



北京高等教育精品教材
BEIJING GAODENG JIAOYU JINGPIN JIAOCAI

清华大学研究生精品教材
清华大学名优教材立项资助

新编《信息、控制与系统》系列教材

现代信号处理 (第三版)

MODERN SIGNAL PROCESSING (THIRD EDITION)

张贤达 著
Zhang Xianda



清华大学出版社



北京高等教育精品教材

BEIJING GAODENG JIAOYU JINGPIN JIAOCAI

清华大学研究生精品教材

清华大学名优教材立项资助

新编《信息、控制与系统》系列教材

现代信号处理 (第三版)

MODERN SIGNAL PROCESSING (THIRD EDITION)

张贤达 著

Zhang Xianda

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统、全面地介绍了现代信号处理的主要理论、具有代表性的方法及一些典型应用。全书共 10 章,内容包括随机信号、参数估计理论、信号检测、现代谱估计、自适应滤波器、高阶统计分析、线性时频变换、二次型时频分布、盲信号分离、阵列信号处理。全书取材广泛,内容新颖,充分反映了信号处理的新理论、新技术、新方法和新应用,可以帮助读者尽快跟踪信号处理的最新国际发展。与第二版相比,本书增加了信号检测、盲信号分离与阵列信号处理等重要应用,更加注重理论与应用的结合,更加方便读者理解与自学。

本书为清华大学研究生精品教材和北京市高等教育精品教材,最近又获得清华大学名优教材第一批立项资助,是一本与国际前沿科学接轨的研究生教材,可作为电子、通信、自动化、计算机、物理、生物医学和机械工程等各学科有关教师、研究生和科技人员教学、自学、进修用书或参考书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

现代信号处理/张贤达著. —3 版. —北京:清华大学出版社,2015

新编《信息、控制与系统》系列教材

ISBN 978-7-302-40869-7

I. ①现… II. ①张… III. ①信号处理—高等学校—教材 IV. ①TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 164192 号

责任编辑:王一玲

封面设计:常雪影

责任校对:白 蕾

责任印制:沈 露

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:31.5 字 数:764 千字

版 次:2002 年 10 月第 1 版 2015 年 12 月第 3 版 印 次:2015 年 12 月第 1 次印刷

印 数:1~2000

定 价:59.00 元

第三版前言

《现代信号处理》(第二版)于2002年出版后,被陆续批准为“清华大学研究生精品教材”和“北京市高等教育精品教材”,并被很多大学用作研究生教材或参考书。众多读者在研究中参考本书,在国内和国际学术期刊上发表研究论文时引用本书:前两版累计已经被SCI他引240余次,Google学术搜索他引1,850余次。最近,《现代信号处理》又被批准为第一批“清华大学名优教材立项项目”。在该项目支持下,本书对第二版进行了较大的删节、修改和增补:

(1) 删除了第二版中不太重要的一些理论、方法以及不太普遍的一些应用,以进一步聚焦和突出代表性的理论、方法及应用。

(2) 对保留的原版内容,在理论与方法的介绍方面做了比较多的修改:一些定理、命题和性质的难度大的证明被删除,改为参考有关文献,难度小的证明则改为读者作为练习。

(3) 根据信号处理技术的发展,增补了信号检测、盲信号分离和阵列信号处理三章,从而由第二版的7章增加为新一版的10章。信号检测放在随机信号(第1章)和参数估计理论(第2章)之后,是为了让读者学习了有关理论后能够尽快分享信号处理的工程应用。在介绍完本书的基本理论(参数估计、现代谱估计、自适应滤波器、高阶统计分析、时频分析与二次型时频分布)后,专门介绍了两个极具代表性的典型应用——盲信号分离与阵列信号处理。本书新增的三章乃作者反复选择与精心编著的结果,相信读者会有比较大的学习兴趣与收获。

