

· 经 / 济 / 科 / 学 / 译 / 丛 ·

Elements of Dynamic Optimization

动态最优化基础

[美] 蒋中一 (Alpha C. Chiang) 著

 中国人民大学出版社

· 经 / 济 / 科 / 学 / 译 / 丛 ·

Elements of Dynamic Optimization

动态最优化基础

[美] 蒋中一 (Alpha C. Chiang) 著

曹 乾 译

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

动态最优化基础/ (美) 蒋中一著; 曹乾译. —北京: 中国人民大学出版社, 2015. 10
(经济科学译丛)
ISBN 978-7-300-22068-0

I. ①动… II. ①蒋…②曹… III. ①动态最佳化-应用-经济 IV. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 248049 号

经济科学译丛
动态最优化基础

蒋中一 著

曹乾 译

Dongtai Zuiyohua Jichu

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

电 话 010-62511242 (总编室)

010-82501766 (邮购部)

010-62515195 (发行公司)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com> (人大教研网)

经 销 新华书店

印 刷 三河市汇鑫印务有限公司

规 格 185mm×260mm 16 开本

印 张 16.75 插页 2

字 数 371 000

邮政编码 100080

010-62511770 (质管部)

010-62514148 (门市部)

010-62515275 (盗版举报)

版 次 2015 年 11 月第 1 版

印 次 2015 年 11 月第 1 次印刷

定 价 42.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

《经济科学译丛》编辑委员会

学术顾问 高鸿业 王传纶 胡代光

范家骧 朱绍文 吴易风

主 编 陈岱孙

副主编 梁 晶 海 闻

编 委 (按姓氏笔画排序)

王一江 王利民 王逸舟

贝多广 平新乔 白重恩

刘 伟 朱 玲 许成钢

张宇燕 张维迎 李 扬

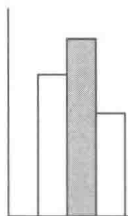
李晓西 李稻葵 杨小凯

汪丁丁 易 纲 林毅夫

金 碚 姚开建 徐 宽

钱颖一 高培勇 梁小民

盛 洪 樊 纲



《经济科学译丛》总序

中国是一个文明古国，有着几千年的辉煌历史。近百年来，中国由盛而衰，一度成为世界上最贫穷、落后的国家之一。1949年中国共产党领导的革命，把中国从饥饿、贫困、被欺侮、被奴役的境地中解放出来。1978年以来的改革开放，使中国真正走上了通向繁荣富强的道路。

中国改革开放的目标是建立一个有效的社会主义市场经济体制，加速发展经济，提高人民生活水平。但是，要完成这一历史使命绝非易事，我们不仅需要从自己的实践中总结教训，也要从别人的实践中获取经验，还要用理论来指导我们的改革。市场经济虽然对我们这个共和国来说是全新的，但市场经济的运行在发达国家已有几百年的历史，市场经济的理论亦在不断发展完善，并形成了一个现代经济学理论体系。虽然许多经济学名著出自西方学者之手，研究的是西方国家的经济问题，但他们归纳出来的许多经济学理论反映的是人类社会的普遍行为，这些理论是全人类的共同财富。要想迅速稳定地改革和发展我国的经济，我们必须学习和借鉴世界各国包括西方国家在内的先进经济学的理论与知识。

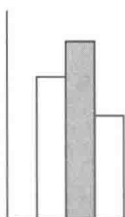
本着这一目的，我们组织翻译了这套经济学教科书系列。这套译丛的特点是：第一，全面系统。除了经济学、宏观经济学、微观经济学等基本原理之外，这套译丛还包括了产业组织理论、国际经济学、发展经济学、货币金融学、公共财政、劳动经济学、计量经济学等重要领域。第二，简明通俗。与经济学的经典名著不同，这套丛书都是国外大学通用的经济学教科书，大部分都已发行了几版或十几版。作者尽可能地用简明通俗的语言来阐述深奥的经济学原理，并附有案例与习题，对于初学者来说，更容易理解与掌握。

