

From Pythagoras to the 57th Dimension

250 Milestones in the History of Mathematics

数学之书

The Math Book

[美] 克利福德·皮寇弗 著

陈以礼 译 洪万生 审定

从毕达哥拉斯到 57 度空间物体，

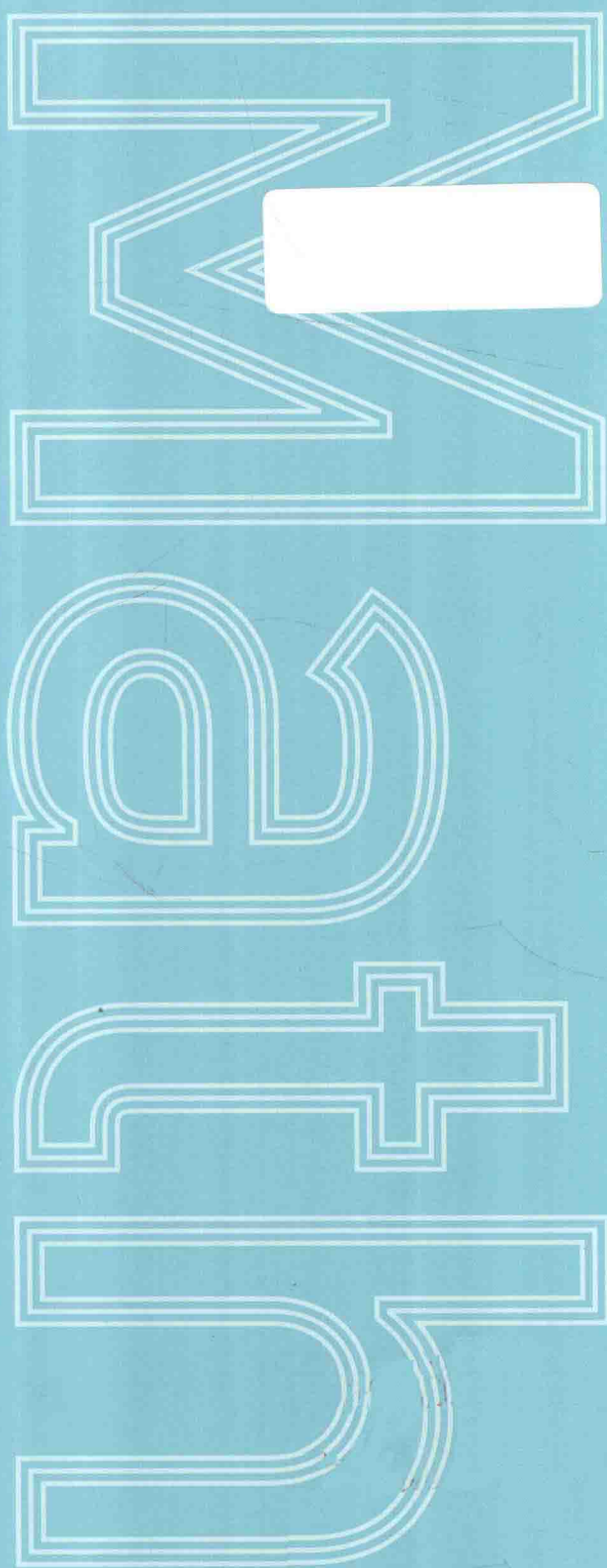
数学史上 250 个里程碑



重庆大学出版社

数学之书

〔美〕克利福德·皮寇弗 著 陈以礼 译 洪万生 审定



重庆大学出版社

©2009 by Clifford A. Pickover

The Math Book

This edition has been published by arrangement with Sterling Publishing Co., Inc., 387 Park Ave. South, New York, NY 10016

版贸核渝字(2014)第198号

(本书译文由时报文化出版企业股份有限公司授权)

图书在版编目(CIP)数据

数学之书/(美)皮寇弗(Pickover, C.A.)著;

陈以礼译. —重庆:重庆大学出版社, 2015.8

(里程碑书系)