从教学和研究的角度出发,本书的各章内容是研究生和科技工作者应该和尽快掌握的理论、方法及应用。以内容的广度和深度而言,本书每一章又都可独立成书。因此,本书选择最基本和最重要的理论、具有广泛代表性的方法与应用进行重点介绍。读者在翻阅目录时会发现,本书虽然重点放在代表性的理论、方法与应用的介绍上,但是却不乏一些新理论、新方法和新应用的及时跟进与补充。

作为清华大学研究生精品教材、北京市高等教育精品教材以及清华大学名优教材立项项目,本书的目标是不辱使命,向广大读者奉献一本合格的名优教材。然而,尽管作者尽力而为,却仍然难免会有不满意甚至失误之处。在此,诚恳希望从事信号处理教学、研究及应用的广大同仁、专家、青年才俊和读者不吝指教和斧正。

张贤达

谨识于2015年6月

第二版前言

最近十年,信号处理学科经历了巨大的变化,是信息科学中发展最迅速的学科之一。尤其是伴随无线通信的急速发展,信号处理更是获得了极大的推动,诞生了通信信号处理这一新的学科领域。现在,信号处理已在各个科学与技术领域获得了极为广泛的应用。可以说,学习现代信号处理的理论、方法与应用已成为通信、电子、自动化、生物医学、机械工程等众多学科或专业的研究生与科技人员的迫切需要。

《现代信号处理》(第一版)于1995年出版以来,已先后印刷了6次,共18000册。承蒙广大读者厚爱,在多所大学里被用作研究生教材或参考书;至目前,在SCI收录的国际杂志上被他人9篇论文引用,在中文学术期刊上被他人400余篇论文引用。为了适应信号处理的新发展,我们对《现代信号处理》一书进行了重大修改:

- (1) 将原书的12章压缩为7章;
- (2) 介绍了一些近几年的信号处理新方法;
- (3) 增加了大量的应用举例;
- (4) 重新编排了全部习题,扩大了习题的范围,丰富了习题的内容。

全书内容分为基础(第1章、第2章)、现代谱估计(第3章)、自适应信号处理(第4章)、高阶统计分析(第5章)和时频信号分析(第6章、第7章)共5部分。前5章可在48学时内讲授完,全书则需要64学时的教学计划。为了方便读者参考,还配套编写了《现代信号处理习题与解答》一书。

笔者曾在清华大学、西安电子科技大学、空军工程大学、桂林电子工业学院讲授过本书。根据本人的教学体会,读者只要把握好本书基本内容的学习、多做一些习题、完成好书中的2~3次计算机仿真实验,就能够比较快地与信号处理的最新国际发展“接轨”,将信号处理的典型方法和新技术在学位论文的研究中加以灵活的应用,收到学以致用效果。

“现代信号处理”已被列为清华大学研究生精品课计划。本书就是在该计划的资助下完成的。书中反映了作者在清华大学和西安电子科技大学的一系列研究成果。这些研究得到了国家自然科学基金、教育部高等学校博士点专项基金、教育部“长江学者奖励计划”等的资助,也是与很多合作者的联合研究成果。在此,向这些合作研究者表示衷心的感谢。

在本书的改写中,采纳了我的十几位博士、硕士研究生和其他很多听课研究生的意见和建议。这些意见和建议对于改进本书的可读性和易懂性,起到了重要的作用。

感谢博士研究生丁建江、杨恒、高秋彬、吕齐和硕士研究生苏泳涛、彭春翌,他们仔细阅读和校对了书稿,提出了一些很好的改进意见,并帮助制作了书中的一些插图。

虽然作者努力而为,但本书仍然可能存在一些不足之处,甚至某些误笔。在此,诚恳欢迎和盼望各位学术先辈、同仁和读者诸君的批评与指正意见!

