复变函数与积分变换

蔺小林　白云霄　王晓琴　岳宗敏　胡明昊　编

科学出版社

复变函数与积分变换

蔺小林　白云霄　王晓琴　岳宗敏　胡明昊　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者结合多年的教学实践和研究成果，按照普通高等学校机电类各专业、电信类各专业、数学和物理类各专业对复变函数与积分变换课程的基本要求而编写的通用教材. 全书共 8 章，包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、复变函数的级数、留数及其应用、保形映射、傅里叶变换和拉普拉斯变换等内容. 为方便学生深入掌握复变函数与积分变换课程的基本知识，作者精心设计了各章内容的相应梯度，每章配有适量的习题，书后附有部分习题参考解答. 书末附有傅里叶变换简表和拉普拉斯变换简表，便于读者查阅使用.

本书可供高等工科院校的师生作为教材使用，也可作为从事实际工作的工程技术人员的参考读物.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/蔺小林等编. —北京: 科学出版社, 2016.1

ISBN 978-7-03-046622-8

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①蔺… Ⅲ. ①复变函数-高等学校-教材 ②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ. ①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 297577 号

责任编辑: 王胡权／责任校对: 钟 洋
责任印制: 霍 兵／封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 1 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16
2016 年 1 月第一次印刷 印张: 17 1/2
字数: 353 000

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

复变函数与积分变换是理工科院校为本科生开设的一门数学基础理论课. 该课程在自然科学和工程技术诸多领域有着非常广泛的应用. 通过本课程的学习, 学生不仅能够学习到复变函数与积分变换的基本理论和工程技术中常用的数学方法, 同时还有利于把复变函数与高等数学中实变函数相关结论进行对比, 复习和巩固高等数学的相关知识, 为学习相关后继专业课程奠定良好的数学基础.

全书系统地讲述了复变函数与积分变换的基本理论和方法, 内容丰富, 理论严谨, 详略得当, 通俗易懂. 主要内容符合理工科院校本科生复变函数与积分变换课程的教学要求, 可作为该课程的教材或教学参考书. 本书的主要内容大约需要 60 学时.

考虑到复变函数与积分变换是一门重要的数学基础理论课, 同时又在实际中有着非常广泛的应用, 因此, 本书在编写过程中从教学需求出发, 具有以下四个特点.

(1) 基本内容完整. 本书基本内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、复变函数的级数、留数及其应用、保形映射、傅里叶变换和拉普拉斯变换等. 全书内容简明易懂、结构简洁, 每节有较多的典型例题, 每章后面配有适量习题, 书后附有部分习题参考解答, 能满足一般高等院校学生学习复变函数与积分变换课程的需求.

(2) 重视认知规律. 本书重视对学生基本数学知识的讲解和数学素质的培养. 书中所涉及的基本概念和主要定理, 一般都给出了准确的叙述和严格的证明. 为了保证基本理论的完整性、系统性和科学性, 对一些超出教学大纲但在理论和应用上又十分重要的内容, 如辐角原理和儒歇定理、保形映射的基本定理等, 也编进教材, 供读者参考.

(3) 加强相互关联. 由于复变函数的基本内容和高等数学大部分内容有许多相似之处, 所以学生初学时误以为复变函数就是高等数学相关内容的简单推广, 而不加以重视, 往往不能掌握复变函数理论的实质. 本书不仅注意到两者之间的一些共性, 而且特别强调复变函数理论的自身特点.

(4) 注重理论应用. 复变函数在数学物理方程、流体力学、弹性力学、电学、磁学、自动控制等方面有着十分广泛的应用. 本书在编写过程中力求把复变函数和积分变换与理论应用紧密结合, 在傅里叶变换及拉普拉斯变换中注重这些理论在微分方程和电路上的应用, 为学生学习线性系统理论、信号与系统等专业课程奠定良好的理论应用基础.

本书在编写过程中, 得到陕西科技大学教务处、理学院领导和同事的关心与帮助, 部分教师对书稿内容进行了认真审阅, 提出了宝贵的修改意见. 科学出版社对本书的出版给予了大力的支持, 编者在此一并表示衷心的感谢.

由于编者的水平所限, 书中不足之处在所难免, 敬请广大读者批评指正.

编　者

2015 年 6 月于陕西科技大学

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

复变函数是变量为复数的函数, 主要研究定义在复数域上的解析函数的性质. 本章主要介绍复数及基本概念、复变函数的概念及极限和连续性, 为研究解析函数做好准备工作.