经济学是一门社会科学，许多基本原理的应用受各种不同的社会、政治

或经济体制的影响，许多经济学理论是建立在一定的假设条件上的，假设条件不同，结论也就不一定成立。因此，正确理解掌握经济分析的方法而不是生搬硬套某些不同条件下产生的结论，才是我们学习当代经济学的正确方法。

本套译丛于 1995 年春由中国人民大学出版社发起筹备并成立了由许多经济学专家学者组织的编辑委员会。中国留美经济学会的许多学者参与了原著的推荐工作。中国人民大学出版社向所有原著的出版社购买了翻译版权。北京大学、中国人民大学、复旦大学以及中国社会科学院的许多专家教授参与了翻译工作。前任策划编辑梁晶女士为本套译丛的出版做出了重要贡献，在此表示衷心的感谢。在中国经济体制转轨的历史时期，我们把这套译丛献给读者，希望为中国经济的深入改革与发展做出贡献。

《经济科学译丛》编辑委员会



前言

近些年来，很多人请求我扩展《数理经济学基础方法》以包含动态最优化内容。由于那本书的篇幅已够大，我决定将动态最优化的内容单独出书。尽管我将这两部分内容分开了，但本书仍可视为《数理经济学基础方法》的续篇。

这本书叫《动态最优化基础》。顾名思义，这是一本动态最优化的基础教程而不是百科全书。本书详细解释了古典变分法基础以及它的现代近亲——最优控制理论，但未包含微分博弈与随机控制。我没有纳入连续时间情形，因为它需要偏微分方程知识。如果将这些内容纳入，那么我们的阵线将拉得太长。

尽管最优控制理论的出现使得变分法黯然失色，然而我认为不介绍变分法主题的做法并不明智。一方面，很多经典论文是用变分法写成的，即使一些近期论文也使用了这种方法，因此，只有掌握变分法才能更深入地理解这些论文。另一方面，变分法的背景知识有助于更好更全面地理解最优控制理论。对于只对最优控制理论感兴趣的读者来说，他们可以跳过本书第2部分。但我仍强烈建议这样的读者至少阅读以下章节：第2章（欧拉方程），4.2节（凹性与凸性的检验），以及5.1节（无限水平的方法论议题，这些内容也与最优控制理论有关）。

本书的一些特征值得指出。在发展欧拉方程时，我提供的细节比大多数书籍多，因为我想让读者更好地欣赏其中的逻辑之美（2.1节）。对于无限水平问题，我试图澄清一些关于广义积分收敛性条件的常见误解（5.1节）。另外，对于最优控制理论中的无限水平横截条件，一些经济学家宣称自己构造出了能驳斥这种横截条件的反例，我试图指出这些反例不是真正的反例，因为这些作者没有认识到在他们的反例中存在着隐含的固定终止状态（9.2节）。

为了与《数理经济学基础方法》的风格一致，在写此书时我非常耐心，希望此书清晰易读。在行文安排上，在介绍和讨论了数学方法之后，我总是用数值例子、经济学实例以及习题加以强化。在数值例子中，我故意引入了最短距离问题，这个例子简单且有

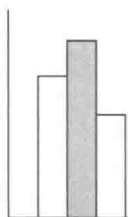
着众所周知的解。我用不同方法构造最短距离问题，并使其贯穿本书。

在选择经济学例子时，我的主要准则是“应景”，即所选的经济模型能够说明特定数学方法。尽管经济学例子主要来自近期论文，但我也没有忽略经典文献。一些经典文献不仅本身值得阅读，它们也有助于说明我们的数学方法，因为它们的模型结构未与亚层面更复杂的假设纠缠在一起。另外，新旧经济学模型交相辉映，这也能让读者初步感受经济思想的发展。例如，从拉姆齐（Ramsey）的古典增长模型（5.3 节）到盖斯（Cass）的新古典增长模型（9.3 节），再到罗默（Romer）的伴随内生技术进步的增长模型（9.4 节），读者能看到分析架构的逐步凝练。类似地，从霍特林（Hotelling）的可耗竭资源古典模型（6.3 节）到福斯特（Forster）的能源使用与污染模型（7.7 节和 8.5 节），读者可以看到社会关注焦点从资源耗尽转移到环境质量。埃文斯（Evans）的古典动态垄断模型（2.4 节）与更近期的里兰德（Leland）的收入最大化企业的动态模型（10.2 节）之间的比较，也能说明经济学家在重塑微观经济方面的探讨。

