



Enlightening Symbols



啟蒙的符號

數學符號的誕生、演化和隱藏的力量

一部符號簡史，跨越想像世界和經驗世界的思維演化史！

約瑟夫·馬祖爾 (Joseph Mazur) 著
 洪萬生、洪贊天、英家銘、黃俊瑋、黃美倫、鄭宜瑾 譯

Short History of Mathematical Notation and Its Hidden Powers



怎麼來的？沒有數學符號的世界是什麼樣子？

及文明的起源、東西文化的交融、心理學的解釋、歷史的定義，
 世界帶來何種天翻地覆的變化，讓我們得到什麼、失去什麼？



Enlightening
Symbols

啓蒙 的符號

A Short History of Mathematical Notation and Its Hidden Powers

約瑟夫·馬祖爾 (Joseph Mazur) 一著
洪厲生、洪寶天、孫家銘、黃俊璋、黃美倫、鄭宜瑾 一譯

數學符號的誕生、演化和隱藏的力量

Enlightening Symbols: A Short History of Mathematical Notation and Its Hidden Powers by Joseph Mazur
Copyright © 2014 by Joseph Mazur
This translation published by agreement with the Stuart Agency through The Grayhawk Agency.
Traditional Chinese translation copyright © 2015 by Faces Publications, a division of Cité Publishing Ltd.
All Rights Reserved.

科普漫遊 FQ2011

啟蒙的符號

數學符號的誕生、演化和隱藏的力量

作者 約瑟夫·馬祖爾 (Joseph Mazur)
譯者 洪萬生、洪贊天、英家銘、黃俊瑋、黃美倫、鄭宜瑾
副總編輯 劉麗真
主編 陳逸瑛、顧立平
美術設計 陳瑀聲

發行人 涂玉雲
出版 臉譜出版

城邦文化事業股份有限公司
台北市中山區民生東路二段141號5樓

電話：886-2-25007696 傳真：886-2-25001952

發行 英屬蓋曼群島商家庭傳媒股份有限公司城邦分公司
台北市中山區民生東路二段141號11樓

客服服務專線：886-2-25007718；25007719

24小時傳真專線：886-2-25001990；25001991

服務時間：週一至週五上午09:30-12:00；下午13:30-17:00

劃撥帳號：19863813 戶名：書虫股份有限公司

讀者服務信箱：service@readingclub.com.tw

香港發行所 城邦（香港）出版集團有限公司

香港灣仔駱克道193號東超商業中心1樓

電話：852-25086231 傳真：852-25789337

E-mail：hkcite@biznetvigator.com

馬新發行所 城邦（馬新）出版集團 Cité (M) Sdn Bhd

41, Jalan Radin Anum, Bandar Baru Sri Petaling, 57000 Kuala Lumpur, Malaysia

電話：603-90578822 傳真：603-90576622

E-mail：cite@cite.com.my

初版一刷 2015年6月11日

城邦讀書花園
www.cite.com.tw

ISBN 978-986-235-419-3

版權所有·翻印必究 (Printed in Taiwan)

定價：399元

(本書如有缺頁、破損、倒裝，請寄回更換)

導言	11
定義	25
插圖註記	27

● 第一部

數碼

第 1 章 引人好奇的開端	35
第 2 章 一些古代數系	45
第 3 章 絲路與波斯御道	65
第 4 章 印度的禮物	77
第 5 章 抵達歐洲	97
第 6 章 阿拉伯的禮物	109
第 7 章 《計算書》	115
第 8 章 起源之辯	127

● 第二部

代數

第 9 章 沒有符號	145
第 10 章 丟番圖的《數論》	157
第 11 章 大術	177
第 12 章 符號嬰兒期	187
第 13 章 羞怯的符號	201
第 14 章 尊嚴的階級制度	209

第 15 章	母音與子音	219
第 16 章	爆發	231
第 17 章	符號目錄	243
第 18 章	符號大師	249
第 19 章	最後一位魔術師	255

● 第三部

● **符號的力量**

第 20 章	在心靈交會之處	269
第 21 章	優良符號	283
第 22 章	看不見的大猩猩	289
第 23 章	心智圖像	311
第 24 章	結語	319
附錄 A	萊布尼茲的記法	329
附錄 B	牛頓的 x^n 流數	333
附錄 C	實驗	335
附錄 D	將複數視覺化	339
附錄 E	四元數	341
謝辭		343



Enlightening
Symbols

啓蒙 的符號

A Short History of Mathematical Notation and Its Hidden Powers

約瑟夫·馬祖爾 (Joseph Mazur) 一著
洪胤生、洪賢天、英家銘、黃俊瑋、黃美倫、鄭宜瑾 一譯

數學符號的誕生、演化和隱藏的力量

獻給我的大哥巴瑞 (Barry)
他從 0 開始教導我

目次

第一章 緒論	1
第二章 經濟學概論	10
第三章 市場經濟與市場機制	25
第四章 消費者行為與市場需求	45
第五章 生產者行為與市場供給	65
第六章 市場均衡與市場效率	85
第七章 政府干預與市場失靈	105
第八章 消費者剩餘與生產者剩餘	125
第九章 消費者權益保護	145
第十章 消費者政策與法規	165
第十一章 消費者運動與社會責任	185
第十二章 消費者教育與宣傳	205
第十三章 消費者組織與協會	225
第十四章 消費者國際化與全球趨勢	245
第十五章 消費者未來發展與挑戰	265