书名原文: The Math Book

ISBN 978-7-5624-9326-6

I. ①数… II. ①皮… ②陈… III. ①数学—普及读物

IV. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第160692号

数学之书

shuxue zhi shu

[美] 克利福德·皮寇弗 著

陈以礼 译 洪万生 审定

责任编辑 王思楠

责任校对 邹 总

装帧设计 鲁明静

责任印制 赵 晟

重庆大学出版社出版发行

出版人: 邓晓益

社址: (401331) 重庆市沙坪坝区大学城西路21号

网址: <http://www.cqup.com.cn>

印刷: 北京利丰雅高长城印刷有限公司

开本: 787×1092, 1/16 印张: 17.5 字数: 260千字

2015年9月第1版 2015年9月第1次印刷

ISBN 978-7-5624-9326-6 定价: 38.00元

本书如有印刷、装订等质量问题, 本社负责调换。

版权所有, 请勿擅自翻印和用本书制作各类出版物及配套用书, 违者必究。

From Pythagoras
to the 57th Dimension
250 Milestones
in the History of Mathematics

数 学 之 书

T h e M a t h B o o k

从毕达哥拉斯

到57度空间物体

数学史上**250**个里程碑

正确地去观察数学，它拥有的不仅是真理，还有种至高的美，
一种冷峻、简朴的美，就像雕刻作品一样。

——伯特兰·罗素，《神秘主义和逻辑》

数学是一个美妙而疯狂的学科，充满了想象力、梦幻和创造力，
不受物理世界的小细节限制，唯一的限制来自我们内心灵光的强度。

——格里高利·柴廷，《更少的证明，更多的真理》

或许，某位上帝的使者察看完一望无际的混沌之洋后，轻轻
地用手指在其中拨弄了一下，而就在这刹那被不经意扰乱的平衡
中，我们的宇宙诞生了。

——马丁·加德纳，《秩序与意外》，1950 年

现代物理学中那些伟大的方程式是科学知识的永久组织部分，
它们比那些古老而美丽的大教堂更恒久。

——史蒂文·温伯格、格雷姆·法米罗，《那一定很美》，2002 年

简介 数学之美与效用

聪慧的观察者看过数学家所从事的工作后，大概会认为他们是一群狂热流派奉献者，宇宙的神秘钥匙的追寻者。

——戴维斯（Philip Davis）与赫什（Reuben Hersh），

《数学经验谈》（*The Mathematical Experience*）一书作者

数学已经渗入每一个需要费尽心思去理解的科学领域，并且在生物学、物理、化学、经济、社会学和工程等方面取得无法替代的角色。我们可以用数学说明夕阳光彩分布的情况，也可以用来说明人类的大脑结构。数学帮助我们打造超音速飞机和云霄飞车，模拟地球天然资源流转的方式，进入次原子粒子的量子世界探索，甚至让我们得以想象遥远的银河系。可以说，数学改变了我们看待宇宙的方式。

在本书中，我希望运用少量数学公式提供一点数学品位，而鼓励读者发挥想象力。对大多数读者而言，这本书所谈论的应该不只是能满足好奇心却缺乏实用价值的单元，根据美国教育部实际调查的结果显示，能够顺利完成高中数学课程的学生升上大学后不论选读哪一个专业，都能展现出比较优秀的学习能力。

数学的实用性让我们可以建造宇宙飞船，探索所处宇宙的几何结构。数字也可能是我们与有智能的外星生物间所采用的第一种沟通手段。有些物理学家认为掌握更高空间维度和拓扑学（topology，探索形状与彼此间相互关系的一门学问），或许有一天当现在这个宇宙处于在极热或极冷的末日之际，我们就能逃出，在不同的时空环境下安身立命。

数学史上不乏许多人同步有重大发现的例子，就以这本书中的莫比乌斯带为例。德国数学家莫比乌斯（August Mobius）和当时另一位德国数学家利斯廷（Johann Benedict Listing）同时在 1858 年各自发现莫比乌斯带（一个只有单面，神奇的扭曲物体）。这种同步发现的现象就跟英国博学多闻的牛顿（Isaac Newton）与德国数学家莱布尼兹

（Gottfried Wilhelm Leibniz）各自同时发现微积分的例子相似。这些例子让我不禁怀疑科学领域为何经常有不同人在相同时间，独立发现同一件事情的情况？其他例子还包括英国博物学家达尔文（Charles Darwin）和华莱士（Alfred Wallace）都在相同时间各自提出演化论的观点，匈牙利数学家鲍耶（János Bolyai）和俄罗斯数学家罗巴切夫斯基（Nikolai Lobachevsky）似乎也是在同一时间各自提出双曲几何的想法。