按照我的教学理念，对于每个经济模型，我都采取了逐步推进的方法——从模型的最初构造到复杂的数学分析，再到最终解。尽管这种处理拉长了篇幅，从而限制了我们能够提供的经济模型个数，但我认为这种详细指引的做法是值得的，因为这会减少读者学习数学时的恐惧和挫折。

在此书写作的过程中，怀俄明大学的 Bruce A. Forster 教授提供了很多评论和建议，他敏锐地指出了原稿中的很多错误和遗漏，使我受益匪浅。然而，由于我没有接受他的所有建议，因此我应该自己对剩下的不完善地方负责。多年以来，我的很多学生使用过这本书的早期书稿，他们的问题和反馈对我也有帮助。本书编辑 Scott D. Stratford 总能在适当的时候鼓励和督促我，让我继续写下去。Joseph Murphy, Sarah Roesser, Cheryl Kranz 的通力合作使得出版过程顺利而愉快。感谢 Edward T. Dowling 以及 George A. Mangiero，他们指出了我原始打印稿中的一些打印错误。最后，我的妻子 Emily 在我准备书稿的过程中一直鼎力支持我。对于他们，我深表谢意！

蒋中一



译者序

很多经济学子都学习或阅读过蒋中一所著的《数理经济学基本方法》一书，并因此更加喜欢经济学，或者至少对经济学文献使用的数学不再那么畏惧。蒋中一在那本书的前言开门见山地写道：本书是为那些致力于学习基本数学方法的经济专业的学生而写的。

这句话也同样适用于《动态最优化基础》(本书)，事实上，本书正是《数理经济学基本方法》的姊妹篇或续篇，它详细而友好地介绍了变分法和最优控制理论的基础知识。变分法版块的主要内容包括欧拉方程及其推广、横截条件、二阶条件、无限计划水平以及约束问题。最优控制理论版块包括最大值原理、无限水平问题以及含有约束的最优化问题。本书具有典型的友好教科书风格：在介绍和讨论了数学方法之后，总有数值例子、经济学实例以及习题帮助读者进一步强化。

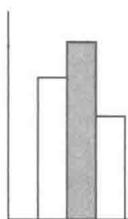
为译著写个简单的序言，也成了译者本人的风格。每一本译著都像个代养的孩子，作为译者，唯恐辜负了他(她)的生身父母的苦心。特别感谢中国人民大学出版社的策划编辑高晓斐，高老师和我一样比较腼腆，但他对工作比我更具热情、更负责。也感谢高老师的同事们，每一本译著的出版过程都见证着很多人的辛勤工作。

最后，需要指出，尽管我在翻译时非常用心和谨慎，将错误压低到最低可能，但这不代表错误为零。读者若发现有误译之处，请及时指正，我的联系邮箱为 caoqianseu@163.com。

曹乾

东南大学，南京，江苏

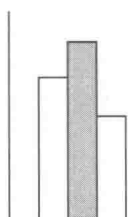
2015年6月



作者简介

蒋中一，哥伦比亚大学博士，康涅狄格大学（University of Connecticut）荣誉退休教授，著名华裔数理经济学家。著有《数理经济学的基本方法》、《动态最优化基础》等教材。

