普通物理实験

实验物理教研室编

中　山　大　学

一九八四年二月·广州

目录

附录

实验室守则

1. 保持实验室内肃静及整洁
2. 实验前要进行充分预习，预习好方能进入实验室。实验时要用指定的仪器，并对照讲义和实验牌核对仪器，如有缺损要立即报告。
3. 在未了解仪器性能时，切勿动手操作。使用仪器时必须严格遵守操作规定，不许擅自拆卸仪器。
4. 实验中途如发现仪器故障，要立即停止测量；用电的仪器要立即切断电源，并及时报告教师。
5. 联接电路时，未经教师检查不能接通电源。
6. 注意保护仪器，注意节省材料。
7. 实验完毕要关闭电源、煤气、水道，并将实验数据交老师检查，经同意后方可将仪器恢复到实验前状态。
8. 在签到卡片上签名，教师签字后才可离开实验室。

绪 论

物理实验的意义和目的

物理学是自然科学中最基本的科学，是一门实验的科学。人们借助于一定的测量仪器和测量方法，通过实验，求得各物理量之间的数量关系，经过分析推理，确定物理规律，建立起物理理论。已确立的理论回过来指导生产实践和科学实验向前发展，同时接受实践的检验。当发现新的观测，实验结果与物理理论相矛盾时，人们即以新的观点重新审查原有理论，并划分其适用范围，随着实验技术的更加完善和实验方法的更加严密，旧的理论和定律可能在新的实验中显示出它的缺陷来，新的实验事实不能用旧的理论来解释。这时人们又通过新的实验来建立更加完善的理论和定律。这样往复多次，物理学才一步步地发展和完善起来，人们的实践和认识也一步步地更符合客观实际。所以，物理实验是物理学研究的基本手段。我们为了研究物理现象的内在规律和检验物理理论是否正确，必须进行物理实验。

物理实验就是要使学员得到基本的物理实验训练，为学好专业课程和参加四化建设打下良好的基础。具体说来，它的主要目的是：

1. 学习物理实验的基本知识、基本方法和基本的技能。具体地说，就是应该学会使用有关的仪器，掌握有关的实验方法和测量技术，学会有效数字的运算和误差及数据处理的方法，学会分析、归纳、概括实验结果，并能对实验过程或结果存在的问题，做出正确判断。

2. 把学习理论与实验实践联系起来，通过观察和测量，不仅要认识物理现象，而且还要深入地理解其物理实质，从而掌握物理概念和规律。

3. 培养实事求是的工作作风和科学态度，树立辩证唯物主义的世界观。

物理测量和测量结果的处理

一、物理测量

在物理实验中，不仅要定性地观察物理现象的变化过程，而且要对某些物理量进行定量的测量。例如用一米尺测量一物体的长度为 0.6557 m，用一只天平称得一物体的质量为 25.3814 g，用一安培计测一电路中的电流强度为 1.315 A 等等。所谓测量，就是将一未知量与定作单位的同类量进行比较，从而确定未知量是这个单位量的多少倍。测量方式有两种：

1. 直接测量——用一定的测量工具或仪器直接与被测量之量进行比较，而被测之量是工具或仪器上定作单位的量的多少倍。

2. 间接测量——待测之量不是直接由仪器测知，而是通过几个直接测量的量，由一定的关系式计算得知。

实验中，大多数物理量都是由间接测量得到。如重力加速度，透镜的焦距，电子电荷，等等。但随着实验技术的发展，有些物理量既可间接测量，也可直接测量，而究竟采用哪种测量方式，要看实验要求而定。例如电学实验中测量电阻器的电阻值，可由伏特计和安培计（伏安法）间接测量 $R=\frac{V}{I}$，也可用电桥仪器直接测量。但是若要求测量精确度高于百分之一以上时，则必须用电桥仪器测量才能达到。

对某一种物理量进行测量，一般要进行如下几个步骤的工作：

首先要根据实验所要求的精确度，也就是对测量结果误差限度的一定要求，来制订方案并选用仪器。在一定的要求下，要以最小的代价来取得最好的结果。不能要求仪表越高级越好，环境条件（如恒温、恒湿）越稳定越好，测量次数越多越好等等。这样要求是不切实际的。一个物理量的测量可能有不同的方法，各种不同方法的适用范围和测量结果的精确度亦不同。但是所有的测量方法测得的结果都是近似值。一般地说，测量结果越精确，使用的仪器设备条件要求越高，测量方法越复杂。为了保证适当的测量条件所需的准备工作越繁琐。因此，没有必要，则不应该用到特别精确的方法。