最有可能解释同步重大发现的理由，是因为人类在那些时间点对于即将诞生的发现，已经累积足够的知识，这些想法自然也就瓜熟蒂落地被提出来；可能两位科学家都受到当代其他研究人员同一篇先导研究论文的影响。另一种带有神秘色彩的解释，会从较深层的观点说明这种巧合。奥地利生物学家卡梅纳（Paul Kammerer）曾表示：“或许我们可以说，尽管打散、重组的过程在现实世界繁华的表面下与宇宙无垠的千变万化中不断重复发生，但是物以类聚的现象也会同时在这些过程中产生”；卡梅纳把现实世界的重大事件比喻成海洋波涛的顶端，彼此间看起来各自孤立，毫无瓜葛，不过根据他充满争议性的理论，我们其实只看到上层的波浪，却没注意到海面下可能存在某种同步机制，诡谲地把世上各种重大事件串在一起，才显现出这种一波又一波的风潮。

易法拉（Georges Ifrah）在《数目溯源》（*The Universal History of Numbers*）一书中谈论玛雅数学时，顺便论及了这种同步情况：

我们因此又再一次地见证，散居在广大时空环境下互不认识的人……也会有非常类似甚至是一模一样的想法。……有些例子的解释；是因为他们接触了另一群不一样的人并受到对方的影响……真正的有效解释是因为前面提过的深层文化融合：智人（*Homo sapiens*）这种生物的智力具有共通性，把世界各个角落统整串连的潜力非常可观。

古代的希腊人受到数字深深的吸引。在这个不停变动的世界，会不会只有数字才是唯一恒常不变的？对于源自一门古希腊学派、毕达哥拉斯理念的追随者而言，数字是具体不变和缓永恒的——比所有朋友更值得信赖，却不像阿波罗或宙斯般让人无法亲近。

本书中有很多条目都跟整数有关，聪颖的数学家艾狄胥（Paul Erdos）醉心于数论——有关于整数课题的研究，他经常能轻易使用整数提出问题，尽管问题的陈述很简单，但是每一题却都是出了名的难解。艾狄胥认为如果有任何数学问题提出后经过一个世纪依然无解的话，那一定是个与数论有关的问题。

有很多宇宙万物可以用整数来表达，譬如用整数描述菊花花瓣构成的方式、兔子的繁衍、行星的轨道、音乐的和弦以及周期表元素间的关系。德国代数学家暨数论大师克罗内克（Leopold Kronecker）曾经说过：“只有整数来自于上帝，其他都是人造的。”这句

话也暗示整数是一切数学的最主要根源。

自从毕达哥拉斯的年代以来，按照整数比例演奏出的音乐，就相当受欢迎，更重要的是，在人类理解科学的演进过程中，整数也扮演着相关关键的角色，像是法国化学家拉瓦锡（Antoine Lavoisier）就是依照整数比调配组成化合物的元素，显示出原子存在的强烈证据。1925年，激发原子放射出一定整数比的光谱波长，也是当时发现原子结构的一项证据。几乎按照整数比呈现的原子量，显示原子核是由整数个数的相似核子（质子跟中子）所组成，与整数比的误差则促成同位素（基本元素的变形体，拥有几乎一样的化学特性，只在中子数的个数上有所差异）的发现。

纯同位素（pure isotope）原子量无法完全以整数比呈现的微小差异，确认了爱因斯坦（Albert Einstein）著名方程式 $E=mc^2$ 是成立的，也显示出生产原子弹的可能。在原子物理领域随处可见整数的存在。整数关系是组成数学最基本的一股势力——或者引用高斯（Carl Friedrich Gauss）的说法：“数学是所有科学的女王——而数论则是数学中的天后。”