本书作为动态最优化的基础教程，非常详细和友好地介绍了变分法和最优控制理论。

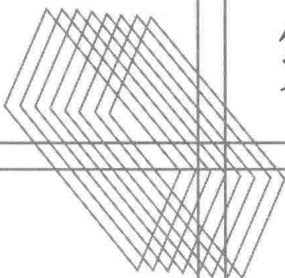


目 录

第 1 部分	导论	1
	第 1 章 动态最优化的性质	3
	1.1 动态最优化问题的显著特征	3
	1.2 可变端点与横截条件	7
	1.3 目标泛函	10
	1.4 动态最优化的几种处理方法	14
第 2 部分	变分法	19
	第 2 章 变分法的基本问题	21
	2.1 欧拉方程	21
	2.2 一些特殊情形	28
	2.3 欧拉方程的两类推广	35
	2.4 垄断企业的动态优化	38
	2.5 通货膨胀与失业的权衡	43
	第 3 章 可变端点问题的横截条件	47
	3.1 一般横截条件	47
	3.2 特殊横截条件	50
	3.3 三种推广	58
	3.4 劳动需求的最优调整	60
	第 4 章 二阶条件	63
	4.1 二阶条件	63
	4.2 凹性（凸性）充分条件	64

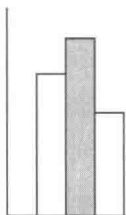
第3部分

4.3	勒让德必要条件	72
4.4	一阶变分与二阶变分	75
第5章	无限计划水平	77
5.1	无限水平的方法论问题	77
5.2	企业的最优投资路径	80
5.3	最优社会储蓄行为	87
5.4	相图分析	91
5.5	凹性与凸性：充分条件再考察	101
第6章	约束问题	104
6.1	四类约束	104
6.2	一些经济学问题的重新表达	112
6.3	可耗竭资源的经济学	116
第3部分	最优控制理论	123
第7章	最优控制：最大值原理	125
7.1	最简单的最优控制问题	126
7.2	最大值原理	129
7.3	最大值原理的机理	137
7.4	其他终止条件	140
7.5	变分法与最优控制理论的比较	148
7.6	政治型经济周期	149
7.7	能源使用与环境质量	154
第8章	关于最优控制理论的更多讨论	159
8.1	最大值原理的一种经济学解释	159
8.2	当前值汉密尔顿函数	162
8.3	充分条件	166
8.4	伴随多个状态变量和控制变量的问题	171
8.5	反污染政策	182
第9章	无限水平问题	186
9.1	横截条件	186
9.2	一些反例的重新审视	189
9.3	新古典最优增长理论	195
9.4	外生的技术进步与内生的技术进步	204
第10章	含有约束的最优控制	213
10.1	涉及控制变量的约束	213
10.2	收入最大化企业的动态	226
10.3	状态空间约束	231
10.4	状态空间约束的经济学例子	237
10.5	动态最优化的局限	242
	部分习题答案	244



第 1 部分

导 论



动态最优化的性质

最优化是经济分析中的主要议题之一。因此，在经济学家的常备工具箱中，用来寻找无约束和有约束极值的古典微积分方法以及后来的数学规划技术占有重要地位。尽管这些工具有用，但它们只能对付静态最优化问题。静态最优化问题的解通常是由每个选择变量的单个最优值组成的，也就是说，在解中，每个选择变量（例如，每周最优产量、产品最优定价）的值只有一个。这种静态问题不涉及最优序列行动。

相反，**动态**（dynamic）最优化涉及的问题通常为在计划期间的每个时段（离散时间情形）上或给定时间区间比如 $[0, T]$ 中的每个时点上，选择变量的最优值是多少。我们甚至需要考虑无限计划水平，从而时间区间变为 $[0, \infty)$ ，即“从当前到永远”。因此，动态最优化问题的解通常表现为选择变量的**最优时间路径**（optimal time path）形式，也就是说对于每个选择变量，你要给出它在今天的最优值、明天的最优值……直至计划期结束时的最优值。在本书中，我们使用星号表示最优。特别地，我们把（连续时间）变量 y 的最优时间路径表示为 $y^*(t)$ 。