一个实验，往往需要测量几个不同的物理量。实验结果的精确度与所有这些直接测量的精确度有关。而各个物理量的测量可以有精确度不同的方法（如单摆实验中长度 l 与摆动周期 T，量热学实验中的质量 m 和温度 t）。因此，在确定各个物理量的测量方法时，应该考虑它们各自的测量精确度，对实验结果的影响。如果各个被测量的精确度限度是不同的，那么其他量的测量精确度不必超过精确度最低的那个量的测量精确度太多。例如，量热学实验中，要测量水和量热器的质量及温度，质量的测量精确度可以达到 0.0001%，而在一般实验里，温度的测量的精确度低于 0.01 %。因此，水和量热器的质量的测量不必用精密天平称衡，使用一般的物理天平就可以了。这是确定测量方法的一般原则。至于如何根据各个物理量的测量精确度对实验结果的影响，来选择各量的测量方法的问题，要用误差理论来处理。

其次，要正确地安装和调整仪器装置，如电学实验应正确地连接电路和选择仪表量程。要注意仪器的使用条件，如测量望远镜或测微目镜是否聚焦于十字叉丝上，螺旋测微计的零线是否对"0"，仪器是否按要求水平或铅直放置，温度、湿度是否符合要求，同时要考虑外界因素的影响。如某种影响可能使测量结果不符合要求时，应设法消除这种影响，否则，测量可能失去意义。

3. 进行实验观测。根据实验内容，注意实验中产生各种现象所需要的条件，并努力实现这些现象。如电表的偏转等，如发现偏转过急或过载，应立即采取制动措施。

4. 读数和记录。在观测的基础上，根据测量仪表、仪器的指示，要及时地正确地读取和记录数据。数据的有效数字要正确地反映仪器的精密度（读到刻度最小分格的 $\frac{1}{10}\sim\frac{1}{2}$）。除测量数据外，还应记录与检验测量结果有关的数据。

5. 处理数据和分析测量结果。根据测量要求，按公式计算测量结果（一般情况下，最后结果应是平均值）及计算误差。并对结果进行分析讨论。

另外，在做电学实验时，必须对实验电路图深入思考，弄清电路中各部件以及仪表的作用，然后正确地连接电路。一般是先连接电源以外的部分，从开关开始（在低压直流电路的情况下，开关先和电源一端相连），按电路图逐点连接下去，直到要接到电源另一端为止。如果有多个回路，要接完一个回路再接另一个。电源两端

接线只能在最后并且在断开开关的情况下接入。电路中正负极性不要接错，仪表（+）端应接在电路中电位高的一端。拆除电路时，先后次序刚好要相反，即先断开开关，除去电源接线（如蓄电池的夹子或交流市电的电源插头），然后再拆除其余部分连线。

在使用普通交流市电做实验时，要注意人身和仪表的安全，在接电路和拆除电路前，都要先断开电源，避免触电。

二 误差基础知识

1. 测量值和误差

我们所要测量的物理量，它的大小是客观存在的，这个量的数值，我们叫做该物理量的"真值"。在我们进行测量时，由于方法的不完善，仪器本身的不准确和人的感觉器官的限制（如眼睛的分辨能力、手的灵活性等），所测得的值只能近似于真值，而不是真值。观测值（N）与真值（N'）之差叫做误差（△N）

即 $\triangle N = N - N'$ 。

误差存在于一切测量之中，而且贯穿测量过程的始终。测量时误差△N虽不能为零，但尽可能减小误差，这是测量中的重要问题。

例如，用单摆测重力加速度 g，理论公式是

$$g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}$$

导出这一公式时忽视了摆的幅角的大小对周期的影响，摆锤不是质点的影响，空气浮力的影响，空气阻力的影响，等等。在测量时，测摆长 l 的米尺肯定和国际规定"米"的标准有偏差；测周期T使用的钟表的1秒也同样和国际规定的"秒"有差异；观测者使用米尺、钟表测量时，由操作及读数中的问题也会使测量值引入误差。可见，用单摆测量重力加速度g时，由于多方面的原因，求出的g值不可能与当地的实际g值完全一致。但是我们希望测量结果尽可能接近真值。所以我们要研究误差产生的原因，误差所遵循的规律，以便采取适当的措施去减小误差。