用数学描述宇宙这门学科成长迅速，但是，我们的思考方式和语言表达能力却有待好好加强。我们一直发现或创造出新的数学，但是，我们还需要用更先进的思维才能加以理解。譬如最近这几年已经有人针对数学史上几个最著名问题提出证明，可是，他们的论证方式非常冗长又复杂，就连专家们也都没办法确定这些论证是否正确。数学家哈里斯（Thomas Hales）将一篇几何学论文投稿到世界顶级数学杂志《数学年刊》（*Annals of Mathematics*）后，整整花了五年的时间等待专家审查意见——专家们最后的结论是找不到这篇论文哪里有错，建议该期刊加以发表，可是必须加上免责声明——他们无法肯定这个证明是对的！另一个例子来自数学家德福林（Keith Devlin），他在《纽约时报》（*New York Times*）刊出的文章中承认：“数学已经进展到一个相当抽象的程度，甚至就连专家有时都无法理解最新的研究课题到底在讲什么。”如果就连专家都有这样的困扰，想要把这些信息传递给普罗大众当然更是困难重重，我们只好竭尽所能，尽力而为。虽然数学家们在建构理论、执行运算这些方面很在行，不过他们在融会贯通、解说传达先进观念的能力恐怕还是有所不足。

在此引用物理作为模拟。当海森堡（Werner Heisenberg）担心一般人可能永远也无法真正理解原子是怎么回事时，波耳（Niels Bohr）显得相对乐观。1920年，波耳在一封回给海森堡的信中提到：“我认为这是有可能的，但是要配合我们重新认识‘理解’这个词汇真正含义的过程。”我们现在使用计算机进行研究的真正原因，是因为我们直观能力有限，透过计算机实验实际上已经让数学家们取得更进一步的发现与洞见，这是在计算机普及以前做梦也想不到的结果。计算机及其绘图功能，让数学家们早在有办法正式完成

证明之前，就先看到结果，也开启了一项全新的数学研究领域，就连电子表格这种简单的计算机工具，也能让现代数学家拥有高斯、欧拉（Leonhard Euler）、牛顿等人渴望的数学功力。随便举个例子，20 世纪 90 年代末由贝利（David Bailey）和佛格森（Helaman Ferguson）两人设计的计算机程序用一条新公式把圆周率 π 、 $\log 5$ 和其他两个常数串在一块，如同克拉瑞克（Erica Klarreich）在《科学新知》（*Science News*）上的报导，只要计算机能把公式先找出来，事后完成证明的工作就简单多了，毕竟在完成数学证明的过程中，简单地知道答案这项工作，通常也是最难以跨越的障碍。

我们有时候会用数学理论预测某些要经过好几年后才能确认的现象，譬如以物理学家马克斯韦耳（James Clerk Maxwell）命名的马克斯韦耳方程式（Maxwell equation）预测了无线电波的存在；爱因斯坦场论方程式（fields equation）指出重力可以折弯光线及宇宙扩张论。物理学家狄拉克（Paul Dirac）曾说过，今天研究的数学课题可以让我们偷偷瞥见未来的物理理论，事实上，狄拉克的方程式预测了之后才陆陆续续发现反物质（antimatter）的存在。数学家罗巴切夫斯基也说过类似的话：“就算再抽象的数学分支，也总有一天会运用在诠释现实世界的物理现象上。”

在这本书里，读者们将会碰上许多被认为掌握宇宙之钥、相当有趣的几何学家。伽利略（Galileo Galilei）曾说过：“大自然的鬼斧神工不外乎是数学符号写成的篇章。”克卜勒（Johannes Kepler）曾使用正十二面体之类的柏拉图正多面体，建构太阳系的模型。20 世纪 60 年代的物理学家维格纳（Eugene Wigner）对于“数学在自然科学中具有超乎常理的效用”感到印象深刻；像是 E_8 这种大李群（large Lie Group，参照 249 页条目）：探索特殊 E_8 李群的旅程（2007 年）——则可能在某一天协助我们创造一统物理学的终极理论。2007 年，瑞典裔的美国宇宙学家泰格马克（Max Tegmark）发表一篇大受欢迎、谈论数理宇宙假说的科学文章，指出我们看到的物理实体其实都是数学结构；也就是说，我们不只可以用数学描述所处的宇宙，甚至可以说——宇宙本身就是数学。

本书的架构与目的

物理所踏出重要的每一步，都需要而且刺激数学新工具与新观念的引进，我们现在对物理定律精确性与普适性的理解，只有在它们以数学名词表示时才变得可能。

——阿蒂雅爵士 (Sir Michael Atiyah)， “拉动弦”，《自然》期刊

数学家们有一项共同的特征，那就是对于“一”以贯之的热情——迫切想要从第一原理开始说明整个研究内容的一种驱动力，结果将导致数学文本的读者们在有丝毫收获之前，必须经常在不同页面间找寻各种背景资料。为了避免相同的问题发生，本书每一则条目都很精简，最多只有几段篇幅的长度，省去分门别类的过多措辞，希望这种体例能让读者们很快进入讨论主题。想要知道什么是无限大？请参阅康托尔的超限数（1874 年）或希尔伯特旅馆悖论（1925 年）两则条目，相信读者们很快就可以有些基本概念。对于在纳粹集中营由难民开发完成、第一台成功商业化的口袋型机械计算器有兴趣吗？请参阅科塔计算器（1948 年）这一条目。