1.1 动态最优化问题的显著特征

尽管我们通常用**时间**序列形式表达动态最优化，但我们也可以把计划水平看成经济决策过程中的**阶段**（stage）序列。在这种情形下，我们可以将动态最优化表达为多阶段的决策问题。然而，动态最优化的显著特征仍然是：在最优解中，每个选择变量的值不止一个。

□ 多阶段决策

我们用一个离散情形的例子说明动态优化的多阶段特征。假设某个企业打算将一些物质从**初始状态** (initial state) A (原材料状态) 开始, 经过五个阶段的生产过程转化为**终止状态** (terminal state) Z (成品状态)。在每个阶段, 企业面临着在若干可能子过程中进行选择的问题, 每个子过程伴随着一个既定成本。我们的问题是: 为使总成本最小, 企业如何选择子过程序列? 也就是说, 它在每个阶段应该如何选择才能使总成本最小?

在图 1—1 中, 为了描述这个问题, 我们用水平方向表示**阶段**, 用垂直方向表示**状态**。初始状态 A 为最左侧的点 (在阶段 1 开始处); 终止状态 Z 为最右侧的点 (在阶段 5 终点处)。 $B, C, \dots, K$ 这些点表示各种中间状态, 这些中间状态表示原材料的各种可能的转化过程。这些点 ($A, B, \dots, Z$) 称为**顶点** (vertices)。为了说明物质从状态 A 到状态 B 转化的可能性, 我们用一条**弧**连接 A 点和 B 点。其他的弧, 例如 AC , 表示物质也可转化为状态 C 而不是状态 B 。每条弧伴随着既定的**值**, 在当前的例子中, 这样的值表示成本, 参见图 1—1 圆圈中的数字。阶段 1 的决策为将原材料转化为状态 B (成本为 2 美元) 还是转化为状态 C (成本为 4 美元), 也就是说, 应该选择弧 AB 还是弧 AC 。一旦做出了这个决策, 阶段 2 的选择问题就出现了, 依此类推, 直到状态 Z 。我们的问题是选择一系列的弧 (从左到右选), 从 A 点开始到 Z 点结束, 使得各个弧上的值的和最小。这个弧序列将构成**最优路径**。

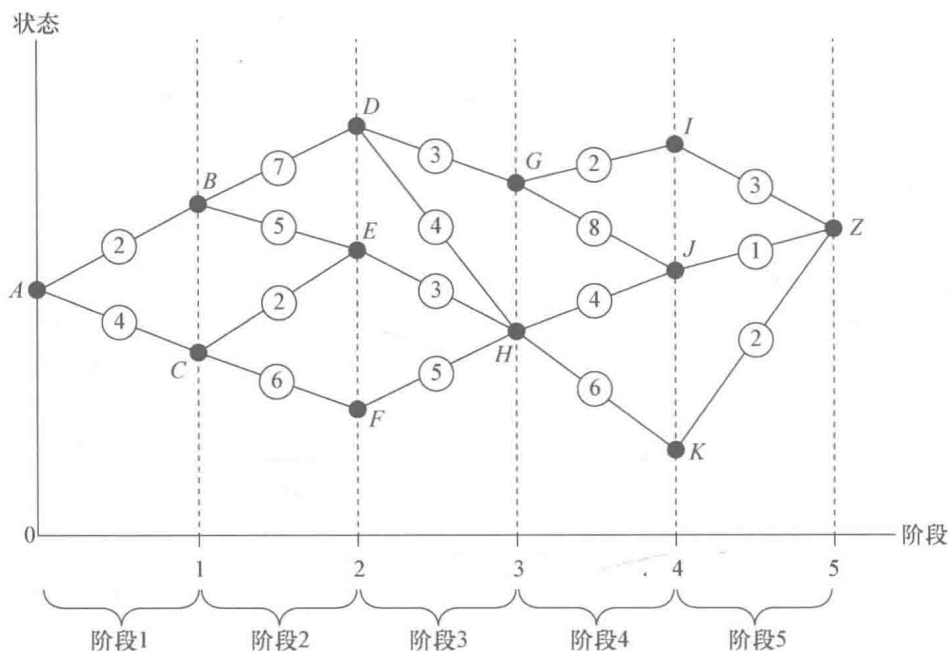


图 1—1

这个例子非常简单, 因此它的求解方法也比较简单: 我们只要把所有从 A 到 Z 的可能路径都列举出来, 然后找到那个伴随最小弧值的路径即可。然而, 对于更复杂的问题, 我们需要系统性的求解方法。我们将在 1.4 节介绍动态规划时讨论这个问题。在这

