《著名重点中学各科学习指导与测试》

高一代数

潘慰高　主编
金立建　编写

南京大学出版社

著名重点中学各科学习指导与测试

高一代数

主编　潘慰高
编写　金立建

南京大学出版社
1996・南京

著名重点中学各科学习指导与测试

高一代数

潘慰高　主编

金立建　编写

*

南京大学出版社出版

（南京大学校内　邮编 210093）

江苏省新华书店发行　　武进市第三印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 9.75　字数 217 千

1994 年 5 月第 1 版　　1996 年 5 月第 3 次印刷

印数 9 101—19 100

ISBN 7-305-02266-7/O・147

定价：7.40 元

出版说明

为了帮助中学生学好基础知识，掌握基本的技能技巧，训练思维方法，提高解题能力，我社组织了南京师范大学附中、金陵中学等著名重点中学的特级师师、高级教师，编写了这套"著名重点中学各科学习指导与测试"丛书，它包括初高中语文、英语、数学、物理、化学五个学科。

本丛书紧扣教材，每一节分三个部分：第一部分为知识要点，提纲挈领，突出重点要点，对复习起指导作用；第二部分为学习指导，通过典型例题的分析评述，着重指导解题的思想与方法，提高解题的技能技巧，加强对基础知识和基本技能的训练，以提高学生解题的自觉性、科学性、技巧性；第三部分为练习与测试，供学生用以训练、巩固和提高基本知识、基本技能和基本方法。

本丛书的作者们有厚实的业务基础，丰富的教学经验，培养了一批又一批基础扎实、思维敏捷、作风过硬、能力卓著的优秀学生，在国内享有较高声誉。本丛书是他们数十年经验的总结，智慧的结晶，相信本丛书是广大中学生的良师益友，对指导学习、锻炼思维、提高分析解题能力，掌握基本的知识体系是大有裨益的。

南京大学出版社

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

本章主要内容是在引入集合的概念、集合同集合之间的关系以及映射的基础上，进一步阐明函数的概念，研究函数的单调性、奇偶性及其反函数，并具体研究了幂函数、指数函数和对数函数以及简单的指数方程和对数方程等。

一、集合的概念

（一）知识要点

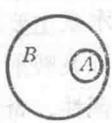
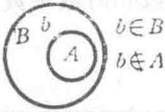
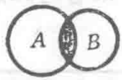
集合与元素，集合的表示方法。（表1-1）

表 1-1　集合和元素

基本概念	集合的意义	把确定的彼此不同的一些对象作为一个整体来考虑，便说这个整体为一个集合（常用A，B，C，…表示）
	元素	集合里的各个对象（常用a，b，c，…表示）
	元素和集合的关系	$a\in A$或$a\notin A$，两者必居其一
集合表示法	列举法	把元素（元素是无序、互异的）一一列出，如$\{1,2,3\}$
	描述法	把元素的公共属性描述出来，如$\{x\mid 2x-7<0\}$
	图示法	画一个圆，用圆内的点表示集合的元素，圆外的点表示不是集合的元素，不同的集合用不同的圆表示
几种数集的符号		N—自然数集，Z—整数集，Q—有理数集，R—实数集，C—复数集

子集、真子集、交集、并集、补集、空集、全集、集合的相等。（表1-2）

表 1-2 集合之间的关系和运算

名 称	记 号	定 义	图 示
子 集	$A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$	对于两个集合A和 B，如果集合A的每一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集	
真子集	$A\subset B$ 或 $B\supset A$	如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集	
等 集	$A=B$	对于两个集 合A、B，如果$A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么称集合A和集合B相等	
交 集	$A\cap B$	由同时属于A和B的一切元素所组成的集合，叫做集合A和B的交集	
并 集	$A\cup B$	由属于A或者属于B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的并集	
空 集	$\varnothing$	不含任何元素的集合叫做空集	
全 集	I	在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常常是某一给定集合的子集，这个给定的集合叫做全集	
补 集	$\overline{A}$	已知全集I，$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元数组成的集合，叫做集合A的补集	

（二）学习指导

1．学习要求

（1）理解集合、子集、交集、补集的概念。了解空集和全集的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合。

（2）掌握集合中元素的性质——确定性、互异性和无序性。并注意这些性质在解题中的应用。

（3）注意区分元素对集合的隶属关系（$\in$、$\notin$），两个集合之间的包含关系（$\subseteq$，$\subset$，$\not\subset$等），及两个集合相等关系的意义。在集合的元素不太多时，会不重不漏地写出所有的子集或真子集。