张贤达

2002年8月31日谨识于清华园

目 录

第1章 随机信号	1
1.1 信号分类	1
1.2 相关函数、协方差函数与功率谱密度	5
1.2.1 自相关函数、自协方差函数与功率谱密度	5
1.2.2 互相关函数、互协方差函数与互功率谱密度	8
1.3 两个随机信号的比较与识别	11
1.3.1 独立、不相关与正交	11
1.3.2 多项式序列的 Gram-Schmidt 标准正交化	15
1.4 具有随机输入的线性系统	16
1.4.1 系统输出的功率谱密度	16
1.4.2 窄带带通滤波器	18
本章小结	20
习题	20
第2章 参数估计理论	25
2.1 估计子的性能	25
2.1.1 无偏估计与渐近无偏估计	25
2.1.2 估计子的有效性	27
2.2 Fisher 信息与 Cramer-Rao 不等式	29
2.2.1 Fisher 信息	29
2.2.2 Cramer-Rao 下界	30
2.3 Bayes 估计	32
2.3.1 风险函数的定义	32
2.3.2 Bayes 估计	33
2.4 最大似然估计	35
2.5 线性均方估计	39
2.6 最小二乘估计	40
2.6.1 最小二乘估计及其性能	40
2.6.2 加权最小二乘估计	42
本章小结	43
习题	44
第3章 信号检测	47
3.1 统计假设检验	47
3.1.1 信号检测的基本概念	47
3.1.2 信号检测理论测度	50

3.1.3 决策理论空间	54
3.2 概率密度函数与误差函数	56
3.2.1 概率密度函数	56
3.2.2 误差函数和补余误差函数	59
3.3 检测概率与错误概率	60
3.3.1 检测概率与错误概率的定义	61
3.3.2 功效函数	63
3.4 Neyman-Pearson 准则	64
3.4.1 雷达信号检测的虚警概率与漏警概率	64
3.4.2 Neyman-Pearson 引理与 Neyman-Pearson 准则	68
3.5 一致最大功效准则	71
3.5.1 通信信号检测问题	71
3.5.2 一致最大功效检验	72
3.5.3 一致最大功效准则的物理意义	75
3.6 Bayes 准则	76
3.6.1 Bayes 判决准则	76
3.6.2 二元信号波形的检测	78
3.6.3 检测概率分析	81
3.7 Bayes 派生准则	83
3.7.1 最小错误概率准则	83
3.7.2 最大后验概率准则	84
3.7.3 极小极大准则	86
3.8 多元假设检验	88
3.8.1 多元假设检验问题	89
3.8.2 多元假设检验的 Bayes 准则	89
3.9 多重假设检验	91
3.9.1 多重假设检验的错误率	92
3.9.2 多重假设检验的错误控制方法	94
3.9.3 多元线性回归	96
3.9.4 多元统计分析	99
本章小结	103
习题	104
附录 3A 误差函数表	109
第 4 章 现代谱估计	111
4.1 非参数化谱估计	111
4.1.1 离散随机过程	111
4.1.2 非参数化功率谱估计	112

4.2	平稳 ARMA 过程	114
4.3	平稳 ARMA 过程的功率谱密度	118
4.3.1	ARMA 过程的功率谱密度	118
4.3.2	功率谱等价	123
4.4	ARMA 谱估计	126
4.4.1	ARMA 功率谱估计的两种线性方法	126
4.4.2	修正 Yule-Walker 方程	128
4.4.3	AR 阶数确定的奇异值分解方法	130
4.4.4	AR 参数估计的总体最小二乘法	133
4.5	ARMA 模型辨识	135
4.5.1	MA 阶数确定	135
4.5.2	MA 参数估计	138
4.6	最大熵谱估计	139
4.6.1	Burg 最大熵谱估计	139
4.6.2	Levinson 递推	142
4.6.3	Berg 算法	146
4.6.4	Burg 最大熵谱分析与 ARMA 谱估计	148
4.7	Pisarenko 谐波分解法	150
4.7.1	Pisarenko 谐波分解	150
4.7.2	谐波恢复的 ARMA 建模法	152
4.8	扩展 Prony 方法	153
	本章小结	159
	习题	159
第5章	自适应滤波器	163
5.1	匹配滤波器	163
5.1.1	匹配滤波器	163
5.1.2	匹配滤波器的性质	167
5.1.3	匹配滤波器的实现	168
5.2	连续时间的 Wiener 滤波器	169
5.3	最优滤波理论与 Wiener 滤波器	171
5.3.1	线性最优滤波器	171
5.3.2	正交性原理	172
5.3.3	Wiener 滤波器	173
5.4	Kalman 滤波	175
5.4.1	Kalman 滤波问题	176
5.4.2	新息过程	177
5.4.3	Kalman 滤波算法	178

