九章丛书

高校经典教材同步辅导丛书
配套高教版·同济大学数学系编

教你用更多的自信面对未来！

一书两用
同步辅导+考研复习

工程数学·线性代数

（同济·第六版）

同步辅导及习题全解

主编 李娜

新版

习题超全解

名师一线经验**大汇集**，解题步骤**超详细**，方法技巧**最实用**

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

工程数学·线性代数
（同济·第六版）
同步辅导及习题全解

主　编　李　娜

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是与高等教育出版社出版，同济大学数学系编的《工程数学·线性代数》（第六版）一书配套的同步辅导及习题全解辅导书。本书共6章，分别介绍行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换。本书按教材内容编排全书结构，各章均包括本章知识结构网络、本章知识要点、知识点归纳、经典例题解析、真题点睛、课后习题全解六部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习《工程数学·线性代数》（第六版）课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可作为教师备课命题的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

工程数学·线性代数（同济·第六版）同步辅导及习题全解 / 李娜主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2015.8

（高校经典教材同步辅导丛书）

ISBN 978-7-5170-3515-2

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－题解 Ⅳ. ①O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第189485号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：杨元泓　加工编辑：夏雪丽　封面设计：李　佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 工程数学·线性代数（同济·第六版）同步辅导及习题全解
作　者	主　编　李　娜
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　格	170mm×227mm　16开本　14.5印张　357千字
版　次	2015年8月第1版　2015年8月第1次印刷
印　数	0001—7000册
定　价	18.00元

前 言

同济大学数学系编的《工程数学·线性代数》(第六版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多的知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《工程数学·线性代数(同济·第六版)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑《工程数学·线性代数》(第六版)这门课程的特点，我们在内容上作了以下安排：

1. 本章知识结构网络。每章的知识网络图系统全面地涵盖了本章的知识点，使学生能一目了然地浏览本章内容的框架结构。

2. 本章知识要点。每章前面均对本章的知识要点进行了整理。综合众多参考资料，归纳了本章几乎所有的考点，便于读者学习与复习。

3. 知识点归纳。对每章知识点做了简练概括，梳理了各知识点之间的脉络联系，突出各章主要定理及重要公式，使读者在各章学习过程中目标明确，有的放矢。

4. 经典例题解析。该部分选取了一些有启发性或综合性较强的经典例题，对所给例题先进行分析，再给出详细解答，并在最后作出点评，意在抛砖引玉。

5. 真题点睛。精选历年研究生入学考试中具有代表性的试题进行了详细的解答，以开拓广大同学的解题思路，使其能更好地掌握该课程的基本内容和解题方法。

6. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样，许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给了详细的解答。

由于时间较仓促，编者水平有限，难免书中有疏漏之处，敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编 者

2015 年 7 月

目录
contents

目录

contents

第一章

行列式

本章知识结构网络

- 行列式
  - 概念 → 不同行不同列元素乘积的代数和（共$n!$项）
  - 性质
    - 经转置行列式的值不变
    - 某行有公因数k,可把k提到行列式外
    - 某行所有元素都是两个数的和，则可写成两个行列式之和
    - 两行互换行列式变号
    - 某行的k倍加至另一行，行列式的值不变
  - 展开式 → 代数余子式
    - $|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$（按$i$行展开）
    - $|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$（按$j$行展开）
  - 计算
    - 数字型
      - 三角化法
      - 公式法
      - 递推法
    - 抽象型
      - 用行列式性质
      - 用矩形性质
      - 用特征值　$|A|=\prod\lambda_i$，相似
  - 应用
    - $Ax=0$有非零解
    - 伴随矩阵求逆法
    - 线性相关（无关）判定
    - 可逆的证明
    - 全排列和对换
    - 特征值计算
    - 二次型正定判定

对于二、三阶行列式有

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

注意:这样的计算方法对 4 阶及 4 阶以上行列式不适用.

本章知识要点

(1) 对行列式的性质 3 要理解正确. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$, 有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]$, 由于行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 中每一行都是两个数的和, 所以若用性质 3 把行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 拆开, 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 应当是 2^n 个 n 阶行列式之和. 因此, 一般情况下 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

特别地,

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & 0-a_{12} & 0-a_{13} \\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} \\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & -a_{32} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda & 0 \\ -a_{31} & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{33} & \lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} \\ 0 & \lambda & -a_{22} \\ 0 & 0 & -a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{23} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right)\lambda$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(2) 要会用行列式的性质及展开定理计算数字型行列式.

(3) 要熟悉抽象型行列式的计算.

(4) 要了解全排列的定义及对换的性质.

知识点归纳

一、二阶与三阶行列式

1. 二阶行列式

(1) 定义

二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}$.

