国外优秀教材

Elementary Real Analysis

基础实分析

第二版（2008年）

布莱恩·汤姆森 (Brian S. Thomson)
朱迪思·布鲁克纳 (Judith B. Bruckner)
安德鲁·布鲁克纳 (Andrew M. Bruckner) 著

时红建 (Shi Hongjian)
张　蕾 (Zhang Lei) 译

育出版社
EDUCATIONAL
HOUSE

基础实分析

Elementary Real Analysis

第二版（2008年）

布莱恩·汤姆森 (Brian S. Thomson)

朱迪思·布鲁克纳 (Judith B. Bruckner)

安德鲁·布鲁克纳 (Andrew M. Bruckner)　　著

时红建 (Shi Hongjian)

张　蕾 (Zhang Lei)　　译

WWW.CLASSICALREALANALYSIS.COM

上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据
基础实分析 / (美)布鲁克纳(Bruckner,A.)等著; 时红建,张蕾译, —上海:上海教育出版社,2015.8
书名原文:Elementary Real Analysis
ISBN 978-7-5444-6454-3

Ⅰ. ①基… Ⅱ. ①布… ②时… ③张… Ⅲ. ①实分析—教材
Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第174234号

基础实分析
(美)布鲁克纳(Bruckner,A.)等 著
时红建 张 蕾 译

出 版	上海世纪出版股份有限公司 上 海 教 育 出 版 社 易文网 www.ewen.co
地 址	上海市永福路 123 号
邮 编	200031
发 行	上海世纪出版股份有限公司发行中心
印 刷	上海景条印刷有限公司
开 本	787×1092 1/16 印张 20.25 插页 1
版 次	2015 年 12 月第 1 版
印 次	2015 年 12 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5444-6454-3/O·0155
定 价	60.00 元

(如发现质量问题,读者可向工厂调换)

序言

上世纪，数学本科指几何、代数和分析. 1945 年，第二次世界大战结束，渐渐地数学本科指分析、代数和其他战后引进的学科，如统计、离散数学. 分析排前，其教学内容从微积分开始，严谨化后叫分析，早年函数指复变数的复值函数，现在一般指实变数的实值函数. 至今，实变函数论，简称实函，是主流. 中国分析教学的传统来自欧洲，虽然早年美国数学传统源自德国，多年至今已自成一家. 基本上，实函分两次教，第一次的教法是叙述性的，重运算，在大学一年级教，通称微积分. 第二次教是严谨化的，此书就是为这项课程设计的. 2001 年这本书出版第一版，2008 年再版. 现在翻译版是原书的第一部分. 第二部分包括 n 维空间和度量空间.

用简单的话来说，此书的要点是证明极限的存在，同时证明两个极限何时可以交换. 极限指序列的极限、级数的极限，也包括连续函数、微分和积分，这些正是初等分析的主要内容. 我们都意识到学习极限定义有难度. 本书作者首先建立语言，然后带进概念，降低了学习的难度，这是本书的一大强项. 其他可圈可点的包括内容深入、叙述初浅，完全可以自学，并有许多例题和习题协助理解. 难得的是本书纳入了许多古典的课题，譬如无穷乘积，在许多新书里已经看不到了. 在学习的过程中，路走宽一点，对学生来说，是很有启发性的. 安德鲁·布鲁克纳教授是北美实函研究的领军人物之一，他的著作今已成经典. 布莱恩·汤姆森教授也著作丰富，是北美实函大师之一. 本书并不是三位作者唯一备受欢迎的课本，他们也合写过另一本较专业的 *Real Analysis* 1997 年出版第一版，2008 年出版第二版. 中国能够引进国外优秀的课本，我个人深感欣慰.

李秉彝

2015 年 2 月 23 日

译者的话

《基础实分析》是由美国加州大学安德鲁·布鲁克纳（Andrew M. Bruckner）教授、朱迪思·布鲁克纳（Judith B. Bruckner）博士与加拿大西蒙·弗雷泽大学布莱恩·汤姆森（Brian S. Thomson）教授合著完成. 安德鲁·布鲁克纳教授与布莱恩·汤姆森教授在实分析领域做出了卓越贡献. 他们有很多实分析方面的专著. 这本教材已经被美国和加拿大许多院校使用. 其英文版本已由 Prentice Hall 出版社于 2001 年出版，并于 2008 年再版. 本书详细系统地论述了继初等微积分后分析方面更深入的理论及其应用发展，内容丰富，逻辑推理严谨自然，包括了详细主题逻辑与历史发展.