5.5	LMS 类自适应算法	180
5.5.1	下降算法	180
5.5.2	LMS 算法及其基本变型	182
5.5.3	解相关 LMS 算法	183
5.5.4	学习速率参数的选择	186
5.5.5	LMS 算法的统计性能分析	188
5.5.6	LMS 算法的跟踪性能	190
5.6	RLS 自适应算法	192
5.6.1	RLS 算法	192
5.6.2	RLS 算法与 Kalman 滤波算法的比较	195
5.6.3	RLS 算法的统计性能分析	196
5.6.4	快速 RLS 算法	198
5.7	自适应谱线增强器与陷波器	199
5.7.1	谱线增强器与陷波器的传递函数	200
5.7.2	基于格型 IIR 滤波器的自适应陷波器	201
5.8	广义旁瓣对消器	203
5.9	盲自适应多用户检测	205
5.9.1	盲多用户检测的典范表示	206
5.9.2	盲多用户检测的 LMS 和 RLS 算法	207
5.9.3	盲多用户检测的 Kalman 自适应算法	209
	本章小结	212
	习题	212
第 6 章	高阶统计分析	217
6.1	矩与累积量	217
6.1.1	高阶矩与高阶累积量的定义	217
6.1.2	高斯信号的高阶矩与高阶累积量	219
6.1.3	矩与累积量的转换关系	220
6.2	矩与累积量的性质	222
6.3	高阶谱	226
6.3.1	高阶矩谱与高阶累积量谱	226
6.3.2	双谱估计	228
6.4	非高斯信号与线性系统	230
6.4.1	亚高斯与超高斯信号	231
6.4.2	非高斯信号通过线性系统	232
6.5	FIR 系统辨识	234
6.5.1	RC 算法	234
6.5.2	累积量算法	238

6.5.3	MA 阶数确定	241
6.6	因果 ARMA 模型的辨识	242
6.6.1	AR 参数的辨识	242
6.6.2	MA 阶数确定	245
6.6.3	MA 参数估计	247
6.7	有色噪声中的谐波恢复	250
6.7.1	复信号的累积量定义	250
6.7.2	谐波过程的累积量	252
6.7.3	高斯有色噪声中的谐波恢复	254
6.7.4	非高斯有色噪声中的谐波恢复	254
6.8	非高斯信号的自适应滤波	260
6.9	时延估计	261
6.9.1	广义互相关方法	261
6.9.2	高阶统计量方法	263
6.10	双谱在信号分类中的应用	267
6.10.1	积分双谱	267
6.10.2	选择双谱	270
	本章小结	272
	习题	272
第 7 章	线性时频变换	275
7.1	信号的局部变换	275
7.2	解析信号与瞬时物理量	277
7.2.1	解析信号	278
7.2.2	基带信号	280
7.2.3	瞬时频率与群延迟	281
7.2.4	不相容原理	283
7.3	短时 Fourier 变换	284
7.3.1	连续短时 Fourier 变换	284
7.3.2	离散短时 Fourier 变换	287
7.4	Gabor 变换	288
7.4.1	连续 Gabor 变换	289
7.4.2	离散 Gabor 变换	293
7.5	分数阶 Fourier 变换	296
7.5.1	分数阶 Fourier 变换的定义与性质	297
7.5.2	分数阶 Fourier 变换的计算	299
7.6	小波变换	300
7.6.1	小波的物理考虑	300