一个听起来很好玩的定理可能会让科学家在未来某一天，发展出电子设备所需的纳米线路，好奇吗？是的话，请参阅毛球定理（1912 年）这则条目。纳粹为何要逼迫波兰数学学会的会长用自己的血液喂养虱子？为什么第一位女性数学家会被谋杀？我们真的能把一个球体的内、外面翻转吗？是谁享有“数字教宗”的名号？人类什么时候开始结绳记事？为什么我们不再使用罗马数字？谁是数学史上第一位叫得出名号的人？单面的曲面可能存在吗？包含上述这些以及其他可以促进思考的问题，将会在后续篇章中一一呈现。

我所采用的方法当然也有其缺点，我没办法在短短几段文字内深入讨论某个主题，不过我会在“脚注及延伸阅读”处提供深入阅读的建议书单。除了提供最原始的资料来源外，我也会标明一些值得参考的附加资料来源；相较于年份久远的原始资料，读者们应该更容易频繁查阅这些附加的参考资料。有兴趣深入研究的读者，不妨将这些参考资料当成有用

的立足点。

我写本书的目的，是把重要的数学观念和大师级人物浓缩成精简的摘要，让每则条目都简短到能在几分钟内消化吸收，以飨广大读者。书中大多数条目，其实也是我个人相当感兴趣的内容，遗憾的是，为了避免这本书最终变得长篇赘牒，因此，并非每一项伟大的数学里程碑，都收录在这本书中。除此之外，为了在较短篇幅内交代完这些数学大事记，我也不得不忽略很多重要的数学轶事。尽管如此，相信我已经把深具历史意义，对数学、社会及我们思考方式有重大影响的主要项目都搜罗在内了。有些条目与日常生活息息相关，诸如计算尺和其他各种计算工具、巨蛋穹顶和“0”的发明等条目就属于这一类。但是我偶尔也会放进一些较轻松，但是一样具有意义的事件，像风靡一时的魔方或是解决床单对折问题等条目。分别剪辑的信息会在书中重复出现，因此，每一则条目都可以单独阅读。偶尔用粗体字标示的文本是用来提醒读者相关条目的存在，至于在每则条目下方“参考条目”部分，则像是编织一张交互连结的蛛网一样，让读者可以穿越本书的时空架构，进行一场有趣的发现之旅。

本书其实也反映出我的智识有所局限之处。尽管我尽力涉猎各种科学与数学的专业知识，但是，要在每个领域无所不知毕竟还是太困难了，因此，这本书的内容清楚显示出我个人的偏好、强项与弱点。我必须为书中主要条目的选择负起所有责任，当然也包括书中错误与不周延的部分。这本书并不是一篇大部头或学术性的论文，相反，为科学及数学相关科系的学生或是对这些学科有兴趣的广大读者带来阅读的乐趣，才是本书的主要目的。任何来自读者的回馈意见与改善建议，我都乐于接受，并且考虑把这些宝贵的观点转化成下一阶段的工作计划，扎扎实实地精益求精。

这本书根据数学发展的里程碑或重要发现诞生的年份，依照发生时间先后顺序编排。有些发展阶段的里程碑，在文献上所显示的时间点，会有些微小的差异，因为有些是以作品的出版日期，作为重要发现问世的日子，有些则是直接以数学原理真正萌芽的那一天为准，不考虑相关作品发行年份可能会延迟一年或更长时间的现象。碰到这种问题而我又无法确认重大发现确切诞生的时间点时，通常会选择以出版日期为准。

若有些条目是集众人之力而有所成时，该如何判断相关的时间点，也会是个问题。通常会选择以最早的日期为准，但有时候我会在询问过工作同仁后，选择某些重要观念开始风行的时间点为准。譬如以格雷码为例，这种编码方式是以 20 世纪五六十年代任职于贝尔实验室（Bell Telephone Labotatory）的物理学家格雷（Frank Gray）为名，类似电视讯号传送的数字通信，经常使用格雷码进行查错，并减少噪声干扰。格雷码之所以能在那段期间大量普及，部分原因与格雷在 1947 年取得相关专利认证，以及现代通信在当时