译者之一时红建博士在北京大学数学系实分析专业硕士毕业后曾在南京理工大学教授五年实变函数课程，后来在布莱恩·汤姆森教授指导下完成实分析博士学位. 他感到，中国学生在学习实变函数这门课时常常对课程中许多题目甚至对内容的理解感到无从下手. 一个重要原因是很多实变函数教材都只给出重要结果及抽象证明，因而学生感觉不到证明的逻辑细节发展以增进解决问题能力. 另一个原因是这些书很少给出理论发展的系统、动机与相关内容的历史发展. 这本教材正好弥补了这两方面的不足，系统阐述了实变函数理论、技巧、应用发展的逻辑细节，以及学科发展的动机、逻辑与历史. 可以说这本教材是极好的实分析或是微积分后进一步培养学生分析能力的课程教材，对学生系统学习实分析与其他分析方面课程有着重要的作用. 同时这本书也适用于非数学专业学生进一步学习分析、掌握数学技能、增强数学智慧. 再者，本书也可作为分析方面学者的参考书.

作为教材，本书的更深内容部分可以在正式课程学习时省略，有兴趣的学生可以自学. 对初学者的补充内容部分，有助于他们自学理解正文内容. 英文原版书的上下两部适合一学年的课程. 译者只翻译了英文原版书的上部，其恰恰包括了中国大学传统实变函数课程内容，适用于做实变函数教材. 英文原版书的下部包括一些泛函分析初等内容. 译者希望将这本在北美很受欢迎的教材介绍给中国学生与学者.

时红建

张蕾

翻译于 2015 年 11 月 30 日

英文版序（2001 年）

多年以来，大学数学系已经提供“高等微积分”和“实分析入门”等课程. 这些课程被各种背景的学生选取，它们服务于多种目的并且以不同复杂程度写成. 学生分布从仅完成一门初等微积分课程的大学生到刚开始的数学系研究生. 这些书的目的是多方面的：

(1) 在更严谨层次上，介绍微积分中熟悉的概念.

(2) 介绍初等微积分中没有学习过但更高等大学课程需要的概念，诸如点集理论、函数一致连续性、函数序列一致收敛性等主题.

(3) 为学生提供一定复杂程度的数学以适用日后在数学分析领域或者几个应用领域比如工程或经济学研究生工作.

(4) 开展作者感觉所有数学系学生都应该知道的许多主题.

目前，许多教材针对一些或所有目标，这些书的范围从只针对目标 (1) 到试图针对所有四个目标. 第一种较为极端的书的目标通常是一个学期的课程，针对只有最少学习背景的学生，第二种较为极端的书往往包含比一年课程内容多很多的材料.

如同演讲的风格各有不同，从一本书到另一本书的严谨程度差别很大，一些书努力给出一个非常有效的简单发展，其他书尝试对读者更加友好的发展. 本书选择了对读者友好的方法，我们感到这个方法对学生更有意义.

与各种程度学生相处的经验告诉我们，当学生初次面对全新的主题时大都会有困难. 对一些学生，当需要严谨证明时，这些困难几乎会立即出现，例如，要求 ε-δ 论据的主题. 对其他学生，困难开始于基本的点集理论、紧致论据，以及类似的内容.

本书加入了大多数学生以前不曾见过的概念，在介绍新概念时，提供了更多的验证细节，我们这样做的主要动机是帮助学生顺利完成从基本微积分到更严谨的课程的过渡. 此外，我们尝试给学生足够的机会看到运用新工具的好处.

例如，当学生们首次遇到各种紧致性论据（4.5节引进的海涅-波莱尔定理、波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理、哥增斯引理）时，学生经常感到不易. 为了帮助学生看到为什么这些定理有重要作用，我们提出了特定环境下的问题. 在这种环境下，在集合 E 上函数 f 的局部有界隐含 f 在 E 上整体有界. 通过例子展现了 E 上还是需要一些条件的，即 E 是有界闭的，然后给以证明，并且展示如何使用这几个定理的每一个去证明集合 E 的闭性和有界性是充分的. 这样，我们通过如何以自然方式使用这些定理解决问题来向学生介绍这些定理.