7.6.2 连续小波变换	302
7.6.3 连续小波变换的离散化	303
7.7 小波分析与框架理论	304
7.7.1 小波分析	304
7.7.2 框架理论	308
7.8 多分辨分析	311
7.9 正交滤波器组	314
7.9.1 正交小波	315
7.9.2 快速正交小波变换	317
7.10 双正交滤波器组	320
7.10.1 双正交多分辨分析	320
7.10.2 双正交滤波器组设计	323
7.10.3 双正交小波与快速双正交变换	325
本章小结	327
习题	328
第8章 二次型时频分布	331
8.1 时频分布的一般理论	331
8.1.1 时频分布的定义	331
8.1.2 时频分布的基本性质要求	332
8.2 Wigner-Ville 分布	334
8.2.1 数学性质	334
8.2.2 与演变谱的关系	336
8.2.3 基于 Wigner-Ville 分布的信号重构	337
8.3 模糊函数	339
8.4 Cohen 类时频分布	342
8.4.1 Cohen 类时频分布的定义	342
8.4.2 对核函数的要求	345
8.5 时频分布的性能评价与改进	346
8.5.1 时频聚集性	346
8.5.2 交叉项抑制	348
8.5.3 其他几种典型时频分布	350
本章小结	356
习题	356
第9章 盲信号分离	359
9.1 盲信号分离的基本理论	359
9.1.1 盲信号处理简述	359

9.1.2	盲信号分离的模型与基本问题	360
9.1.3	盲信号分离的基本假设与基本性能要求	362
9.2	自适应盲信号分离	363
9.2.1	自适应盲信号分离的神经网络实现	363
9.2.2	本质相等矩阵与对比函数	366
9.3	独立分量分析	367
9.3.1	互信息与负熵	367
9.3.2	自然梯度算法	369
9.3.3	自然梯度算法的实现	372
9.3.4	固定点算法	375
9.4	非线性主分量分析	376
9.4.1	预白化	376
9.4.2	线性主分量分析	377
9.4.3	非线性主分量分析	380
9.5	矩阵的联合对角化	381
9.5.1	盲信号分离与矩阵联合对角化	381
9.5.2	正交近似联合对角化	382
9.5.3	非正交近似联合对角化	385
9.6	盲信号抽取	386
9.6.1	正交盲信号抽取	386
9.6.2	非正交盲信号抽取	387
9.7	卷积混合信源的盲信号分离	390
9.7.1	卷积混合信源	390
9.7.2	卷积混合信源的时域盲信号分离	392
9.7.3	卷积混合信源的频域盲信号分离	394
9.7.4	卷积混合信源的时频域盲信号分离	396
	本章小结	401
	习题	402
第10章	阵列信号处理	405
10.1	阵列的坐标表示	405
10.1.1	阵列与噪声	405
10.1.2	阵列的坐标系	406
10.2	波束形成与空间滤波	409
10.2.1	空域 FIR 滤波器	409
10.2.2	宽带波束形成器	412
10.2.3	空域 FIR 滤波器与波束形成器的类比及互换	414

10.3	线性约束自适应波束形成器	417
10.3.1	经典波束形成器	417
10.3.2	自适应波束形成器的直接实现	421
10.3.3	自适应波束形成器的广义旁瓣对消形式	423
10.4	多重信号分类 (MUSIC)	426
10.4.1	空间谱	426
10.4.2	信号子空间与噪声子空间	428
10.4.3	MUSIC 方法	429
10.5	MUSIC 方法的扩展	431
10.5.1	解相干 MUSIC 方法	431
10.5.2	求根 MUSIC 方法	434
10.5.3	最小范数法	435
10.5.4	第一主向量 MUSIC 方法	436
10.6	波束空间 MUSIC 方法	438
10.6.1	BS-MUSIC 方法	438
10.6.2	波束空间 MUSIC 与阵元空间 MUSIC 的比较	440
10.7	旋转不变技术 (ESPRIT)	444
10.7.1	基本 ESPRIT 算法	444
10.7.2	阵元空间 ESPRIT 方法	448
10.7.3	TLS-ESPRIT 方法	451
10.7.4	波束空间 ESPRIT 方法	452
10.8	酉 ESPRIT 算法及其推广	454
10.8.1	酉 ESPRIT 算法	454
10.8.2	波束空间酉 ESPRIT 算法	457
	本章小结	458
	习题	459
	参考文献	461
	索引	477

