助矩阵进行讨论。矩阵作为一种重要的数学方法，不仅是用初等变换研究方程组的有力工具，也被广泛地应用于数学的其他分支以及自然科学、管理科学和工程技术中。

本章从实际问题入手，引入矩阵的概念，然后介绍矩阵的基本运算、分块矩阵的概念及运算、矩阵的初等变换等概念，最后给出利用 MATLAB 进行实验的方法。

§ 1.1 矩阵的概念

一、引例

例 1 在工作和生活中，我们会经常填一些表格，如表 1.1 所示。

表 1.1 年龄、身高、体重表

	年龄（岁）	身高（公分）	体重（公斤）
张三	40	175	70
王二	35	180	80
李四	30	165	55
赵五	25	185	85

将此表缩略成如下形式：

$$\begin{pmatrix} 40 & 175 & 70 \\ 35 & 180 & 80 \\ 30 & 165 & 55 \\ 25 & 185 & 85 \end{pmatrix}$$

它是由 4 行 3 列的 4×3 个数构成的，我们称之为矩阵。

二、矩阵的定义

定义 1 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$) 排成的 m 行 n 列的数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1-1)$$

叫做 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的数，又称为矩阵

的元素.

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**, 元素是复数的矩阵称为**复矩阵**. 本书的矩阵除特别说明外, 都指实矩阵. 式 (1-1) 可简记为 $A=(a_{ij})$ 或 $A=(a_{ij})_{m \times n}$ ($i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$), 这里下标 i 指明行序数, 下标 j 指明列序数. $m \times n$ 矩阵也可记作 $A_{m \times n}$, 如果 $m=n$, 则称 A 为 n 阶矩阵或 n 阶**方阵**, n 阶矩阵也记为 A_n . 矩阵常用大写黑体英文字母 $A, B, C, \cdots$ 表示.

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases} \quad (1-2)$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的**线性变换**, 其中 a_{ij} 是常数, 线性变换 (1-2) 的系数构成 $m \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$.

给定了线性变换 (1-2), 它的系数所构成的矩阵也就确定. 反之, 如果给出一个矩阵作为线性变换的矩阵, 则线性变换也就确定. 从这个意义上来说, 线性变换和矩阵之间存在着——对应关系.

例如, 线性变换 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \vdots \\ y_m = x_n \end{cases}$ 叫做**恒等变换**, 它对应着 n 阶方阵

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

此方阵叫做 n 阶**单位矩阵**, 简记作 E 或 I , 这个方阵的特点是: 从左上角到右下角的连线上的元素为 1, 其余元素都是 0, 即 $E=(\delta_{ij})$, 其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j, \\ 0, i \neq j. \end{cases} \quad (i, j=1,2,\cdots,n).$

只有一行的矩阵 $A=(a_1 a_2 \cdots a_n)$ 称为**行矩阵**, 也称做**行向量**. 为避免元素间的混淆, 行矩阵也记作 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 只有一列的矩阵 $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 称为**列矩阵**, 也称作**列向量**.

含有 n 个未知量 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1-3)$$

的系数也可构成一个 $m \times n$ 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, 称为方程组 (1-3) 的系数矩阵,

它的常数项可以表示为一个 $m \times 1$ 的列矩阵 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

线性方程组 (1-3) 的系数矩阵与常数项一起可以表示成一个 $m \times (n+1)$ 的矩阵

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$, 称为方程组 (1-3) 的增广矩阵.

线性方程组 (1-3) 的未知量可以表示成一个 $n \times 1$ 的列矩阵 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

例 2 写出线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 的系数矩阵和增广矩阵.

解 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 增广矩阵 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

两个行数相等、列数相等的矩阵, 称为同型矩阵. 如果 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 是同型矩阵, 并且它们的对应元素相等, 即 $a_{ij} = b_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$), 那么就称矩阵 A 和矩阵 B 相等, 记作 $A=B$.

只有一个元素 a 的矩阵称为一阶矩阵, 记作 (a) . 所有元素都为数 0 的矩阵称为零矩阵, 记作 0 .

注意: 不同型的零矩阵是不同的.