本书还加入了一些选择性材料，标为“深度内容”或“补充内容”，并用符号 ✂ 标注.

补充内容

我们将一些相对初等的材料标明为“补充内容”，这些内容可以加进一个较长时间的课程中，用于提供补充内容与附加例子. 例如，在第三章级数的学习中加入了无限乘积一节，这个主题在表示解析函数表示时起到重要作用，我们在这里介绍它给予教师探讨与级数紧密相关的思想，这些思想展示许多在级数学习中起重要作用的基本概念.

深度内容

我们将数学上本质更复杂的材料标明为“深度内容”，学习时如果将这些内容略去也不失内容上的连贯性. 这些主题可能在实分析更高等课程中或在一些有标记章节中需要或也可能在本书中后面的练习中出现. 例如，在第二章序列极限学习中，加入了上极限和下极限一节，对于第一门初等课程，可以认为这些内容较深将它们略去，后面需要这些概念的问题与文中材料都被仔细地标明了. 因此，即使教材继续进行相对较深的分析内容时，第一门课程也可以通过规避这些有深度章节来进行介绍.

本书对一些章、章里面的一些节甚至一些练习采用这些标记，但不认为这些标记是绝对的. 它们可以简单地用下面方法解释：没有任何标记的材料将不以任何本质方式依赖于其前有标记的章节，另外，如果某一节已经被标记并且将在本书很后面的某节使用，我们也将标出需要它的地方.

标记为深度内容的材料与目标 (2) 和 (3) 相一致. 抗拒住诱惑来谈谈目标 (4)，人们可以感觉到基本上很多课题每个学生都应该知道（例如，有界变差函数、黎曼·斯蒂尔切斯积分及勒贝格积分）. 为了以覆盖其他材料的方式来覆盖这些主题，本书的写作方式更像一本参考书而不像在一年内可以涵盖的教科书. 完成本书的学生将处于极其有利位置来很严谨地学习这些主题.

练习

练习构成了本书的一个重要组成部分. 许多练习在本质上是常规的，其他一些要求比较高，少许练习提供了通常这类书中没有列入的例子，而且学生们已经发现它们很有挑战性、很有趣、并且有指导性.

一些练习已经用符号 ✂ 标示它们需要某一节的材料，例如，第一门课程很可能跳过序列上确界和下确界章节，需要那些概念的练习被标示使得教师能够决定是否使用它们. 一般来讲，一个练习上的那个符号提醒这可能不适合作为例行作业.

章末的一些练习可以被认为更具有挑战性，它们包括一些“普特曼数学竞赛”（Putman Mathematical Competition）问题与取自《美国数学月刊》的一些问题，它们不要求比教材内容更多的知识但经常需要一点坚持和一些巧妙思想. 应该让学生认识到普特曼数学竞赛问题的答案可以在各种网站上找到，《美国数学月刊》中问题的答案已经发表. 即使这样，这些问题中的乐趣是尝试解答问题而不是看到其他人的答案.

设计一门课程

尝试以足够灵活的方式写这本书，促使各种时间长度与各种数学难易程度课程都能使用这本书.

书中很多材料包括相对初等主题的严谨发展. 大多数学生已经在微积分课程中以非严谨方式学习了这些主题. 对具有最少背景的学生，中等复杂程度的一个短期课程可以完全基于本教材，这样一个课程满足目标 (1).

已经用休闲方式写了这本书（上下两部），这允许在许多处提供激励性的讨论与历史透视，虽然这本书相对较厚（根据页数），但可以轻松地在一个全年课程中覆盖大多数主要章节，包括许多有趣的练习.

教授短期课程的教师有几种选择，他们可以将课程完全基于第一、二、四、五和第七章中没有标示的内容，如果时间允许，也可以加进去第三和第八章的前面部分及一些补充材料.