第1章 随机信号

信号是信息的载体。信号的信息可以是一系统(如物理系统、人体)的模型参数、冲激响应和功率谱,也可以是一人工目标(如飞机、舰船)的分类特征,还可以是诸如气象、水文、的预报、人体心电的异常等等。其数值或观测值为随机变量的信号称为随机信号。所谓随机,是指信号的取值服从某种概率分布规律。这一规律可以是完全已知的、部分已知的或完全未知的。随机信号也称随机过程、随机函数或随机序列。本章将侧重平稳随机信号的两种基本描述:时域和频域特性。这两种描述是互补的,具有同等重要的作用。

1.1 信号分类

在数学上,信号用一组变量值表示。若 $\{s(t)\}$ 是一实或复数序列,则称序列 $\{s(t)\}$ 为信号。当时间 t 定义在连续变量区间,即 $t \in (-\infty, \infty)$ 或 $t \in [0, \infty)$ 时,序列 $\{s(t)\}$ 称为连续时间信号。许多人工信号和自然信号都是连续时间信号,例如雷达、声纳、无线电广播、通信、控制系统和生物医学工程中的信号。在使用计算机进行信号处理时,连续时间的信号需要先转换成离散时间信号。若信号取值的时间 t 为整数,即 $t = 0, \pm 1, \dots$ 或 $t = 0, 1, \dots$ 时,则变量序列 $\{s(t)\}$ 称为离散时间信号。注意,离散时间信号与数字信号有所不同,后者是数值被数字化后的离散时间信号。

如果序列 $\{s(t)\}$ 在每个时刻的取值不是随机的,而是服从某种固定函数的关系,则称之为确定性信号。下面是几种常用的确定性信号。

- 阶跃信号

$$U(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

- 符号信号

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \quad (1.1.2)$$

- 矩形脉冲信号

$$P_a(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a \\ 0, & |t| > a \end{cases} \quad (1.1.3)$$

- 正弦波(或谐波)信号

$$s(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_0) \quad (1.1.4)$$

其中 θ_0 为固定的初始相位。

作为例子,图 1.1.1 分别画出了阶跃信号、符号信号和矩形脉冲信号的波形。

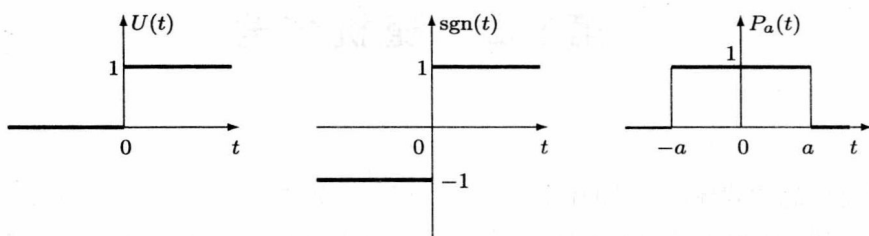


图 1.1.1 阶跃信号、符号信号与矩形脉冲信号

与确定性信号不同,若序列 $\{s(t)\}$ 在每个时刻的取值是随机变量,则称之为随机信号。例如,相位随机变化的正弦波信号

$$s(t) = A \cos(\omega_c t + \theta) \quad (\text{实谐波信号}) \quad (1.1.5)$$

$$s(t) = A \exp(j\omega_c t + \theta) \quad (\text{复谐波信号}) \quad (1.1.6)$$

即为随机信号。式中 θ 是在 $[-\pi, \pi]$ 内均匀分布的随机变量,其概率密度函数

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.7)$$

随机信号也称随机过程,具有以下特点:

(1) 随机信号在任何时间的取值都是不能先验确定的随机变量。

(2) 虽然随机信号取值不能先验确定,但这些取值却服从某种统计规律。换言之,随机信号或过程可以用概率分布特性(简称统计性能)统计地描述。

令 $x(t)$ 表示一连续时间的复随机过程。对于任何一固定的时刻 t , 随机过程 $x(t)$ 定义一随机变量 $X = x(t)$ 。令 $\mu(t)$ 表示其均值,则

$$\mu(t) = E\{x(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx \quad (1.1.8)$$