2. 误差的分类

根据误差产生的原因、性质，可将误差分为：系统误差、偶然

物（84上）006

误差。

系统误差：

系统误差总是使测量结果向一个方向偏离，其数值及符号一定或按一定规律变化。产生的原因有：

① 由于理论不够严密，或测量方法与理论要求有差异而产生，例如，摆的周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 的成立条件是摆角趋于零；用伏安法测量电阻时没有考虑电表内阻的影响等；

② 由于仪器本身的不准确，例如电表的刻度不完全准确；砝码未经校准，其标准值（刻在砝码上的数值）和实际值不符的误差；称质量时由于天平不等臂引入的误差。

③ 实验条件与仪器校准时的条件不同，又未作校正，如电表放置方式不对或受环境的磁场影响。

④ 由于实验者个人的不良习惯和倾向，或实验技术不好引入的误差，例如，一个实验者在读取有视差的指针和刻度时，习惯把自己的头偏向一边，总是读的偏大，或总是读的偏小；如用停表计时，有人常失之过长，有人常失之过短等等。

系统误差不能用增加测量次数来消除，但用更精密的仪器或改善实验条件，建立较完善的理论，改进个人不良习惯，可以逐步消除或减至最小。

偶然误差

在测量时，即使排除了产生系统误差的因素，进行了精心的观测，仍将存在一定的误差，这种误差是由于：

① 判断不准确：多数仪器需要靠眼睛估计到它的最小分格的几分之一，由于测量工作和测量技术的限制，估计出的数值可能每次不相同；

② 涨落情况：在测量时，周围环境条件（如温度、电源电压等）微小而无规则的变动；

③ 外界干扰：如在测量过程中有空气流的冲击，建筑物的震动，天电讯号对无线电测量的干扰等。

④ 定义不精密：如定义理想圆球的直径由于加工技术的限制而处处不相同，在不同位置测量结果不一样。

这些由于偶然的或不确定的因素造成的每一次测量值的无规则的涨落，称为偶然误差，也叫随机误差。由于偶然误差具有不确定性，有时使测量值偏大，有时使测量值偏小，各个测量值分散，其

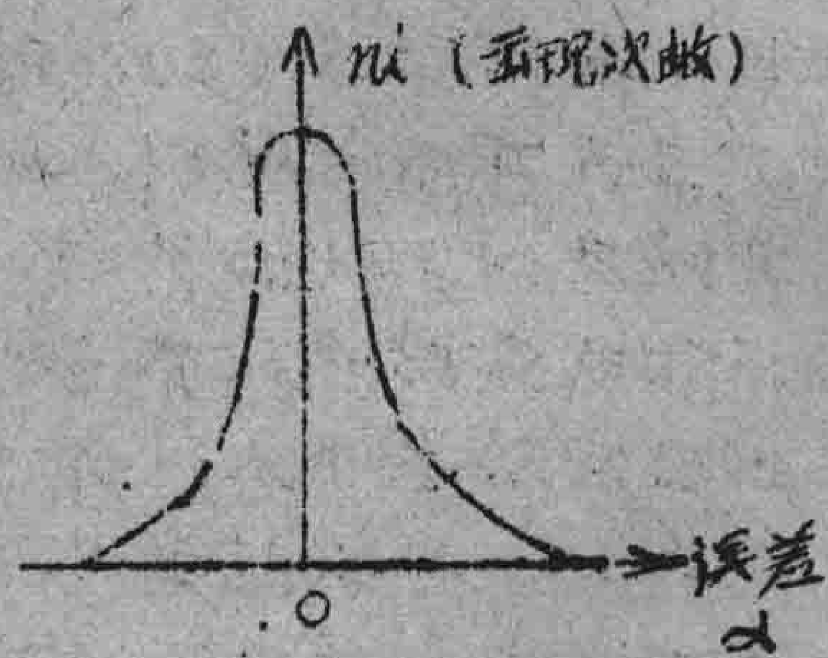
平均值附近。因此，它是不可能被消除的。但是，实践证明，偶然误差服从统计规律。对于每一个个别测量来说，偶然误差的数值和符号是不确定的。当进行多次重复测量时，这些误差的分布遵从下列规律：