（4）能用集合的观点说明一些简单的问题。

2．集合是数学中最原始的概念之一，我们不能用其他更基本的概念来给它下定义，所以也把它叫做不定义的概念或原始概念，其他如点、直线、平面等概念也都属于原始概念。中学数学教材的许多内容渗透了集合论的思想和方法，课本把集合描述为"一组对象的全体"，并指出"一组对象"（集合中的元素）应该是"确定的"，"互异的"。也就是说，"集合"可理解为那些确定的，能够彼此区分的事物汇集的整体。集合中的元素被看作是性质上毫无区别的对象，集合的边界是确定的、清晰的，它着眼于确定哪些元素属于集合。对一个具体研究对象元素，它与一个给定的集合A的类属关系，只能是要么属于A，要么不属于A，二者必居其一，且仅居其一。

3．集合中的元素具有三个特性：

（1）确定性。任何一个对象都能被确切地判断是集合中的元素或不是集合中的元素。即给定集合 A，x 是某一具体对象，则 $x \in A$ 或 $x \notin A$ 必有一种且只有一种关系成立。

（2）互异性。同一集合中不应重复出现同一元素，因为一个给定集合中的元素，指属于这个集合的互不相同的个体（或对象）。

（3）无序性。用列举法表示的集合中的元素与顺序无关。但在表示某些无限集时，如果通过列出该集合中的部分元素，可以提供某种规律，使人们能由此规律明显地、正确地找出其余的元素，那么在书写时应该显示其规律并用省略号代表其余的元素。例如：100以内的自然数的集合可记作 $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$；同样，所有正偶数组成的集合可记作 $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$。

例1 设 $A=\{x \mid x^2+(b+2)x+b+1=0,\ b \in \mathrm{R}\}$，求 A 中所有元素的和。

解 $\because \Delta=(b+2)^2-4(b+1)=b^2 \geqslant 0$，$\therefore$ 方程有实数解，由韦达定理 $x_1+x_2=-(b+2)$，$\therefore$ A 中所有元素的和

$S=-(b+2)$。

评析 ① 初看之下，上述解法并无错误。其实它的错误在于忽略了集合中元素的“互异性”。当 $b=0$ 的，由于 $\Delta=0$，故方程 $x^2+(b+2)x+b+1=0$ 有二等根 $x_1=x_2=-\dfrac{b+2}{2}=-1$。此时方程的解集 $A=\{-1\}$，$\therefore S=-1$ 故而 $S \neq x_1+x_2$。因而本题的正确答案是：

$$S=\begin{cases}-(b+2) & b\neq 0,\\ -1 & b=0.\end{cases}$$

② 在用集合来表示方程的解集时，要注意到集合中元素的互异性，如方程$(x-1)^2(x+2)=0$的解集，不能表达成$\{1, 1, -2\}$，而应该写成$\{1_{(2)}, -2\}$，其中元素1的右下角括号内的2，表明1是方程的一个二重根，但在解集中只算作一个元素。

例2 已知$A=\{x, xy, \lg(xy)\}$，$B=\{0, |x|, y\}$，若$A=B$，求x，y。

解 显然，要使$\lg(xy)$有意义，必须$xy>0$，$\therefore x\neq 0$，$y\neq 0$。即A中的元素x，xy都不可能与B中的元素0对应。于是只能有$\lg(xy)=0$。

$$\therefore \quad xy=1 \quad ①$$

$$\therefore \quad A=\{x, 1, 0\},$$

再考虑A中的元素1，B中与1对应的元素只能是$|x|$、或y，即 $|x|=1$ 或$y=1$。

若$y=1$，则由①，$x=1$，这时A中有两个元素为1，这与集合的互异性矛盾，$\therefore y\neq 1$。

同理$x\neq 1$， 于是由$|x|=1$，只能得到$x=-1$，由①，$y=-1$，这时$A=B=\{-1, 1, 0\}$。

评析 利用集合中元素的无重复性，判断两集合中元素的对应关系，是解这类题的关键。

4. 集合的表示法有列举法和描述法。列举法是把给定集合中的元素不重不漏、不计次序地一一列出，放在集合符号"{ }"内，描述法表示集合的形式都是$\{x|P\}$，竖线前

面的x是此集合的代表元素，竖线后的P指出元素x所具有的公共属性。两种表示法各有优点，选用哪种方法，要视具体问题而定。例如，集合$\{x\,|-1<x<3\}$不能用列举法来表示，而集合$\{-1, 0, 2\}$不宜用描述法来表示。