式中 $f(x, t)$ 表示随机变量 $X = x(t)$ 在时间 t 的概率密度函数。复随机信号 $x(t)$ 的自相关函数 $R_x(t_1, t_2)$ 定义为 $x(t)$ 在时刻 t_1 和 t_2 之间的相关,即

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &\stackrel{\text{def}}{=} E\{x(t_1)x^*(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2^* f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \\ &= R_x^*(t_2, t_1) \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

式中,上标 $*$ 表示复数的共轭; $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 表示随机变量 $X_1 = x(t_1)$ 和 $X_2 = x(t_2)$ 的联合概率密度函数。一般情况下,自相关函数与时间变量 t_1 和 t_2 有关。对于任意复数集合 $\alpha_k (k = 1, \dots, n)$, 定义

$$Y = \sum_{k=1}^n \alpha_k x(t_k) \quad (1.1.10)$$

显然, Y 是一个随机变量, 并且 $E\{|Y|^2\} \geq 0$ 。因此, 有

$$\begin{aligned} E\{|Y|^2\} &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \alpha_k^* E\{x(t_i) x^*(t_k)\} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \alpha_k^* R_x(t_i, t_k) \\ &= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} R_x(t_1, t_1) & R_x(t_1, t_2) & \cdots & R_x(t_1, t_n) \\ R_x(t_2, t_1) & R_x(t_2, t_2) & \cdots & R_x(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(t_n, t_1) & R_x(t_n, t_2) & \cdots & R_x(t_n, t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \vdots \\ \alpha_n^* \end{bmatrix} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

或者

$$\begin{bmatrix} R_x(t_1, t_1) & R_x(t_1, t_2) & \cdots & R_x(t_1, t_n) \\ R_x(t_2, t_1) & R_x(t_2, t_2) & \cdots & R_x(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(t_n, t_1) & R_x(t_n, t_2) & \cdots & R_x(t_n, t_n) \end{bmatrix} \succeq 0$$

式中 $\mathbf{R} \succeq 0$ 表示矩阵 $\mathbf{R}$ 为半正定矩阵 (即所有特征值为非负值)。半正定矩阵也称非负定矩阵。将式 (1.1.9) 代入后, 上式简化为

$$\begin{bmatrix} R_x(t_1, t_1) & R_x(t_1, t_2) & \cdots & R_x(t_1, t_n) \\ R_x^*(t_1, t_2) & R_x(t_2, t_2) & \cdots & R_x(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x^*(t_1, t_n) & R_x^*(t_2, t_n) & \cdots & R_x(t_n, t_n) \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (1.1.11)$$

该式左边的矩阵为复共轭对称矩阵, 也称 Hermitian 矩阵。

特别地, 当 $n=2$ 时, 式 (1.1.11) 给出

$$\begin{bmatrix} R_x(t_1, t_1) & R_x(t_1, t_2) \\ R_x^*(t_1, t_2) & R_x(t_2, t_2) \end{bmatrix} \succeq 0$$

或

$$|R_x(t_1, t_2)|^2 \leq R_x(t_1, t_1) R_x(t_2, t_2) \quad (1.1.12)$$

这一公式称为 Schwartz 不等式。

均值和自相关函数 $R_x(t_1, t_2)$ 分别是随机信号 $x(t)$ 的一阶矩和二阶矩。类似地, 还可以定义随机信号 $\{x(t)\}$ 的 k 阶矩为

$$\mu(t_1, \dots, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} E\{x(t_1) \cdots x(t_k)\} \quad (1.1.13)$$