里，我们只要注意到下列结论就够了：这个例子的最优解为路径 $ACEHJZ$ ，它对应的成本最小（14 美元）。这个解说明了一个非常重要的事实：一个追求每个阶段都最优的路径一般不是最优路径！例如，一个目光短浅的决策者可能在阶段 1 选择弧 AB 而不是弧 AC ，因为前者的成本仅是后者的一半；然而，从整体（全部五个阶段）看，我们应该在阶段 1 选择成本更大的弧 AC 。当然，正因为这个原因，我们需要发展能考虑整个计划期的方法。

□ 连续变量情形

图 1—1 中例子的特征是，它涉及一个离散型阶段变量，这个变量仅取整数值。而且，我们假设状态变量仅在 $\{A, B, \dots, Z\}$ 这个有限集中取值。如果这些变量是连续的，那么情形将如图 1—2 所示，在此图中，为方便说明，我们仅画出了五条从 A 到 Z 的路径。每条可能的路径都穿过区间 $[0, T]$ 中无限多个阶段。每条路径上也有无限多个状态，每个状态都是既定阶段中的特定选择结果。

为具体起见，我们把图 1—2 看成一开阔地带的地图，其中阶段变量代表经度，状态变量代表纬度。我们的任务是把一车货物从 A 地运到 Z 地，求使得成本最小的运输路径。一般来说，与每条可能路径相伴的成本不仅取决于该路径的长度，还取决于该路径上的地形。然而，我们假设这里地形完全相同，从而每公里的运输成本是个常数。因此，这个成本最小化问题就变成了距离最短化问题。这个例子的解是条直线路径，因为这个路径伴随的成本最小（有最低的路径值）。当然，直线解非常有名——“两点之间，直线最短”，这已是众所周知。在下一章（2.2 节，例 4），我们将使用变分法（calculus of variations）证明这个结果，变分法是求连续型动态最优化问题的古典方法。

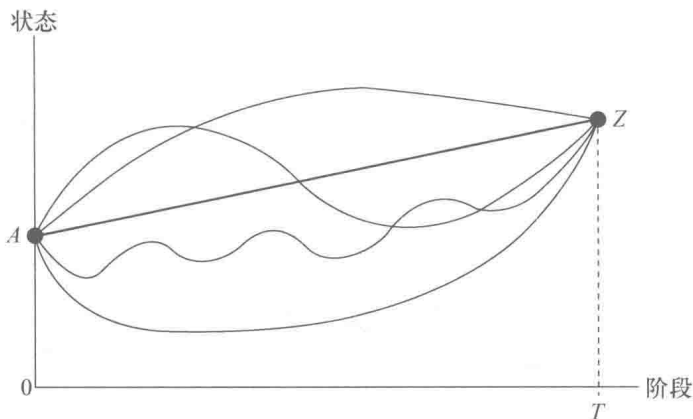


图 1—2

对于我们下面讨论的大多数问题，阶段变量将代表时间；在这种情形下，图 1—2 中的曲线描述的是时间路径。举个具体的例子，假设某个企业在时间 0 上的初始资本存量为 A ，它事前预定的目标资本存量是在时间 T 达到 Z 。在时间区间 $[0, T]$ 上存在着很多能实现这一目标的投资计划。每个投资计划意味着一条既定的资本路径，并为企业带来既定的潜在利润。在这种情形下，我们可以将图 1—2 中的曲线视为可能的资本路径，并且将它们的路径值视为相应的利润。企业的问题是找到能使得利润最大化的投