背景

关于这本书，应该再指出一点，我们确实假定学生熟悉非严谨的微积分，特别地，假定学生熟悉基本函数及它们的性质，也假定学生熟悉一些导数和积分的计算. 这允许我们

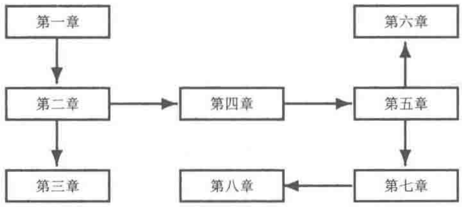

图 1: 章与章的依赖.

用学生熟悉的例子阐明各种概念，例如，用牛顿方法逼近 $\sqrt{2}$ 来开始第二章的序列，这只是一个动机讨论，所以不受一些事实的干扰. 又例如直到第七章才正式论述导数，在这之前还没有证明 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-2)=2x$. 对有最少背景的学生，本书提供一个附录非正式地覆盖概念、初等集合论、函数和证明等一些主题.

答谢

一些朋友、同事和学生在编写教材过程中已经给出了许多有益的评论和建议. 感谢以下教授们对本教材的审阅：尤金·奥噶威尔（Eugene Allgower，科罗拉多州立大学 Colorado State University），斯蒂芬·布林（Stephen Breen，加州州立大学 California State University，北岭 Northridge），罗伯特·芬内尔（Robert Fennell，克莱姆森大学 Clemson University），简·库切拉（Jan Kucera，华盛顿州立大学 Washington State University），以及罗伯特·拉克斯（Robert Lax，路易斯安那州立大学 Louisiana State University）. 作者特别感谢史蒂夫·阿格朗斯基（Steve Agronsky，加州州立理工大学 California Polytechnic State University），彼得·博威恩（Peter Borwein，西蒙·弗雷泽大学 Simon Fraser University），保罗·休默克（Paul Humke，圣欧勒夫学院 St. Olaf College），T. H. 斯蒂尔（T. H. Steele，韦伯州立大学 Weber State University）和克利福德·韦尔（Clifford Weil，密歇根州立大学 Michigan State University）. 他们在课堂上使用了本书的初始版本.

目录

第一章 实数的性质 **1**

1.1 概述 1
1.2 实数 1
1.3 代数结构 3
1.4 序结构 5
1.5 界限 6
1.6 上确界和下确界 7
1.7 阿基米德性质 9
1.8 ℕ的归纳性质 10
1.9 有理数是稠密的 11
1.10 ℝ 的度量结构 12
1.11 第一章有挑战性的问题 13

第二章 序列 **16**

2.1 介绍 16
2.2 序列 17
2.2.1 序列例子 18
2.3 可数集合 20
2.4 收敛性 22
2.5 发散性 25
2.6 极限的有界性 27
2.7 极限代数 28
2.8 极限的序性质 33
2.9 单调收敛准则 36
2.10 极限的例子 39
2.11 子序列 43
2.12 柯西收敛准则 46
2.13 上极限与下极限 47
2.14 第二章有挑战性的问题 52

第三章 无限和 **56**

3.1 介绍 56
3.2 有限和 56
3.3 无限的无序和 61
3.3.1 柯西准则 62
3.4 有序和：级数 65
3.4.1 性质 66
3.4.2 特殊级数 67

3.5 收敛准则 72
3.5.1 有界性准则 72
3.5.2 柯西准则 73
3.5.3 绝对收敛性 73
3.6 收敛性检验 76
3.6.1 简单检验法 76
3.6.2 直接比较检验法 77
3.6.3 极限比较检验法 78
3.6.4 比值比较检验法 80
3.6.5 达朗贝尔比值检验法 80
3.6.6 柯西根检验法 82
3.6.7 柯西并项检验法 83
3.6.8 积分检验法 84
3.6.9 库默检验法 85
3.6.10 拉贝比值检验法 87
3.6.11 高斯比值检验法 88
3.6.12 交替级数检验法 90
3.6.13 狄利克雷检验法 90
3.6.14 阿贝尔检验法 92
3.7 重排 96
3.7.1 无条件收敛性 97
3.7.2 条件收敛性 98
3.7.3 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 和 $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i$ 的比较 99
3.8 级数的乘积 101
3.8.1 绝对收敛级数的乘积 102
3.8.2 非绝对收敛级数的乘积 103
3.9 可求和方法 105
3.9.1 切萨罗可求和方法 106
3.9.2 阿贝尔可求和方法 107
3.10 更多无限和内容 110
3.11 无限积 112
3.12 第三章有挑战性的问题 115