1.1　复　　数

1.1.1　复数的定义及运算

定义 1.1　形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数称为**复数**, 其中 i 称为**虚数单位**, 且满足条件 $\mathrm{i}^2=-1$, x,y 为任意实数, 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**, 记为

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z.$$

特别地, 当 $\mathrm{Re}z=0,\mathrm{Im}z\neq 0$ 时, $z=\mathrm{i}y$ 称为**纯虚数**; 当 $\mathrm{Im}z=0$ 时, $z=x$ 为实数.

根据复数的定义, 可知两个复数相等当且仅当对应的实部与虚部分别相等, 一个复数等于零当且仅当它的实部和虚部均为零.

对于任意两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 规定:

(1) 加 (减) 法: $z_1\pm z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$; (1.1)

(2) 乘法: $z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$; (1.2)

(3) 除法: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}(z_2\neq 0)$. (1.3)

复数加、减、乘、除的运算结果分别称为和、差、积、商, 并且满足以下规律:

交换律: $z_1+z_2=z_2+z_1, z_1z_2=z_2z_1$; (1.4)

结合律: $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3, (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$; (1.5)

乘法对于加法的分配律: $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$. (1.6)

全体的复数集合按照上面规定的运算法则构成一个数域, 称为**复数域**. 一般地, 在复数域中不能规定复数的大小, 也就是说复数不能够比较大小, 这与实数域是有区别的.

1.1.2　复数的模与共轭复数

定义 1.2　设复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 称 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为复数 z 的模, 记为 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$; 称复数 $x-\mathrm{i}y$ 为复数 z 的共轭, 记为 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$.

容易验证 $\overline{\overline{z}}=z$, 所以共轭复数是相互的, 即 $z=x+\mathrm{i}y$ 与 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$ 互为共轭复数. 设复数 $z=x+\mathrm{i}y$, $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 及 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 则模与共轭复数存在以下关系及性质:

(1) $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}z$, $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}z$, $z\overline{z}=|z|^2$, $|\overline{z}|=|z|$;

(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$;

(3) $|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|$, $|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|$.

利用复数共轭与模的定义, 读者可以自行验证上述性质.

例 1.1　证明: $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

证明　根据复数共轭与模的性质, 可知

$$
\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+|z_2|^2\\
&=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\leqslant|z_1|^2+2\,|z_1\overline{z_2}|+|z_2|^2\\
&=|z_1|^2+2\,|z_1|\,|z_2|+|z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2,
\end{aligned}
$$

所以

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

成立.

1.1.3　复数的几何表示

根据复数的定义, 不难看出, 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与一个有序的实数对 (x,y) 是一一对应的, 这样就建立了 “数” 与 “点” 之间的一一对应关系, 平面上所有点的集合也就是一个复数的集合. 用建立了笛卡儿直角坐标系的平面来表示复数的平面称为**复平面**, 其中 x 轴称为**实轴**, y 轴称为**虚轴**.

另外, 在复平面上, 由于点 $M(x,y)$ 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 存在一一对应的关系, 所以复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 也可以看成是向量 $\boldsymbol{z}$(图 1.1), 其中向量的长度 r, 也就是复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模, 即 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 复数的代数和与差的几何表示也就可以用向量来表示 (图 1.2).

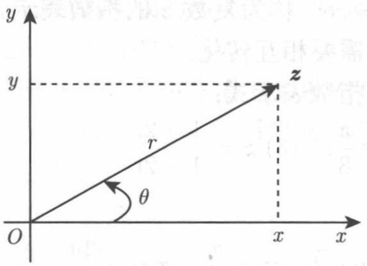

图 1.1

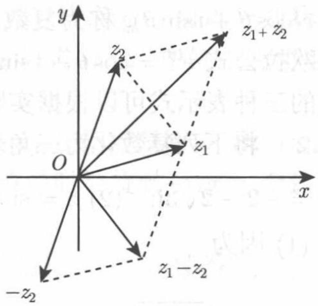

图 1.2

1.1.4 复数的三种表示式

1. 辐角及辐角主值

以 x 轴正半轴为始边, 向量 $\boldsymbol{z}$ 为终边的夹角 θ 称为复数 z 的辐角, 记为 $\theta = \mathrm{Arg}z$, 当 $z=0$ 时, 辐角没有意义. 对任意一个非零的复数 z 来说, 辐角并不唯一, 每个值之间相差 2π 的整数倍, 所以, 为了方便研究和计算, 通常把满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 称为 z 的**辐角主值**, 记为 $\theta_0 = \arg z$, 用辐角主值表示辐角如下:

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{1.7}$$

考虑到 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$, 所以辐角主值 $\arg z$ 与 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 有如下关系:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x>0, \\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0, \quad y>0, \\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0, \quad y<0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0, \quad y>0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0, \quad y<0, \\ \pi, & x<0, \quad y=0. \end{cases} \tag{1.8}$$

2. 复数的三种表示式

形如 $z = x + \mathrm{i}y$ 的复数, 称为复数 z 的**代数表示式**; 通过直角坐标系与极坐标的关系, 如果记 $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \mathrm{Arg}\, z$, 则有

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \tag{1.9}$$

那么 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, 称为复数 z 的**三角表示式**;

根据欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 则 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 称为复数 z 的**指数表示式**.

复数的三种表示式可以根据实际的不同需要相互转化.

例 1.2　将下列复数化为三角表示式及指数表示式:

(1) $z=-2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$;　(2) $z=\sin\dfrac{\pi}{8}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{8}$;　(3) $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$.

解　(1) 因为

$$r=\sqrt{4+12}=4,\quad \arg z=\arctan\sqrt{3}-\pi=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3},$$

所以

$$z=4\left(\cos\frac{-2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{-2\pi}{3}\right)=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

(2) 因为

$$\sin\frac{\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{3\pi}{8},\quad \cos\frac{\pi}{8}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{3\pi}{8},$$

所以

$$z=\cos\frac{3\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}.$$

(3) 将所给的复数 z 进行化简, 可得

$$z=\frac{(1+2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\frac{-3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i},$$

因此, $r=1,\arg z=\arctan\dfrac{-\mathrm{i}4}{3}+\pi$, 所以三角表示式和指数表示式为

$$z=\cos\left(\arctan\frac{-4}{3}+\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\frac{-4}{3}+\pi\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\arctan\frac{-4}{3}+\pi\right)}.$$

1.1.5　复数的乘幂与开方

设两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$ 和 $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$, 容易验证

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}.\tag{1.10}$$

结论 1　$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $\operatorname{Arg}z_1z_2=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2$.　(1.11)

若 $z_2\neq 0$, 则有 $\dfrac{z_1}{z_2}\cdot z_2=z_1$, 对这个乘积使用结论 1, 可以得到关于两个复数商的结论如下.

结论 2　$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg}\dfrac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2(z_2\neq 0)$.　(1.12)

由于一个复数的辐角有无穷多个，所以 $\operatorname{Arg} z_1$ 与 $\operatorname{Arg} z_2$ 可以分别看成是两个复数所有的辐角构成的两个集合，因此式 (1.11) 与式 (1.12) 中辐角的和与差，应该理解为是两个集合的和与差.

从向量几何的角度来看复数的乘积，复数 z_1z_2 是指把复数 z_1 所对应的向量的长度伸长或缩短 $|z_2|$ 倍，然后将此向量顺时针或逆时针旋转 $\operatorname{Arg} z_2$ 个弧度后所得到的向量 (图 1.3).

例 1.3　已知 $z_1=1, z_2=2+\mathrm{i}$，在复平面上求一点 z_3，使得 z_1,z_2,z_3 正好为一个正三角形的三个顶点.

解　如图 1.4 所示，所求的点应该有两个，分别记为 z_3 和 z_3'，根据乘法的几何意义有

$$z_3-z_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}(z_2-z_1)=\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i})=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i},$$

所以 $z_3=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}$，同理读者可以自行计算 $z_3'=\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

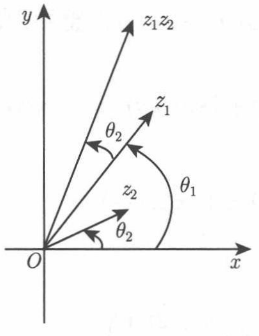

图 1.3

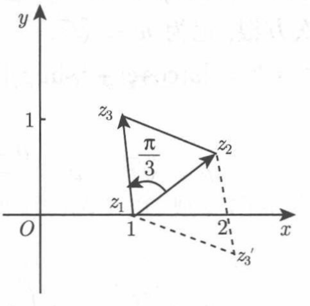

图 1.4

例 1.4　证明三角形内角之和等于 π.