導言	11
定義	25
插圖註記	27

● 第一部

數碼

第 1 章 引人好奇的開端	35
第 2 章 一些古代數系	45
第 3 章 絲路與波斯御道	65
第 4 章 印度的禮物	77
第 5 章 抵達歐洲	97
第 6 章 阿拉伯的禮物	109
第 7 章 《計算書》	115
第 8 章 起源之辯	127

● 第二部

代數

第 9 章 沒有符號	145
第 10 章 丟番圖的《數論》	157
第 11 章 大術	177
第 12 章 符號嬰兒期	187
第 13 章 羞怯的符號	201
第 14 章 尊嚴的階級制度	209

第 15 章	母音與子音	219
第 16 章	爆發	231
第 17 章	符號目錄	243
第 18 章	符號大師	249
第 19 章	最後一位魔術師	255

● 第三部

● 符號的力量

第 20 章	在心靈交會之處	269
第 21 章	優良符號	283
第 22 章	看不見的大猩猩	289
第 23 章	心智圖像	311
第 24 章	結語	319
附錄 A	萊布尼茲的記法	329
附錄 B	牛頓的 x^n 流數	333
附錄 C	實驗	335
附錄 D	將複數視覺化	339
附錄 E	四元數	341
謝辭		343

啓蒙 的符號

導言

一位數學家、一位音樂家和一位心理學家走進一間酒吧……

幾年前，在我壓根沒想過自己會寫一本關於符號史的書之前，我與一些同事在科莫湖邊貝拉吉歐村（Bellagio）的一間小酒吧 Cava Turacciolo，曾有過一段對話。那位心理學家聲稱，符號在人類發展出言辭語言之前早已存在多時，而這些符號植根於人類最基本且原始的思想。那位音樂家則指出，現代樂譜主要源於生活在第一個千禧年之交的本篤會修士桂多·達賴左（Guido d'Arezzo），但一種更原始的符號記法形式幾乎可追溯至腓尼基人的手稿。而我，就是那位數學家，我接下來說的事讓我的朋友們大吃一驚。我告訴他們，除了數碼之外，數學符號——甚至代數方程式——都是相當近代的發明，而且幾乎所有數學式子在 15 世紀末之前都是文辭式的（rhetorical）。

「什麼？！」心理學家大吼說：「那乘法運算呢？你是要告訴我們沒有用來『相乘』的符號？」

「16 世紀之前沒有……也許甚至是 17 世紀。」

「那麼等式呢？『等於』何時出現的？」音樂家問道。

「不早於……嗯……16 世紀。」

「但是歐幾里得無疑使用了加的符號。」心理學家說：「那畢氏定理呢，這個定理涉及了一直角三角形的邊長平方相加？」

「不……12 世紀之前沒有代表『加』的符號！」

當我們品味啜飲著昂貴的巴羅洛紅酒（Barolo）時，現場陷入一陣沉思靜默。

後來證明，我的說法並不正確。更久遠之前，早在西元前 18 世紀，埃及人便使用了表示加和減的象形文字，以人們跑過來或遠離的圖形，分別代表數量的加或減。而不時地，數學文本中的作者大膽利用符號來作為表達的媒介。因此，從許多例證可看出，他們嘗試以圖像式記號來表示文字或甚至整個片語。西元前 2 世紀，巴赫沙里手稿（*Bakhshālī manuscript*）中用看起來像現代加號的符號來記錄負數。3 世紀，亞歷山卓的丟番圖（Diophantus of Alexandria）使用一個希臘字母來表示未知數，並利用類似朝上的箭號圖形來代表減。7 世紀，印度數學家婆羅摩笈多（Brahmagupta）使用小黑圓點，代表我們現在稱作「零」的這個新數目。到了 15 世紀下半葉，現代的符號才開始羞怯地進入數學的世界。當然，長久以來，人類用以表示整數的符號一直存在。

在小酒館那一晚，我沒意識到自己估算符號使用的時間應該再早幾個世紀。可以確定的是，丟番圖在 3 世紀已用了一些他自己的標示方式；然而，12 世紀之前，符號並未在符號化的層次上進行運算式操作——意即未被使用於方程式的純符號式運算。或許我該宣稱，正確的說法是，16 世紀之前，**大部分**數學式子都是文辭式的，把大家的驚奇程度推至最高點。

自從那次談話之後，我發現絕大多數人對於 16 世紀之前的數學記法不是真正的符號這件事，非常驚奇。我們也想知道的是，以符號的形式來討論代數，有什麼樣的好處？又有什麼損失呢？

追溯符號的根源，可知它們是一種藉由物質表象或訊息傳遞中的模式與構制，來進行感知、認識與創造意義的手段。

「symbol」（符號）這個字來自希臘文裡代表「token」（象徵）或「token of identity」（身分的象徵）之意的字，它結合兩個