第四章 实数集 **121**
4.1 介绍 121
4.2 点 121
4.2.1 内点 122
4.2.2 孤立点 123
4.2.3 聚点 123
4.2.4 边界点 124
4.3 集合 126
4.3.1 闭集 126
4.3.2 开集 127
4.4 初等拓扑 130
4.5 紧致性论证 132
4.5.1 波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质 133
4.5.2 康托的交性质 134
4.5.3 卡曾斯性质 135

4.5.4 海涅-波莱尔性质 . . . 136
4.5.5 紧集 . . . 139
4.6 可数集 . . . 141
4.7 第四章有挑战性的问题 . . . 142

第五章 连续函数 145
5.1 极限介绍 . . . 145
5.1.1 极限(ε-δ 定义) . . . 145
5.1.2 极限(序列式定义) . . . 148
5.1.3 极限(映射定义) . . . 150
5.1.4 单边极限 . . . 151
5.1.5 无限极限 . . . 152
5.2 极限性质 . . . 153
5.2.1 极限的唯一性 . . . 153
5.2.2 极限的有界性 . . . 154
5.2.3 极限的代数 . . . 155
5.2.4 序的性质 . . . 157
5.2.5 函数的复合 . . . 160
5.2.6 例子 . . . 162
5.3 上极限与下极限 . . . 166
5.4 连续性 . . . 168
5.4.1 如何定义连续性 . . . 168
5.4.2 在一点的连续性 . . . 170
5.4.3 在一个任意点的连续性 . . . 172
5.4.4 在一个集合上的连续性 . . . 174
5.5 连续函数性质 . . . 176
5.6 一致连续性 . . . 177
5.7 极致性质 . . . 179
5.8 达布性质 . . . 180
5.9 不连续点 . . . 181
5.9.1 不连续性类型 . . . 181
5.9.2 单调函数 . . . 183
5.9.3 有多少不连续点? . . . 185
5.10 第五章有挑战性的问题 . . . 186

第六章 更多连续函数与集合内容 192
6.1 介绍 . . . 192
6.2 稠密集合 . . . 192
6.3 无处稠密集合 . . . 193
6.4 贝尔纲类定理 . . . 195
6.4.1 一个有两个玩家的游戏 . . . 195
6.4.2 贝尔纲类定理 . . . 196
6.4.3 一致有界性 . . . 197
6.5 康托集合 . . . 198
6.5.1 康托三分点集的构造 . . . 198
6.5.2 K 的一个算术构造 . . . 200
6.5.3 康托函数 . . . 201
6.6 波莱尔集合 . . . 203
6.6.1 $\mathcal{G}_\delta$ 型集合 . . . 203
6.6.2 $\mathcal{F}_\sigma$ 型集合 . . . 204

6.7 振幅与连续性 206
6.7.1 一个函数的振幅 206
6.7.2 连续点集合 208
6.8 零测度集合 210
6.9 第六章有挑战性的问题 214

第七章 微分 **216**
7.1 简介 216
7.2 导数 216
7.2.1 导数的定义 217
7.2.2 可微和连续 220
7.2.3 导数作为一个放大率 221
7.3 导数的计算 222
7.3.1 代数法则 222
7.3.2 链锁法则 224
7.3.3 逆函数 227
7.3.4 幂法则 228
7.4 导数的连续性? 229
7.5 局部极值 230
7.6 中值定理 232
7.6.1 罗尔定理 232
7.6.2 中值定理 234
7.6.3 柯西中值定理 236
7.7 单调性 237
7.8 蒂尼导数 238
7.9 导数的达布性质 241
7.10 凸性 243
7.11 洛必达法则 247
7.11.1 洛必达法则：$\frac{0}{0}$ 型 248
7.11.2 $x \to \infty$ 时的洛必达法则 250
7.11.3 洛必达法则：$\frac{\infty}{\infty}$ 型 251
7.12 泰勒多项式 253
7.13 第七章有挑战性的问题 256