例 3 当 $\begin{pmatrix} x & 2y \\ z & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & u \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$ 时, x, y, z, u 各取何值?

解 由 $x=2u, 2y=u, z=1, -8=2x$ 可得, $x=-4, y=-1, z=1, u=-2$.

例 4 各城市之间交通连接形成一个交通网络图. 设图上有 n 个城市构成的节 (顶) 点 $v_1, v_2, \dots, v_n$, 在每两个节点 (城市) 之间以线段相联接, 这些线段可以有向的, 用箭头表示; 也可以是双向的, 因而可画出双箭头. 这就形成了一个交通网络图, 这样的图称为有向图 (如果图上线段都是双向的, 可以不画箭头, 称为无向图), 这个图可以用 $n \times n$ 矩阵表示, 这个矩阵叫做邻接矩阵, 它的行和列分别表示这些节点的编号, 行号表示出发节点, 列号表示到达节点. 任何一条有向线段, 在矩阵中用一个数值为 1 的元素表示, 即若邻接矩阵

$A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{节点 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 有箭头 (不含中间节点);} \\ 0, & \text{节点 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 没有箭头.} \end{cases}$

有向图如图 1.1 的邻接矩阵 (假设自身不相通, 即 $a_{ii}=0$; 也可假设 $a_{ii}=1$) 是

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

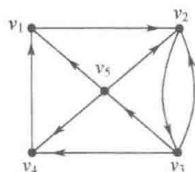


图 1.1 邻接矩阵

三、特殊矩阵

前面的行 (列) 矩阵、零矩阵、单位矩阵都是特殊矩阵, 下面再介绍几类特殊的矩阵.

n 阶方阵的左上角与右下角之间的连线称为它的主对角线. n 阶方阵的主对角线下 (上) 方的元素全为零的方阵称为上 (下) 三角矩阵, 即方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

分别称为上三角矩阵和下三角矩阵.

n 阶方阵的主对角线以外的元素全为零, 即只有主对角线上有非零元素的方阵称为对角方阵, 简称对角矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

常简记为 $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$. n 阶单位矩阵 E 就是一特殊的对角矩阵, 即 $E = \text{diag}(1, 1, \cdots, 1)$.

线性变换 $\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1 \\ y_2 = \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ y_m = \lambda_n x_n \end{cases}$ 对应的也是一个 n 阶对角矩阵, 记为

$$A_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

在对角矩阵中, 若 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = a$, 则称其为数量矩阵, 即方阵

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

为数量矩阵. 单位矩阵是一种特殊的数量矩阵.

定义 2 如果 $m \times n$ 矩阵 A 满足以下条件:

- (1) 如果 A 有零行 (元素全为 0 的行), 则零行都在非零行的下边;
- (2) 非零行的非零首元 (自左至右第一个不为 0 的元素) 的下边全是 0.

则称 A 为行阶梯形矩阵.

这时称 A 中非零行的行数为 A 的阶梯数, 即如下形状的矩阵称为行阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} *_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & *_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & *_i & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & *_r & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

其中空白处的元素全为零, $*_i (1 \leq i \leq r)$ 表示该行中第一个不为零的元素 (非零首元), 每行的非零首元必在前一行非零首元的右方.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 都是行阶梯形矩阵, 而 $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不是行阶梯形

矩阵.

定义 3 如果行阶梯形矩阵 A 还满足条件:

- (1) 各非零首元全为 1;
- (2) 非零首元所在列的其余元素全为 0.

则称 A 为行简化阶梯形矩阵, 简称行最简形矩阵.

如单位矩阵 E 就是一个特殊的行最简形矩阵, 而 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 也是一个行最简形

矩阵.

同理, 我们可以定义列阶梯形矩阵及列最简形矩阵. 如矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为列阶

形矩阵, 其特点是: 零列 (元素全为 0 的列) 位于最右边, 非零列的非零首元 (自上至下第

一个不为 0 的元素) 都在前一列非零首元的右下侧; 而 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是列最简形, 其特点是列阶梯形, 各列的非零首元全是 1, 非零首元所在行的其余元素全为零.