例3 下列表述是否正确，说明理由。

(1) Z＝{全体整数}；　(2) R＝{实数集}＝{R}；

(3) $\{(x, y)\,|x=1, y=2\}$；　(4) $\{(1,2)\}=\{1, 2\}$。

解 (1) 集合符号"{　　}"已包含有"所有的意思"，因而应写成Z＝{整数}。

(2) "{　　}"就是集合的符号，因而大括号内的文字描述，不应再用"全体"、"所有"、"全部"或"集"等词语，本题的正确写法是：R＝{实数}，而{R}表示以一个实数集为元素的集合，它与R的关系是R∈{R}，用{R}表示实数集显然是不对的。

(3) 由于集合的代表元素为有序实数对(x, y)，因而该集合表示直角坐标平面上的点集，这里$x=1$和$y=2$之间用"，"号连接，说明它们之间是并列关系，很易使人误解为该集合表示直线$x=1$或直线$y=1$。正确的写法是$\{(x, y)\,|x=1$且$y=2\}$或$\left\{(x, y)\,\middle|\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\right\}$。

(4) $\{(1, 2)\}$表示直角坐标平面中的一点$(1, 2)$，而$\{1, 2\}$是数1，2的集合，它们是不可能相等的。

5．集合的交、并、补，其实质乃是逻辑关系的运算——且、或、非。因而表述集合的交集、并集和补集，只需着眼于"关系"自身，而无需顾及元素的具体属性。一般都可用韦恩图进行直观模拟。

在了解集合的子、交、并、补的定义的基础上，应当学会使用更精炼的数学语言的定义，例如：

$A\subseteq B$，　对任意$x\in A$，都有$x\in B$；或对任意$x\notin B$，都有$x\notin A$。

$A\subset B$，　对任意$x\in A$，都有$x\in B$，并且至少存在一个$x_0\in B$，有$x_0\notin A$。

$A\nsubseteq B$，至少存在一个$x_0\in A$且$x_0\notin B$。

$A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$。

$A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$。

$\overline{A}=\{x\mid x\in I且x\notin A\}$。

(5) 子集、交集、并集和补集的一些性质(详见表1-3)。

表 1-3

	子　集	交　集	并　集	补　集
性质	(i) $A\subseteq A$; (ii) $\varnothing\subseteq A$; (iii) $A\subseteq B$, $B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$, $A\subset B, B\subset C\Rightarrow A\subset C$.	(i) $A\cap A=A$; (ii) $A\cap\varnothing=\varnothing$; (iii) $A\cap B=B\cap A$.	(i) $A\cup A=A$; (ii) $A\cup\varnothing=A$; (iii) $A\cup B=B\cup A$.	(i) $A\cup\overline{A}=I$; (ii) $A\cap\overline{A}=\varnothing$; (iii) $\overline{\overline{A}}=A$. (iv) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.
		$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$, $A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.		

例4　0与$\{0\}$，1与$\{质数\}$，$\{0\}$和$\{x\mid x^2+1=0,\ x\in R\}$之间分别有什么关系。

解 （1）0表示一个具体的数，$\{0\}$表示只含有一个元素0的集合。它们之间的关系是：$0\in\{0\}$。

（2）{质数}表示全体质数的集合，1不是质数，$\therefore$ $1\notin$ {质数}。

（3）$\because$ $\{x\,|x^2+1=0,\ x\in R\}=\varnothing$，而$\varnothing\subset\{0\}$，

$\therefore$ $\{x\,|x^2+1=0,\ x\in \mathrm{R}\}\subset\{0\}$。

评析 ①元素与集合之间是个体与整体的关系，它们之间是属于、不属于的关系，不存在大小与相等的意义。例如只能是$0\in\{0\}$，而不能是$0=\{0\}$。

② 集合与集合之间存在着包含、相等与不等关系。要注意区别“包含于”、“包含”、“真包含”、“不包含”这些概念的不同涵义与不同表示法。

③ 空集是任何非空集合的真子集。这一点在解题时不可忽略，例5的错误要注意防止。

例5 已知$A=\{x\,|x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x\,|ax-1=0\}$，若$B\subset A$，求a的值。

解 $\because$ $A=\{-1,\ 3\}$。令$\frac{1}{a}=-1$ 和$\frac{1}{a}=3$ 得 $a=-1$ 或 $a=\frac{1}{3}$。

评析 本题遗漏了一解：$a=0$，$\because$ 当$a=0$时 $B=\varnothing$，此时仍有$B\subset A$。故 a 的值应是三个：-1、$\frac{1}{3}$和 0 。