越来越发达有关。因此，尽管格雷码的概念，其实可以追溯到最初提出这个构想的法国电报专家博德（Émile Baudot）身上，归类在一个更早的时间点，但这则条目在本书中的时间划分仍旧落在 1947 年。总而言之，我会尽量在每一则条目的解说中，让读者们感受到这种时间上的跨度。

学术界有时会争论重大发现的功劳，是否该归功于传统认定的单一个人身上，譬如德里（Heinrich Dorrie）曾指出有四位学者不同意某一版的阿基米德“群牛问题”真的出自阿基米德之手，不过，他也指出另外四位学者认为这应该就是阿基米德的杰作。此外，学界对于谁才是亚里士多德轮子悖论的真正作者，也还有所争论。

读者们可能会注意到有相当数量的里程碑，是最近数十年内的成就。随便举个例子，研究人员终于在 2007 年“破解”西洋跳棋的玄机，证明只要两位玩家都不犯错的话，这个游戏一定会以平手局面结束。如同先前所提过的，数学领域近期快速成长的一部分原因，在于使用计算机作为实验数学的工具，例如，早在 1989 年，科学家们动用了 10 台计算机，计算出了所有可能的棋路——这个游戏总共有 5×10^{26} 种走法。

有时候，我会在条目内容中引用科学文章报导或知名研究人员的说词，但是，为了力求内容精简，我并未将引述的参考资料或是原作者的文献标题一并写进条目内容中。在此，先恳求各位读者能够体谅这种刻意简化的安排。

其实就连定理的名称也都暗藏玄机，譬如数学家德福林（Keith Devlin）在 2005 年为美国数学协会（Mathematical Association of America）写了一则专栏指出：

大多数数学家用一生的时间证明数学定理，能够在证明过程中将自己名字跟定理名称连在一起的例子少之又少，如同欧拉、高斯、费马等人都证明了上百条定理，其中许多定理至关重要，但是以这三位数学家命名的定理，却只占了其中一小部分。有时候，定理冠名的原则也大有问题，最有名的一个例子，大概就是我们几乎可以确定费马并没能完成证明的“费马最后定理”。这个定理其实是另有其人。在费马过世后才冠上这个名称，只因为他从这位法国数学家留在书本页缘上的潦草字迹，直接推测费马已经知道如何证明的方法。此外，勾股定理其实早在毕达哥拉斯诞生之前就已经有其他人提出相同的概念了。

最后别忘了，是数学上的新发现才让我们有探索真相本质的框架，科学家们也必须透过数学工具，预测我们所处的宇宙。换句话说，这本书中的重大发现，也是人类历史上最伟大的成就。

刚接触这本书的时候，可能会觉得这是一本充满各自独立概念的长篇目录，每一则条目间出现的人物似乎也没多大关联。但是，随着读者们越来越深入本书内容后，应该就会

开始发现这些事物间绵密的关系。这其实并不意外，科学家和数学家的最终目的，都是设法揣摩万物之间的互动模式，用有组织的原理了解各项事实之间的相互关系，再透过定理演绎出人类全新的思考模式，而不是单纯地在一堆事实中以建立公式为满足。对我而言，数学能够在我们心灵的本质上，在思路的极限处，在浩瀚宇宙中所处地位，开创出永恒的奇景。

我们的大脑经过长期演化后，能够让我们躲避非洲大草原上的狮子，却还无法让我们穿透覆盖在真相上那数不尽的面纱。我们需要数学、科学、计算机和更进化的大脑，甚至还需要文学、艺术和诗词的帮助，才能揭开这一层又一层的面纱，看见永恒的真相。对于那些已经打算从头到尾踏上阅读《数学之书》这趟旅程的读者们，祝福你们能够从各条目的关联中，以敬畏之心看待各种观点的演变，顺利航向那广阔无边的想象之洋。

导读

洪万生／台湾师范大学数学系退休教授

这是一本类似百科全书的数学普及读物。全书共有 250 个数学发展之里程碑条目，作者按照年代编写，试图勾勒人类数学发展的整体风貌。同时，作者在各个条目之后，纳入相关的参考条目，方便读者交叉阅读与参引。还有，凡是条目涉及数学家等贡献者，都清楚标注姓名于条目之下，冀收见贤思齐之效！