证明　设三角形三个顶点分别为 z_1,z_2,z_3，三个顶角分别为 α,β,γ，并且 $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\pi)$(图 1.5). 由复数乘法的几何意义可知

$$\alpha=\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1},\quad \beta=\arg\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3},\quad \gamma=\arg\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2},$$

而 $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\cdot\dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_3}\cdot\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=-1$，所以

$$\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}+\arg\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}+\arg\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\pi+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z}),$$

又因为 $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\pi)$，所以

$$\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}+\arg\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}+\arg\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\pi,$$

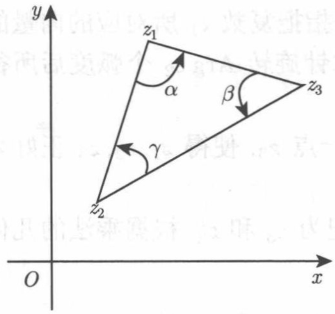

图 1.5

即 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

下面给出复数的乘幂和开方的概念.

设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, 且 $z\neq 0$, n 为正整数, 则称 n 个 z 的乘积为 z 的 **n 次幂**, 记为 z^n, 根据乘积的结论有

$$\begin{aligned}z^n&=z\cdot z\cdot\cdots\cdot z=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n\\&=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.\end{aligned}\tag{1.13}$$

特别地, 当 $r=1$ 时, 即为棣莫弗 (de Moivre) 公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.\tag{1.14}$$

设复数 $w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, 且满足 $w^n=z$, $n(n>1)$ 为正整数, 则称 w 为复数 z 的 n 次方根, 记为 $w=\sqrt[n]{z}$.

事实上, $w^n=[\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)$, $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, 则有

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),\tag{1.15}$$

所以

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\tag{1.16}$$

这里只要取 $k=0,1,2,\cdots,n-1$, 就可以得到 z 的 n 个不同的根, 并且无论 k 在整数中取何值, 所得的根必然为这 n 个根中的一个.

另一方面由式 (1.16), 有

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1),$$

这相当于 z 的 n 个不同的根是复数 $\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$ 绕原点依次逆时针旋转 $\dfrac{2\pi}{n},\dfrac{4\pi}{n},\cdots,\dfrac{2(n-1)\pi}{n}$ 而得到, 可见这 n 个不同的根均匀分布在以原点为圆心, 以 $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆上, 并且为内接于该圆的正 n 边形的 n 个顶点.

注 当 n 为负整数时, 式 (1.13) 依然成立, 读者可利用负指数幂的定义, 以及式 (1.12) 证明.

例 1.5 求 $\sqrt[6]{1+\mathrm{i}}$.

解 由于 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, 所以

$$\sqrt[6]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{6}\right)\quad(k=0,1,2,3,4,5),$$

当 $k=0$ 时, $w_0=\sqrt[12]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{24}\right)$; 当 $k=1$ 时, $w_1=\sqrt[12]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$;
当 $k=2$ 时, $w_2=\sqrt[12]{2}\left(\cos\dfrac{17\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\dfrac{17\pi}{24}\right)$; 当 $k=3$ 时, $w_3=\sqrt[12]{2}\left(\cos\dfrac{25\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\dfrac{25\pi}{24}\right)$;
当 $k=4$ 时, $w_4=\sqrt[12]{2}\left(\cos\dfrac{33\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\dfrac{33\pi}{24}\right)$; 当 $k=5$ 时, $w_5=\sqrt[12]{2}\left(\cos\dfrac{41\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\dfrac{41\pi}{24}\right)$.

1.2 平面点集

本节主要对复平面上一些常见的点及点集作有关规定.

1.2.1 邻域

若 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 为复平面上的两个点, 则这两点的距离为

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \tag{1.17}$$

定义 1.3 设 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$, 定值实数 $\delta>0$, 把满足 $|z-z_0|<\delta$ 的点的全体, 称为点 z_0 的 **δ 邻域**, 记为 $U(z_0,\delta)$ 或 $U(z_0)$, 简称 z_0 的邻域, 其中 δ 为**邻域半径**.

显然,

$$\begin{aligned}U(z_0,\delta)&=\left\{z\,\middle|\,|z-z_0|<\delta\right\}\\&=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,x,\ y\in\mathbf{R}\right\},\end{aligned}$$

它在几何上代表了复平面上一个以 z_0 为圆心, δ 为半径的圆面.

称 $\mathring{U}(z_0,\delta)=\{z|0<|z-z_0|<\delta\}$ 为点 z_0 的 **δ 去心邻域**, 这在几何上相当于在之前的圆面上去掉了圆心这个点 (图 1.6).