(2) 运算规律

对角线法则：二阶行列式的值等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

(3) 应用

二元一次方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$的解，可用行列式来表达：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D},$$

式中，D 为方程组的系数行列式，D_1 和 D_2 分别是将 D 的第一列和第二列换成常数列而得到的行列式.

2. **三阶行列式**

(1) 定义

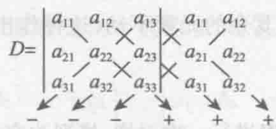
三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

(2) 运算规律

对角线法则：三阶行列式的值等于主对角线方向上三个乘积之和减去副对角线方向上三个乘积之和所得的差.

温馨提示 三阶行列式的运算结果，共有六项，其中 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$ 来自三条主对角线上三个元素的乘积，前面是正号；$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ 来自三条副对角线上三个元素的乘积，前面是负号. 可以借助下列图形帮助记忆：



即在行列式后面补上前 2 列，则与主对角线方向平行的三项为正，与次对角线方向平行的三项为负.

(3) 应用

三元一次方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$的解，可用下列行列式来表达：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D},$$

式中，D 为方程组的系数行列式，$D_j\ (j = 1,2,3)$ 是将 D 的第 j 列换成常数列而得到的行列式.

温馨提示 ① 三阶行列式展开共有 6 项;② 每项三个元素,来自不同的行和不同的列(即每行每列各有一个元素);③ 三项带正号,三项带负号.

二、全排列和对换

1. 全排列

(1) 定义

把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列.

(2) 全排列数

n 个不同元素的所有排列的总数:$P_n = n!$.

2. 逆序数

(1) 逆序

在一个排列中,若某两个元素的先后次序与标准排列的次序不同,就说有一个逆序.

温馨提示 尽管标准排列可以事先任意设定,但通常以从小到大的顺序为标准顺序.

(2) 逆序数

一个排列中所有逆序的总数,叫做这个排列的逆序数.

(3) 奇排列,偶排列

逆序数为奇数的排列称为奇排列;逆序数为偶数的排列称为偶排列.

(4) 常用结论

排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 321$ 的逆序数为$\dfrac{n(n-1)}{2}$.

三、对换

1. 对换的定义

在排列中,将任意两个元素对调,其余的元素不动,这种作出新排列的手续称为对换.将两个相邻元素对换,称为相邻对换.

2. 对换的性质

(1) 将一个排列中的任意两个元素进行一次对换,排列改变奇偶性.

(2) 将奇排列变成标准排列所需的对换次数为奇数,将偶排列变成标准排列所需的对换次数为偶数.

(3)n 个自然数($n>1$) 共有 $n!$个 n 级排列,其中奇、偶排列各占一半.

3. 行列式定义的其他形式

n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum^{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

三、n 阶行列式

定义　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,该项的前面带正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,该项的前面带负号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \quad (1.1)$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 式(1.1) 称为 n 阶行列式的完全展开式.

例如,若已知 $a_{14}a_{2j}a_{31}a_{42}$ 是四阶行列式中的一项,那么根据行列式的定义,它应是不同行不同列元素的乘积. 因此必有 $j=3$.

由于 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 列的逆序数.

$\tau(4312)=3+2+0=5$ 是有数,所以选项所带符号为负号.

四、行列式的性质

(1) 经转置的行列式的值不变,即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$. 这表明在行列式中行与列的地位是对等的,因此,行列式的行所具有的性质,对于列亦具有. 为简洁,下面仅叙述行的性质.

(2) 行列式中某一行各元素如有公因数 k,则 k 可以提到行列式符号外. 特别地,若行列式中某行元素全是零,则行列式的值为零.

(3) 如果行列式中某行的每个元素都是两个数的和,则这个行列式可以拆成两个行列式的和. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ l & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ l & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ l & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

【注】 由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 每行元素都是两个数的和,根据性质 3,行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 应拆成 2^n 个行列式之和,故一般情况,$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$,在这里不要出错.

(4) 对换行列式中某两行的位置,行列式的值只改变正负号. 特别地,如两行元素对应相等(或成比例),则行列式的值是零.

(5) 把某行的 k 倍加至另一行,行列式的值不变.

【注】 在行列式计算中,往往先用这条性质作恒等变形,以期简化计算.

五、行列式按行(列)展开

计算行列式的值主要按行或按列展开公式,即

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)\\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\end{aligned}$$

其中 $$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

M_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中去掉第 i 行及第 j 列元素后的 $n-1$ 阶行列式,称之为 a_{ij} 的余子式,而给余子式带有符号即 $(-1)^{i+j}M_{ij}$,则称为 a_{ij} 的代数余子式.