第八章 积分 **263**
8.1 介绍 263
8.2 柯西的第一种方法 265
8.2.1 柯西的第一种方法的范围 266
8.3 积分的性质 269
8.4 柯西的第二种方法 272
8.5 柯西的第二种方法（续） 274
8.6 黎曼积分 276
8.6.1 一些例子 277
8.6.2 黎曼准则 278
8.6.3 勒贝格准则 279
8.6.4 什么函数是黎曼可积的? 281
8.7 黎曼积分的性质 282
8.8 反常黎曼积分 285
8.9 更多微积分基本定理内容 286
8.10 第八章有挑战性的问题 288

附录 A 背景 **A-1**
A.1 我应该读这一章吗? A-1
A.2 概念 A-1
A.2.1 集合的概念 A-1
A.2.2 函数的概念 A-3
A.3 分析是什么? A-7
A.4 为什么需要证明? A-8
A.5 间接证明 A-8
A.6 反证法 A-9
A.7 反例 A-10
A.8 归纳法 A-11
A.9 量词 A-13

第一章　实数的性质

*我常常思索，那些阻碍学生尝试学习分析进展的大多数困难起源于这里：尽管他们只理解少许普通代数，但他们仍然尝试学习这一更精湛的艺术．从这一点来看，他们不止于站在分析的边缘，而且对无限这个概念充满了欢娱好奇的想法，必定尝试使用这一概念．——莱*昂哈德·欧拉 (Leonhard Euler)

1.1　概述

任何分析课程的目的都是去做一些分析，一些精彩的、重要的、非常有趣味的事实可以在第一门分析课程里确立.

不幸的是覆盖的所有内容都在一些基础之上. 这些基础你可能在早期的课程中并未涉及，传统微积分避开了所有有关基础的问题，而不去证明这些问题需要的论述. 但在这里不能如此做，必须从实数开始.

过往实分析课程很多内容的论述展开都没有对实数系统给予清晰的认知考虑，可以确定的是过往数学家们已经直觉抓住了实数的本质，并且常常在他们的证明中恰如其分使用适当的工具，但是很多例子中这些工具并没有被任何推理证明.

在 1870 年以前的诸多数学家，如乔治·康托 (Georg Cantor) 和理查德·戴德金 (Richard Dedekind) 已经找到看起来严谨的方法来描述实数. 可根据他们的例子找到关于实数的论述，这些论述从初始然后一点点慢慢地导出学习分析所需的确切工具. 这个课题或许最好留给和逻辑相关的课程，在那里其他重要基础论述能得到讨论.

本书将采用（大多数教科书都采用）的方法，就是简单列出所有这个课题所需工具，并且把这些工具看作是理所应当的，你可以认为实数确实像你一直想象的那样，你能一如既往地在实直线上画图、测距离、排序，和高中所学的代数、微积分没有区别. 但是当将要证明关于实数、实函数、实数集合的有关论断时，必须精准地运用这里的工具而非仅仅依赖直觉.

1.2　实数

要做实分析，应该确切地知道什么是实数. 这里有一个不甚严谨的阐述，适合初学微积分的学生（将会发现）但是并不适合所有人.

自然数　从自然数开始，以下是一组计数：

$$1, 2, 3, 4, \cdots$$

用符号 $\mathbb{N}$ 表示这组数集，这样 $n \in \mathbb{N}$ 表示 n 是一个自然数，是 $1, 2, 3, 4, \cdots$ 这些数中的一个.

自然数有两种运算，加法和乘法：

$$m + n \text{ 和 } m \cdot n.$$

自然数中也存在大小关系

$$m < n.$$

在小学里，大量时间用于理解这些运算和它们之间的大小关系.

【减法和除法也可以定义，但是并非对所有的自然数. $7-5$ 和 $\frac{10}{5}$ 可以赋予意义（如果 $x+5=7$ 可以用 $x=7-5$ 来表示，如果 $5 \cdot x=10$ 可以用 $x=\frac{10}{5}$ 来表示），但是把 $5-7$ 和 $\frac{5}{10}$ 放入自然数系就没有意义.】

整数 由于各种各样的理由，较低年级学生常常被自然数问题的动机驱使，已经证明自然数在数学应用中的现实世界问题受到相当的限制，因此自然数连接负整数和零被扩大为：

$$\cdots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\cdots$$

用 $\mathbb{Z}$ 表示，并称其为整数.（符号 $\mathbb{N}$ 看起来是很显然的，它来自英文"natural"，但是符号 $\mathbb{Z}$ 来源于德语，意思是整数.）