就条目的规划来说，除了纯数学、（传统）应用数学领域与计算机科学之外，本书还纳入具有意义深长的生物数学、游戏背景的谜题，以及一般读者深感兴趣的悖论。当然，从人类文化关怀的角度切入，作者也非常努力全面关照各个种族在历史长河中，所曾经创造或参与的数学知识活动。尽管力有未逮，譬如他对中国与日本算学发展的说明，就显得心有余而力不足，但是，他的用心还是值得肯定。另一方面，作者为 1900 年之后的数学保留了近半的篇幅，则充分反映 20 世纪数学的飞跃发展，也见证了计算机如何介入数学研究的各个层面。

就书写的叙事来说，由于作者并非数学专业科班出身，以至于他在描述近现代的数学专业知识时，手法难免比较生涩，而这一“不足”在数学史脉络的适当烘托下，有时候反倒显得朴拙和可以亲近。至于作者对于数学与数学史之理解，或许主要得自于他自身的博雅阅读经验，因此，他在某些脉络中，依赖少数几位科普作家的观点或评论，应该也是情有可原的。

有关本书之阅读与参考使用，我要特别针对中学数学教师与学生，提出一些建议。对教师来说，本书条目有益于教学的内容，可以粗略分为两大类：（1）生活经验中的趣味数学；（2）历史文化（含人类学方向）中的数学。前者主要源自人类热爱游戏谜题的好奇心，后者则是基于数学的美感与效用之双重动机。当教师有意将本书某些素材引进课堂，并借以分享数学知识活动的趣味时，则不妨将它们包装成为一个游戏，让抗拒学习的学生无法拒绝。譬如说，本书 1702 年条目“绕地球一圈的彩带”，十分简单，人人都可以参与讨论，但结果却是大大地令人感到不可思议的谜题。另一方面，教师也可利用本书条目，来组织

一个教学单元，比如说初等代数发展的轮廓，让学生在不断演练求解方程式之余，也能多少领会代数认知与方法演化的趣味与意义。针对这一主题，我推荐如下条目：“莱因德纸草文件”“戴奥芬特斯的《数论》”“数字 0”“阿尔·花拉子密的《代数》”“摩诃吠罗的算术书”“印度数学璀璨的章节”“奥玛·海亚姆的《代数问题的论著》”“阿尔·萨马瓦尔的《耀眼的代数》”“费波那契的《计算书》”“特维索算术”“卡丹诺的《大术》”“简明摘要”“虚数”以及“笛卡儿的《几何学》”，等等。上述这些条目的内容已相当丰富，足以说明西方代数发展之大概，以及三、四次方程解法之意义。当然，如能补上 13 世纪中国的天元术，乃至 17 世纪日本的点算术与旁书法这些东方代数进路，那么，我们对于代数思维的演化，就可以掌握全面的结构了。

总之，这是一本非数学专家所写的相当大部头的数学普及读物。作者的学术专长在于生物物理与生物化学，不过，他显然非常聪明干练，而且求知若渴，因而可以成功介入一些与数学有关的谜题之研究。此外，由于他拥有远较于其他科学作家更加丰富的写作经验（以每年出版一版书为准），因此，本书叙事多于论证，既凸显了它的科普定位，也见证了作者的通识素养。至于有关本书作者的有些史识的“一家之言”，我们就不必过度在意了。