（三） 测试题 1-1

一、选择题

1．设全集$I=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$，A，B为I的子集，若

$A\cap B=\{b\}$, $\overline{A}\cap B=\{d\}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\{a, e\}$. 则下列结论正确的是(   )。

(A) $a\notin A$, $c\notin B$　　(B) $c\notin A$, $e\notin B$

(C) $a\in A$, $a\notin B$　　(D) $c\in A$, $e\in B$

2. 在以下五个写法中：① $\{0\}\in\{0, 1, 2\}$；② $\varnothing\in\{0\}$；③ $\{0, 1, 2\}\subseteq\{1, 0, 2\}$；④ $0\in\varnothing$；⑤ $0\cap\varnothing=\varnothing$。错误的写法的个数是(   )。

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

3. 设全集I为一小于6的非负整数集，$M=\{1,2,3\}$，$N=\{2, 4, x\}$且$M\cap N$不是$\{1, 2, 5\}$的子集，则x的一个值是(   )。

(A) 1　(B) 3　(C) 5　(D) 6

4. 设$I=R$，$M=\{x\,|x<1+\sqrt{6}\}$，$a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，则下列关系中正确的是(   )。

(A) $a\in\overline{M}$　(B) $\{a\}\in M$　(C) $\{a\}\subset M$　(D) $a\subset M$

5. 集合$\{1, 2, 3\}$的子集总共有(   )。

(A) 5个　(B) 6个　(C) 7个　(D) 8个

6. 说I为全集，A，B为非空集合，又$A\subset B\subset I$，则下列集合中空集为(   )。

(A) $A\cap B$　(B) $\overline{A}\cup B$　(C) $A\cap\overline{B}$　(D) $\overline{A}\cap\overline{B}$

7. 已知$M=\left\{n\,\middle|\,\dfrac{n}{2}\in Z\right\}$，$N=\left\{n\,\middle|\,\dfrac{n+1}{2}\in Z\right\}$，则$M\cap N=$(   )。

(A) $\{0\}$　(B) $\varnothing$　(C) Z　(D) $\{\varnothing\}$

8．设P,Q是两个非空集，且$P\nsubseteq Q,Q\nsubseteq P$，若$M=P\cap Q$，那么$P\cup M=$（　　）。

（A）P　（B）Q　（C）M　（D）$\varnothing$

二、填空

9．设$A=\{$有理数$\}$，$B=\{$无理数$\}$，则$A\cup B$______，$A\cap B$______。

10．已知$I=A\cup B=\{a, b, c, d, e, f\}$，$A\cap B=\{b, c\}$，$A\cap\overline{B}=\{a, f\}$。则$B=$________。

11．选用适当的符号（$\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\subset$，$\supseteq$，$\supset$，$=$等）填空：

（1）0___$\varnothing$；$\{-2\}$___$\{$偶数$\}$；1___$\{$质数$\}$。

（2）$A\cap B$___$A\cup B$；$\overline{A}\cap\overline{B}$___$\overline{A\cup B}$；$\overline{A}\cup\overline{B}$___$\overline{A\cap B}$。

（3）$\{x\,|x=3n+1, n\in\mathrm{N}\}$___$\{x\,|x=6n+1, n\in\mathrm{N}\}$。

（4）$\left\{(x, y)\,\middle|\,\dfrac{y-1}{x-1}=1\right\}$___$\{(x, y)\,|y=x\}$。

12．已知$I=R$，$A=\{x\,|\,|x|>1\}$，$B=\{x\,|\,1-x^2\geqslant 0\}$，则$\overline{A\cap B}=$______。

13．已知$I=Z$，$A=\{x\,|x=2n, n\in\mathrm{Z}\}$，$B=\{x\,|\,x=3n, n\in\mathrm{Z}\}$，则$A\cap\overline{B}=$________。

三、解答题

14．设$I=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$，已知：

（i）$\overline{A}\cup\overline{B}=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$，

（ii）$\overline{A}\cap B=\{3, 7\}$，

(iii) $\overline{B}\cup A=\{2, 8\}$.

画出韦恩图并求A, B。

15．已知集合$A=\{a, a+d, a+2d\}$, $B=\{a, aq, aq^2\}$(其中$d\neq 0$, $q\neq 1$)。若$A=B$,求d, q的值。

16．设集合$A=\{x\,|\,x^2-3x+2=0, x\in R\}$, $B=\{x\,|\,2x^2-ax+2=0, x\in R\}$，若$A\cup B=A$，求$a$的值组成的集合。