同样地，在 $\mathbb{Z}$ 上也存在两种运算，加法和乘法：

$$m+n \text{ 和 } m \cdot n.$$

在 $\mathbb{Z}$ 上, 也还存在着大小关系：

$$m < n.$$

幸运地，在简单的自然数系 $\mathbb{N}$ 中学到的计算规则和大小关系都可以用到整数系 $\mathbb{Z}$ 中. 年轻学生也许可以毫不费力地提高了他们的能力.

【减法现在可以定义在这个较大的数系里，但是除法仍不能被定义. 例如，$-\frac{9}{3}$ 有定义而 $\frac{3}{(-9)}$ 就没定义.】

有理数 在某些方面，数集 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}$ 中除法不能进行的问题变得非常尖锐. 学生必须进一步理解分数，一个更大的数集被记为 $\mathbb{Q}$，用来表示商数，商数就是分数.

所有以下形式的“数”：

$$\frac{m}{n}$$

的集合被称为有理数集，用 $\mathbb{Q}$ 表示，这里 $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

在这个阶段，需要一个更高阶复杂环境，相等就有了新的意义. 在 $\mathbb{N}$ 或 $\mathbb{Z}$ 中，一个表示 $m=n$ 仅指 m 和 n 是同一个的东西，现在

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{b},$$

$m, a \in \mathbb{Z}, n, b \in \mathbb{N}$ 意指

$$m \cdot b=a \cdot n.$$

加法和乘法也构成了一个重大挑战，最终学生必须学会：

$$\frac{m}{n}+\frac{a}{b}=\frac{mb+na}{nb}$$

和

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{a}{b}=\frac{ma}{nb}.$$

减法和除法也被类似地定义，幸运地，再次强调算术运算律是不变的，如结合律、分配律等在这个数集里都保持成立.

同样，还存在大小关系

$$\frac{m}{n}<\frac{a}{b},$$

这个关系根据需要可以定义为：

$$mb < na,$$

这里 $m, a \in \mathbb{Z}, n, b \in \mathbb{N}$. 在整数和自然数集里学到的不等式的法则，在有理数集里同样适用.

实数 从展开实数论述直到现在，仅仅遇到了算术运算，从 $\mathbb{N}$ 进展到 $\mathbb{Z}$ 再进展到 $\mathbb{Q}$ 只是简单的代数，所有这些代数对低年级程度较弱的学生可能已经是一个负担，但在观念上，用一些熟悉的知识是完全容易理解这些步骤的.

下一步建立一个用 $\mathbb{R}$ 表示的更大集合即实数集，这是所有学习微积分的学生都需要的，通常指实数系统为实直线并且认为它是一个几何体，尽管在定义里并没有这样的承诺.

大多数学习微积分的学生很难确切地回答这些数是什么，但他们能确认 $\mathbb{R}$ 包含所有 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、 $\mathbb{Q}$ 以及许多新数，例如 $\sqrt{2}$, e 和 π. 但是，如果问实数是什么，许多学生会显得目瞪口呆，甚至 $\sqrt{2}$, e 或 π 是什么也常常使他们产生困惑. $\sqrt{2}$ 是一个数，它的平方是 2，但是存在一个平方为 2 的数吗？一个计算器可能会显示 1.414 213 6，但是

$$(1.414\,213\,6)^2 \neq 2,$$

所以，$\sqrt{2}$ 到底“是”什么数？如果不能写出一个平方为 2 的数，为什么可以声明存在这样一个平方为 2 的数呢？对于 π 与 e，情况会更糟糕.

一些微积分教科书处理这个问题通过宣称实数是由无限小数展开来获得的，这样有理数包含可以终止的（例如，$\frac{1}{4} = 0.25$），或可以重复的（例如，$\frac{1}{3} = 0.333\,333\cdots$）无限小数展开式，实数集包含所有无限小数展开，无论是可终止的，或可重复的，或两者都不是. 在这种情况，这个宣称或许是存在某个无限小数展开 $1.414\,213\cdots$ 其平方确实是 2，并且这个无限小数展开就是用符号 $\sqrt{2}$ 来表示.