i) 在一定的测量条件下，偶然误差的绝对值不超过某一限度

ii) 绝对值相等的正误差与负误差出现的可能性相同；

iii) 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会多，最接近真值的测量值出现的机会最多；

iv) 同一量的相同精密度的测量中，测量次数越多，偶然误差的算术平均值越趋于零，即测量结果的算术平均值越趋接近于真值。



偶然误差的这种有规律分布称为正态分布，分布曲线（当测量次数 n 为无限多次时）如上图。

根据偶然误差的性质，有多种处理偶然误差的理论和方法。

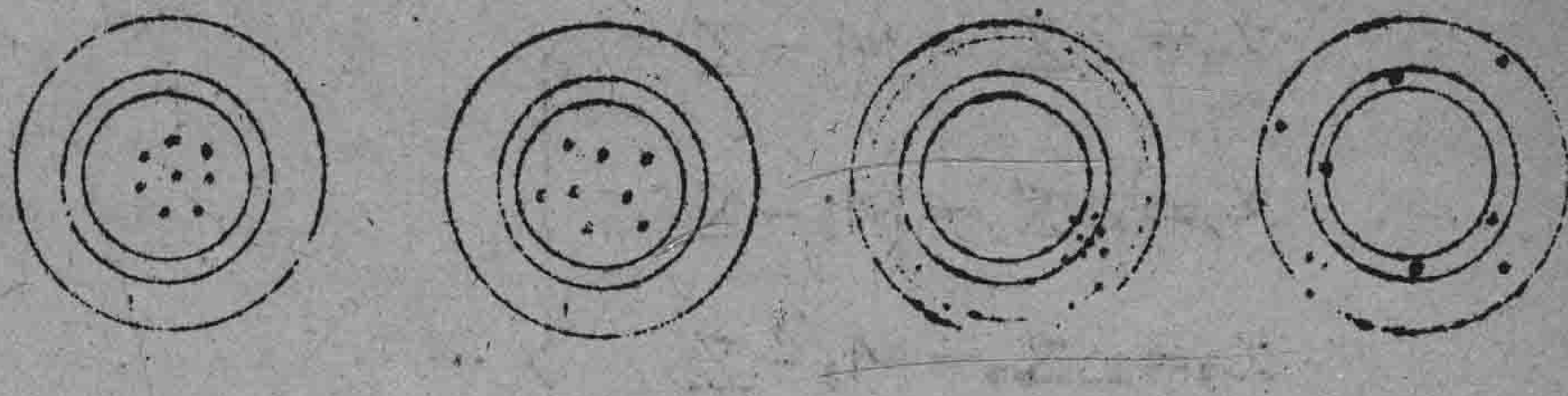
总之，系统误差与偶然误差性质不同，产生的原因不同，处理方法也不同。

误差大小的表示有两种：即绝对误差和相对误差。绝对误差 ΔN 是有单位的，它的单位和被测量的单位相同。相对误差是绝对误差与测量值之比 $\frac{\Delta N}{N}$。它没有单位，一般用一百分数来示。

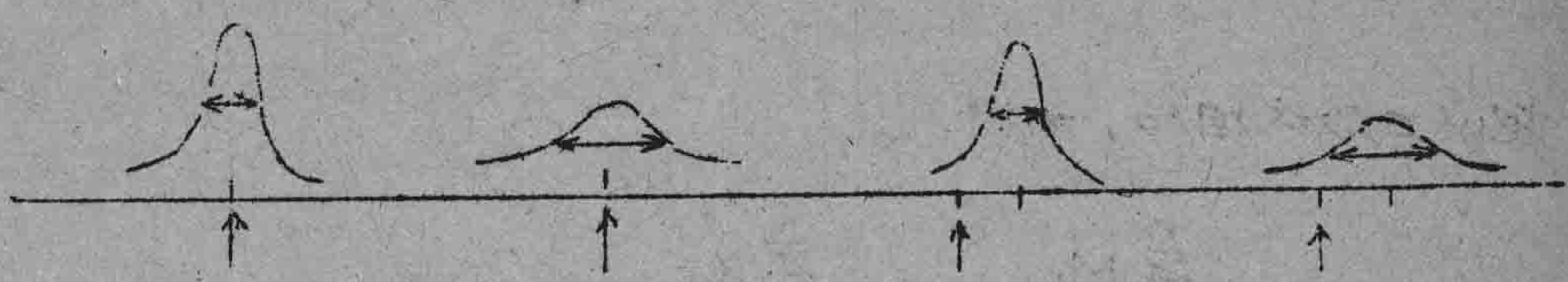
测量的精密度、准确度和精确度，也是用来描述测量误差大小情况的用语。测量的偶然误差小，我们说测量的精密度高；测量的系统误差小，我们说测量的准确度高；如果测量的偶然误差和系统误差都小，则说它的精确度高。