习题 1.1

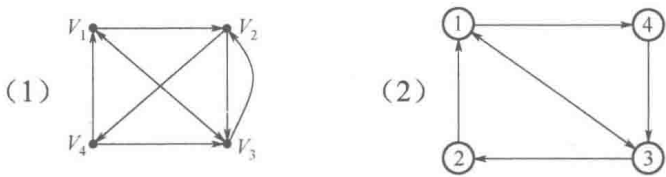
1. 设三种食物每 100 克中蛋白质、碳水化合物和脂肪的含量如表 1.2 所示.

表 1.2 食物含量营养表

营养	每 100g 食物所含营养(g)			减肥所要求的每日营养量
	脱脂牛奶	大豆面粉	乳清	
蛋白质	36	51	13	33
碳水化合物	52	34	74	45
脂肪	0	7	1.1	3

表中给出了 80 年代美国流行的剑桥大学医学院的营养处方. 试用矩阵表示此表格.

2. 写出线性变换 $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 \\ y_2 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_3 = 4x_1 + 2x_2 - x_3 \end{cases}$ 所对应的矩阵.
3. 写出线性方程组 $\begin{cases} x - 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ 的系数矩阵和增广矩阵.
4. 写出下列有向图的邻接矩阵.



5. 图 1.2 表示了 B 省的 3 个城市 B_1, B_2, B_3 与 C 省的 3 个城市 C_1, C_2, C_3 的交通连接图 (既非有向图, 也非无向图). 每条线上的数字表示此通路上不同的运路(公路、铁路、水路、空路)数目. 若以 $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 表示从 B_i 到 C_j 的运路数, 试写出矩阵 $A = (a_{ij})$.

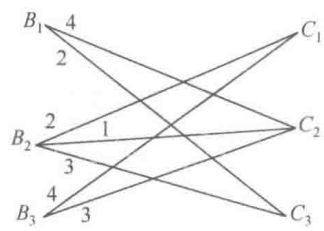


图 1.2

6. 写出既是上三角形矩阵又是下三角形矩阵的 n 阶矩阵的一般形式.

7. 下列矩阵哪些是行阶梯形矩阵、行最简形矩阵? 哪些不是?

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix};$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 1.2 矩阵的运算

一、矩阵的线性运算

定义 4 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m \times n}$, 其对应元素相加所得到的矩阵 $C=(a_{ij}+b_{ij})_{m \times n}$ 称为矩阵 A 与 B 的和, 记作 $C=A+B$.

注意: 两个矩阵只有在行数相同且列数相同 (同型矩阵) 的条件下才能进行加法运算.

例 1 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 求 $A+B, A+C$.

解 $A+B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -2 & -7 & 10 \end{pmatrix}$. 因 A 与 C 不是同型矩阵, 所以 $A+C$ 无意义.

定义 5 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, 称矩阵 $(-a_{ij})_{m \times n}$ 为矩阵 A 的负矩阵, 记作 $-A$.

由矩阵的加法及负矩阵的概念, 可以定义矩阵的减法.

定义 6 减去一个矩阵等于加上这个矩阵的负矩阵, 即若 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, $B=(b_{ij})_{m \times n}$, 则 $A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})_{m \times n}$.

例 2 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $A+B$ 与 $A-B$.

解 $A+B=\begin{pmatrix} 3+(-1) & 0+1 & 6+0 \\ 2+0 & (-1)+(-2) & 1+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$,
 $A-B=\begin{pmatrix} 3-(-1) & 0-1 & 6-0 \\ 2-0 & (-1)-(-2) & 1-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

定义 7 以数 k 乘以矩阵 A 的每一个元素得到的矩阵, 称为数 k 与矩阵 A 的数量乘积, 简称数乘, 记作 kA .

如果 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, 那么 $kA=k(a_{ij})_{m \times n}=(ka_{ij})_{m \times n}$. 有了数乘矩阵的概念, 数量矩阵就可以

表示为 $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}=aE$.

矩阵的加法运算和数乘运算统称为矩阵的线性运算. 由定义不难验证矩阵的线性运算满足下面的八条运算律 (设 A, B, C 都是同型矩阵, k, l 为常数):

- (1) $A+B=B+A$ (加法交换律);
- (2) $(A+B)+C=A+(A+B)$ (加法结合律);