代数余子式的性质除用于按行(列)展开公式计算行列式外,还有两条重要性质:

(1) 只改变 a_{ij} 所在行或列中元素的值并不影响其代数余子式 A_{ij}. 特别地,A_{ij} 与 a_{ij} 的取值没有关系. 例如,两个行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2\\ 3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8\end{vmatrix} 与 \begin{vmatrix} x & y & z\\ 3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8\end{vmatrix}$$

的 a_{1j} 并不相同,但第一行元系的代数余子式 A_{1j} 是完全一样的.

(2) 行列式一行(列) 元素与另一行(列) 对应元素的代数余子式乘积之和必为零. 即

$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$,

$a_{1j}A_{1k}+2_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0(j\neq k)$.

几种特殊的行列式

(1) 上(下) 三角行列式等于其主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & *\\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0\\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 关于副对角线,其计算公式为

$$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n}\\ & & a_{2n-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n}\\ & & a_{2n-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & *\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

(3) 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

(4) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

(5) 特征多项式

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + s_2\lambda - |\boldsymbol{A}|$$

其中 $s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

典型例题解析

Ⅰ 二阶、三阶以及 n 阶行列式

例 1 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$ ________.

分析　把第 2 行加至第 1 行，提取公因式，即为范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

解题要点：本题主要考察三阶行列式的计算，属于基本题型.

例 2　计算

$$D = \begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

分析　各列均加至第 1 列，并按第 1 列展开有

$$D = \begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{4} a_i & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix} = \left(x+\sum_{i=1}^{4} a_i\right)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

$$D = x^3\left(x+\sum_{i=1}^{4} a_i\right).$$

解题要点：本题主要考察行列式的简单计算及化简技巧.

例 3　4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

分析　对本题可用逐行相加的技巧，第一行的 x 倍加至第二行，然后第二行的 x 倍加至第三行，如此继续，有

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_1x^2+a_2x+a_3 & 0 & 0 & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_1x^2+a_2x+a_3 & 0 & 0 & -1 \\ a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
=(a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)(-1)^{4+1}(-1)^3
$$

$$
=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4.
$$

解题要点:本题主要考察行列式的简单计算及化简技巧.

例 4 4 阶行列式

$$
D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_.
$$

分析　对于爪型行列式,将其转化为上(或下)三角行列式.

$$
D=2\cdot 3\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=24\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=24\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=-2.
$$

解题要点:对于 |↖| 与 |↘| 型行列式,可用主对角线元素化其为上(下)三角型来计算.

对于 |↙| 与 |↗| 型行列式,可用副对角线元素化其为 |◺| 或 |◿| 型来计算.

例 5 计算行列式

$$
D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}
$$

之值,其中 $a_i\neq 0(i=2,3,4)$.

解　第 i 行提出 a_i,再把第 i 行的 -1 倍加至第 1 行($i=2,3,4$),得

$$
D=a_2a_3a_4\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a_2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a_2a_3a_4\begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^{4}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a_2a_3a_4\left(a_1-\sum_{i=2}^{4}\frac{1}{a_i}\right).
$$

解题要点:解题技巧同上.

例 6 方程 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$ 的根的个数为______.

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

分析　问方程 $f(x)=0$ 有几个根，也就是问 $f(x)$ 是 x 的几次多项式. 为此应先对 $f(x)$ 作恒等变形. 将第 1 列的 -1 倍分别加至第 2,3,4 列得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix},$$

再将第 2 列加至第 4 列，行列式的右上角为 0，可用拉普拉斯展开式

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix},$$ 从而知应选(B).

解题要点:本题的关键在于对原行列式进行求解，表达成关于 x 的等式.

例 7 行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}=$______.

分析　从第 1 行开始，依次把每行加至下一行，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

解题要点:此题属于基本题，考察行列式的计算，注意中间的化简技巧.

例 8 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

分析　每列元素都是一个 a 与 $n-1$ 个 b，故可把每行均加至第一行，提取公因式 $a+(n-1)b$，再化为上三角行列式，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

解题要点:本题的关键是提取公因式,然后进行化简,再计算.

例 9 设 n 阶矩阵 $A=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$,则 $|2A|=$________.

分析 $|2\boldsymbol{A}|=2^n|\boldsymbol{A}|$. 对于行列式 $|\boldsymbol{A}|$,先把每行都加至第一行并提取公因数 $n-1$,然后再把第一行的 -1 倍分别加至其他各行.

$$|\boldsymbol{A}|=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \iddots & 0 & 1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & -1 & \\ & \iddots & & \\ -1 & & & \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)}(n-1).$$

故 $$|2\boldsymbol{A}|=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)}2^n(n-1).$$

解题要点:本题的关键是通过适当的化简,提取公因式,再求解.

例 10 计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=$________.

分析 三角化法用每行都加至第一行的技巧,例如把第 2 行的 -4 倍加到第 1 行,再把第 3 行的 13 倍加到第 1 行,…