下图说明精密度和准确度的差别：(A) 高精密度、高准确度（即高精确度）；(B) 低精密度、高准确度；(C) 高精密度，低准确度；(D) 低精密度，低准确度。

至于因仪器损坏，设计错误，操作不当等而造成的测量错误，不是测量误差。



(A) (B) (C) (D)



3. 误差的表示及其计算

从前面所示，系统误差可以在实验前和实验过程中（通过仪器的选用、调整和修正等方法）排除或减至最小，而偶然误差总是不可避免的。因此，在数据处理过程中，主要要考虑偶然误差的影响，误差理论主要就是研究偶然误差的规律和它对测量结果的影响。以下所说的误差的表示和计算都是对偶然误差而言。

直接测量值的平均值、偏差和误差

设某物理量的真值为 X，对它进行了 n 次测量，结果是 M_1，M_2，$M_3 \cdots M_n$。它们的算术平均值为：

$$\bar{X}=\frac{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}M_i}{n} \qquad \cdots\cdots(1)$$

有关理论证明，算术平均值 $\bar{X}$ 是这组测量的最近真值（证明可参阅附录）。因此，用算术平均值来表示这个物理量的测量结果。

设各次测量值的误差用 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 表示，即有

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\Delta X_1=M_1-X, \\ x_2=\Delta X_2=M_2-X, \\ x_3=\Delta X_3=M_3-X, \\ \vdots \\ x_n=\Delta X_n=M_n-X, \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad (2)$$

把以上各式相加，可得：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} M_i}{n}-X=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

由(1)式代入得

$$\bar{X}-X=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=\delta \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

平均值 $\bar{X}$ 不等于真值 X。它的误差（用 δ 表示）等于各次测量的误差的平均值。当测量次数 n 为无限大时，$\delta=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ 趋于 0。$\bar{X}$ 趋于 X。这是由于绝对值相等的正、负误差出现的几率相等而相抵消的结果。

由于真值 X 是不知道的，误差 x_1，x_2，…… x_n 及 δ 也无法计算。我们设法用偏差来估计误差的数值范围。

定义：各次测量值 M_1，M_2，…… M_n 与算术平均值 $\bar{X}$ 之差为偏差，以 v_1，v_2 …… v_n 表示。即

$$\left.\begin{array}{l} v_1=M_1-\bar{X}, \\ v_2=M_2-\bar{X}, \\ \vdots \\ v_n=M_n-\bar{X} \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad (4)$$

由(4)中各式相加得：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i}{n} - \overline{X}$$

因为 $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i}{n}$，所以 $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$ 。

即各次测量的偏差之和为0。

为了表示测量的误差，定义平均绝对误差为

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}{n} \quad \text{------} \quad (5)$$

各次测量的误差取绝对值再相加，求平均，其数值要比 $\delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ 大了。以 η 代替 δ，对测量结果的评价比较保守，对初学者来说是比较稳妥的。但其值仍然无法计算，实际工作中就以平均绝对偏差代替平均绝对误差，即

$$\eta \approx \sum_{i=1}^{n} |v_i| / n \quad \text{------} \quad (6)$$

虽然 $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ 并不等于 $\sum_{i=1}^{n} |v_i|$，但作为 $\overline{X}$ 接近于 X 的程度的估计是可行的，而且当 n 为无限多次时，它们的区别就不大了。

平均绝对误差不能反映出那些偏差较大的测量值对测量准确度的影响。因为精密度不同的两组测量值，各自的算术平均值可能相同。因此，在实际应用中多用标准误差衡量测量结果的可信赖程度。

标准误差定义为：

$$\sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots\cdots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \quad \cdots\cdots (6)$$