根据 k 阶矩是否与时间有关, 随机信号又进一步分为平稳和非平稳随机信号两大类。

定义 1.1.1 (n 阶平稳信号) 随机信号 $\{x(t)\}$ 称为 n 阶平稳信号, 若对所有整数 $1 \leq k \leq n$ 和所有 $t_1, \dots, t_k$ 及 τ , 其 k 阶矩有界, 并且满足

$$\mu(t_1, \dots, t_k) = \mu(t_1 + \tau, \dots, t_k + \tau) \quad (1.1.14)$$

特别地, 当随机信号是 2 阶平稳时, 则称之为广义平稳 (wide-sense stationary) 信号。

定义 1.1.2 (广义平稳信号) 复随机信号 $\{x(t)\}$ 称为广义平稳信号, 若

- (1) 其均值为常数, 即 $E\{x(t)\} = \mu_x$ (常数);
- (2) 其二阶矩有界, 即 $E\{x(t)x^*(t)\} = E\{|x(t)|^2\} < \infty$;
- (3) 其协方差函数与时间无关, 即 $C_{xx}(\tau) = E\{[x(t) - \mu_x][x(t - \tau) - \mu_x]^*\}$ 。

广义平稳也称协方差平稳或弱平稳。广义平稳信号简称平稳信号。

定义 1.1.3 (严格平稳信号) 随机信号 $\{x(t)\}$ 称为严格平稳信号, 若随机变量组 $\{x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau), \dots, x(t_k + \tau)\}$ 和 $\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)\}$ 的联合分布函数对所有 $\tau > 0$ 和 $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ 均相同, 其中 $k = 1, 2, \dots$ 。

文字叙述为: 概率密度分布函数与时间无关的随机信号 $x(t)$ 称为严格平稳信号。

以下是 n 阶平稳、广义平稳、严格平稳和非平稳之间的关系:

- (1) 广义平稳是 $n = 2$ 时的 n 阶平稳;
- (2) 严格平稳一定是广义平稳, 但广义平稳不一定是严格平稳;
- (3) 由于不是广义平稳的随机过程不可能是 $n > 2$ 阶平稳的和严格平稳的, 所以不具有广义平稳性的随机信号统称非平稳信号。

平稳信号常称时不变信号, 意即统计量不随时间变化的信号。类似地, 非平稳信号也常称时变信号, 因为它至少有某个统计量 (如均值、协方差函数) 是时间的函数。注意, 时变与时不变信号不应该理解为信号的取值或波形是否随时间变化。

在无线通信中, 发射信号一般是平稳信号, 而信道分为高斯信道和 Rayleigh 衰落信道。高斯信道是一种无衰落的信道, 且是时不变的即平稳的。因此, 经过高斯信道传输后, 接收机所接收到的通信信号为平稳信号。与高斯信道不同, Rayleigh 衰落信道是非平稳即时变的信道, 故发射的通信信号经过这种信道传输后的接收信号是非平稳的。

随机信号还有一个重要的性质——遍历性 (ergodicity), 其核心问题是, 从随机信号的一次观测记录是否可以估计其统计量 (如相关函数、功率谱等)。遍历性的详细讨论需要比较深的概率论知识, 这里只介绍最常用的一种遍历性形式, 它就是均方遍历性。

令 $\{x(t)\}$ 是一个平稳信号, 它的 n 阶及较低阶的所有矩都是与时间无关的。称该信号是 n 阶矩均方遍历的, 若对于所有 $k = 1, \dots, n$ 和所有整数 $t_1, \dots, t_k$, 恒有均方收敛的公式

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left| \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N x(t+t_1)x(t+t_2) \cdots x(t+t_k) - \mu(t_1, \dots, t_k) \right|^2 \right\} = 0 \quad (1.1.15)$$

这就是术语“均方遍历性”的来由。

当一个信号是 n 阶矩均方遍历的平稳过程时, 它的 n 阶及所有低阶的统计平均都可以用各自的时间平均来代替。换句话说, 这些统计量均可以根据该信号的一次观测数据进行估计。在本书中, 假定所讨论的信号皆是均方遍历的。

如果均方遍历的平稳信号 $x(t)$ 的 N 个观测样本 $x(1), \dots, x(N)$ 为已知, 则信号的均值 μ_x 可由时间平均估计为

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n) \quad (1.1.16)$$