这种方式对于微积分的应用是适当的，并且是一种很有用的方法以避免在微积分入门课程中就做很难的数学. 但是应该记得，在你使用的微积分教科书的某阶段，会出现这样的论述：“接下来的理论证明超越本书的程度”，超越这本书的程度仅仅是因为实数内容未被适当地处理，因而没有方法途径去尝试证明.

需要构建这样的证明，所以在考虑实数时需要抛弃这种松散的描述性方法，定义实数集为一个完备的有序域，在接下来的章节将定义这些术语.

1.3 代数结构

描述实数通过假设实数具有一些属性，不构造实数只宣称实数必须具有的属性，因为展述实数的这些属性是大家熟悉的、可以接受的、事实上确实是习惯使用的，这种方式不应该引起困惑，清楚地阐述了必须使用的实数是什么.

内容从代数结构开始.

在基础代数课程中，大家学习了许多在实数范围内成立的公式，例如公式

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

叫做结合律，也常用因式分解规律：

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

有可能可以将规律的数目减少，组成一个小数目规律的集合而且这些规律可以被用来证明其他规律.

这些规律可用于其他种类的代数，这些代数对象不是实数而是其他种类的数学构造，实际上，这种特殊构造出现如此频繁，在许多不同应用中它都有它自己的名字，任何有同样特征的客体集合叫做一个域，这样实数系的第一个重要结构就是域.

下面九种特性被称为域公理，当在实数系里执行代数运算时，确实要用这些域公理.

假设实数集 $\mathbb{R}$ 有两种运算，叫做加法“ $+$” 和乘法“ $\cdot$”，这些运算满足域公理，运算 $a \cdot b$ （乘法）常常不写点而写作 ab.

A1 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$，存在一个数 $a+b \in \mathbb{R}$，并且 $a+b=b+a$.

A2 对任意 $a, b, c \in \mathbb{R}$，恒等式

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

成立.

A3 存在唯一的一个数 $0 \in \mathbb{R}$，使得对所有 $a \in \mathbb{R}$,

$$a+0=0+a=a.$$

A4 对任意数 $a \in \mathbb{R}$，都存在相应 $-a$ 表示的数，具有性质

$$a+(-a)=0.$$

M1 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$，都存在一个数 $ab \in \mathbb{R}$ 并且 $ab=ba$.

M2 对任意 $a, b, c \in \mathbb{R}$，恒等式

$$(ab)c=a(bc)$$

成立.

M3 存在唯一的数 $1 \in \mathbb{R}$ 使得对所有 $a \in \mathbb{R}$,

$$a1=1a=a.$$

M4 对任意数 $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, 都存在相应的数 a^{-1}，具有性质

$$aa^{-1}=1.$$

AM1 对任意 $a, b, c \in \mathbb{R}$，恒等式

$$(a+b)c=ac+bc$$

成立.

注意到前面已经用字母来标示所涉及的运算公理，A 表示加法，M 表示乘法，分配律 AM1 连接加法和乘法.

如何用这些公理呢？答案可能是在一门分析课程中不使用. 你可以尝试一些练习去理解域是什么以及为什么实数能形成一个域，在代数课程里最有兴趣的是去考虑许多其他域实例及它们的一些应用. 对于分析课程，理解试图描述实数系统是什么，这些公理只是该过程的开始，此过程的第一步是宣称实数在加法和乘法两种运算下构成一个域.

练习

1.3.1 域公理包含常见的结合律、交换律、分配律，它们是哪些？为什么叫这些名字？

1.3.2 为严谨起见，必须说明加法和乘法运算的意义. 给出一个集合 S 及所有有序数对 (s_1, s_2), $s_1, s_2 \in S$ 的集合. S 上的一个二元运算是一个 $B: S \times S \to S$ 的函数，这种运算接受序数对 (s_1, s_2) 并且输出元素为 $B(s_1, s_2)$，例如加法就是一种二元运算，可以写成 $(s_1, s_2) \to A(s_1, s_2)$，而不是熟悉的 $(s_1, s_2) \to s_1+s_2$.

(a) 用记号 $A(s_1, s_2)$ 代替和的记号，重新书写公理 A1-A4.