它是各次测量的误差平方的平均值的平方根。所以又称为均方根误差或方差，经过适当的推导，各次测量的标准误差σ由下式计算：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}} \quad \cdots\cdots \quad (7)$$

按照偶然误差的高斯理论，测量值的标准误差的意义是：一组标准误差为σ的n个测量值，其任一测量值的误差在$\pm\sigma$区域中的概率（可能性）为68.3%，亦即有$n\times 0.683$个测量值落在区$\pm\sigma$区间。

极限误差

标准误差不是测量值误差的极限范围。因为测量值的误差有大约32%的可能是在$\pm\sigma$以外。在实际工作中，有时要了解误差的范围，极限误差就是对误差（指偶然误差）可能范围的一种估计值。一般取标准误差的三倍，即3σ为极限误差。按高斯误差理论，测量值的误差在$\pm 3\sigma$区间的概率为99.7%。

但是以3σ为极限误差的标准较宽，特别在测定次数较少时不甚适用。有些人也常用2σ为极限误差（概率为95%）

单次测量误差的估计

测量均应反复测量多次，但在有的实验中，由于被测量量不断变化，只能在一瞬间读取一个测量值，不能做重复的测量。也有的实验对测量的精密度要求不高，或该测量的误差在整个实验中影响不大，也可以测一次。此时一般是以仪器读数的最小分度值或其二分之一为其单次测量的误差。

但要注意，有的是反复测量时读数值不变，有人只记一个读数值，将它看作是单次测量值，这是不对的。因为单次测量仅仅是测量了一次，如果可能再测的话，不一定还是此值。而多次测量读数值不变，是测量仪器的灵敏度或分辨能力不够。没有显示出较小偶然误差的影响，这说明偶然误差小于仪器的最小分辨值ε。这时标准误差σ是：

$$\sigma=\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

另外，将多次测量读数值不变时的误差认为是零也是错误的。

算术平均值的标准误差：

一组 n 次测量的平均值 $\bar{x}$ 的标准误差为：

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n(n-1)}} \qquad \cdots\cdots \qquad (8)$$

它的意义是：算术平均值的误差在 $\pm\sigma_{\bar{x}}$ 之间的概率为68.3%.

因为 $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，它是随着测量次数的增加而减小，因而增加测量次数能减小平均值的误差。为此要使测量more多测几次，但是测量次数过多，不仅要延长测量时间，也难使测量保持同样稳定的条件。一般 n 常取 10～20次，而在实验课由于时间有限，往往取5～10次。

这样，一个物理量的测量结果，可表示为

$$X = \bar{x} \pm \eta$$

或 $$X = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$$；

它的意义是物理量 X 的数值在 $(\bar{x}-\sigma_{\bar{x}})$ 与 $(\bar{x}+\sigma_{\bar{x}})$ 范围内包含真值的一定可能性（几率），而不能理解成 X 只有 $(\bar{x}-\sigma_{\bar{x}})$ 和 $(\bar{x}+\sigma_{\bar{x}})$ 两个值。

下面举一个例子，说明算术平均值及其误差的计算。

例：用一毫米分格的米尺去测量一个长度，测得数值如下：

测量值 x (cm)	偏差 $v_i \cdot 10^3$ (cm)	偏差 $v_i^2 \cdot 10^6$ (cm^2)
$x_1 = 63.57$	+6	36
63.58	+16	256
63.55	−14	196
63.56	−4	16
63.56	−4	16
63.59	+26	676
63.55	−14	196

测量值 x (cm)	偏差 $v_i \cdot 10^3$ (cm)	偏差 $v_i^2 \cdot 10^6$ (cm²)
63.54	−24	576
63.57	+6	36
63.57	+6	36
63.564	$\left[\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right] \cdot 10^6 = 2040$	

算术平均值 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i$

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(63.57+63.58+63.55+63.56+63.56+63.59+63.55+63.54+63.57+63.57) = 63.564\ (cm)$$

n次测量结果的平均值$\bar{x}$的标准偏差$\sigma_{\bar{x}}$为：

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{2040\times10^{-6}}{10\times9}} = 0.00476 \approx 0.005\ (cm)$$

由于偏差误差本身是一个估计值，所以其结果一般取一位或两位数字。为简单起见，这里只取一位。

测量结果表示为：

$$\bar{x} = (63.564 \pm 0.005)\ 厘米$$

或者

$$\bar{x} = \bar{x}\left(1 \pm \sigma_{\bar{x}}/\bar{x}\right) = 63.564\,(1 \pm 0.008\%)\ 厘米$$

间接测量误差的计算

间接测量的量是由若干个直接测量的量按一定的函数关系计算出来的。由于直接测量的量有误差，间接测量的量自然也会有误差存在，这就是误差的传递。

误差传递的基本公式

设 $N = f(x, y, z \cdots)$　　------　(9)

x、y、z 为独立的物理量，对(9)求全微，有

$$dN = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \cdots \qquad \text{------} \quad (10)$$

(10)式表示，当 x、y、z 有微小改变 dx、dy、dz 时，N 改变 dN。

通常误差远小于测量值，把 dx，dy，dz，dN 看作误差，这就是误差的传递公式了。

有时把(9)取对数后再求微分，有

$$\ln N = \ln f(x, y, z \cdots) \tag{11}$$

$$\frac{dN}{N} = \frac{\partial \ln f}{\partial x}dx + \frac{\partial \ln f}{\partial y}dy + \frac{\partial \ln f}{\partial z}dz + \cdots \tag{12}$$

(10)式和(12)式就是误差传递的基本公式。

其中 $\frac{\partial f}{\partial x}dx$，$\frac{\partial f}{\partial y}dy$，$\frac{\partial f}{\partial z}dz$ 及 $\frac{\partial \ln f}{\partial x}dx$，$\frac{\partial \ln f}{\partial y}dy$，$\frac{\partial \ln f}{\partial z}dz$ 各项叫做分误差。$\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、$\frac{\partial f}{\partial z}$ 或 $\frac{\partial \ln f}{\partial x}$、$\frac{\partial \ln f}{\partial y}$、$\frac{\partial \ln f}{\partial z}$ 叫做误差的传递系数。由公式(10)及(12)可见：一个量的测量误差对于总误差的贡献，不仅取决于其本身误差大小，还取决于误差传递系数。对于和、差函数，用(10)式方便；对于积商的函数，用(12)式方便。

偶然误差的传递和合成

由各部分的分误差组合成总误差，这就是误差的合成。误差传递公式(10)和(12)也包括了误差的合成。

各个独立测量结果的偶然误差，如果用标准误差代表，可以证明，他们的合成方式是方和根合成。即由(10)及(12)式，有

$$\sigma_{\bar N} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_{\bar x}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_{\bar y}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_{\bar z}^2 + \cdots} \tag{13}$$

$$\frac{\sigma_{\bar N}}{\bar N} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2 \sigma_{\bar x}^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2 \sigma_{\bar y}^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2 \sigma_{\bar z}^2 + \cdots} \tag{14}$$

归纳起来，求间接测量结果误差（标准误差的方和根合成）步骤如下：

(1) 对函数求全微分（或先取对数再求全微分）；

(2) 合并同一变量的系数；

(3) 将微分号变为误差号，求平方和，注意各项均用"+"号相连。

表[I]. 常用函数的标准偏差传递公式

函数表达式	标准偏差传递（合成）公式
$N=x+y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
$N=x-y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
$N=xy$	$\dfrac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N=\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{\sigma_N}{N}=\left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$N=\dfrac{x^k y^m}{z^n}$	$\dfrac{\sigma_N}{N}=\sqrt{k^2\left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2+m^2\left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2+n^2\left(\dfrac{\sigma_z}{z}\right)^2}$
$N=Kx$	$\sigma_N=K\sigma_x \quad \dfrac{\sigma_N}{N}=\dfrac{\sigma_x}{x}$
$N=\sqrt[k]{x}$	$\dfrac{\sigma_N}{N}=\dfrac{1}{K}\dfrac{\sigma_x}{x}$
$N=\sin x$	$\sigma_N=\lvert\cos x\rvert\sigma_x$
$N=\ln x$	$\sigma_N=\dfrac{\sigma_x}{x}$

例：用流体静力称衡法测定固体密度的公式为 $\rho=\dfrac{m}{m-m_1}\rho_0$，测得 $m=27.06\pm0.02g$，$m_1=17.03\pm0.02g$；$\rho_0=0.9997\pm0.003g/cm^3$，求 σ_ρ。

解：(1) 取对数，求全微分。