目 录

简介 数学之美与效用 VII

本书的架构与目的 XI

导读 XV

- | | | | |
|-----|------------------------------|-----|--------------------------|
| 001 | 约公元前 1.5 亿年/蚂蚁的里程表 | 022 | 约公元前 250 年/圆周率 π |
| 002 | 约公元前 3000 万年/灵长类算数 | 023 | 约公元前 240 年/埃拉托斯特尼筛检法 |
| 003 | 约公元前 100 万年/为质数而生的蝉 | 024 | 约公元前 240 年/阿基米德不完全正多面体 |
| 004 | 约公元前 10 万年/结绳记事 | 025 | 约公元前 225 年/阿基米德螺线 |
| 005 | 约公元前 1.8 万年/伊尚戈骨骸 | 026 | 约公元前 180 年/曼叶线 |
| 006 | 约公元前 3000 年/秘鲁的奇普 | 027 | 约 150 年/托勒密的《天文学大成》 |
| 007 | 约公元前 3000 年/骰子 | 028 | 250 年/戴奥芬特斯的《数论》 |
| 008 | 约公元前 2200 年/魔方阵 | 029 | 约 340 年/帕普斯六边形定理 |
| 009 | 约公元前 1800 年/普林顿 322 号泥板 | 030 | 约 350 年/巴克沙里手稿 |
| 010 | 约公元前 1650 年/莱茵德纸草书 | 031 | 415 年/希帕提娅之死 |
| 011 | 约公元前 1300 年/图叉游戏 | 032 | 约 650 年/数字 0 |
| 012 | 约公元前 600 年/勾股定理与三角形 | 033 | 约 800 年/阿尔琴的《砥砺年轻人的挑战》 |
| 013 | 约公元前 548 年/围棋 | 034 | 830 年/阿尔·花拉子密的《代数》 |
| 014 | 约公元前 530 年/毕达哥拉斯创立数学兄弟会 | 035 | 834 年/博罗密环 |
| 015 | 约公元前 445 年/季诺悖论 | 036 | 850 年/《摩诃吠罗的算术书》 |
| 016 | 约公元前 440 年/月形求积 | 037 | 约 850 年/塔比亲和数公式 |
| 017 | 约公元前 350 年/柏拉图正多面体 | 038 | 约 953 年/印度数学璀璨的章节 |
| 018 | 约公元前 350 年/亚里士多德的《工具论》 | 039 | 1070 年/奥玛·海亚姆的《代数问题的论著》 |
| 019 | 约公元前 320 年/亚里士多德轮子悖论 | 040 | 约 1150 年/阿尔·萨马瓦尔的《耀眼的代数》 |
| 020 | 约公元前 300 年/欧几里得《几何原本》 | | |
| 021 | 约公元前 250 年/阿基米德：沙粒、群牛问题和胃痛游戏 | | |

- 041 约 1200 年/算盘
- 042 1202 年/斐波那契的《计算书》
- 043 1256 年/西洋棋盘上的小麦
- 044 约 1350 年/发散的调和级数
- 045 约 1427 年/余弦定律
- 046 1478 年/《特雷维索算术》
- 047 约 1500 年/圆周率 π 的级数公式之发现
- 048 1509 年/黄金比
- 049 1518 年/《转译六书》
- 050 1537 年/倾角螺线
- 051 1545 年/卡丹诺的《大术》
- 052 1556 年/《简明摘要》
- 053 1569 年/麦卡托投影法
- 054 1572 年/虚数
- 055 1611 年/克卜勒猜想
- 056 1614 年/对数
- 057 1621 年/计算尺
- 058 1636 年/费马螺线
- 059 1637 年/费马最后定理
- 060 1637 年/笛卡儿的《几何学》
- 061 1637 年/心脏线
- 062 1638 年/对数螺线
- 063 1639 年/射影几何
- 064 1641 年/托里切利的小号
- 065 1654 年/帕斯卡尔三角形
- 066 1657 年/奈尔类立方抛物线的长度
- 067 1659 年/维维亚尼定理
- 068 约 1665 年/发现微积分
- 069 1669 年/牛顿法
- 070 1673 年/等时曲线问题
- 071 1674 年/星形线
- 072 1696 年/洛必达的《阐明曲线的无穷小分析》
- 073 1702 年/绕地球一圈的彩带
- 074 1713 年/大数法则
- 075 1727 年/欧拉数 e
- 076 1730 年/斯特灵公式
- 077 1733 年/常态分布曲线
- 078 1735 年/欧拉-马歇罗尼常数
- 079 1736 年/柯尼斯堡七桥问题
- 080 1738 年/圣彼得堡悖论
- 081 1742 年/哥德巴赫猜想
- 082 1748 年/安瑟希的《解析的研究》
- 083 1751 年/欧拉多面体公式
- 084 1751 年/欧拉多边形分割问题
- 085 1759 年/骑士的旅程
- 086 1761 年/贝氏定理
- 087 1769 年/富兰克林的魔术方阵
- 088 1774 年/最小曲面
- 089 1777 年/布丰投针问题
- 090 1779 年/三十六位军官问题
- 091 约 1789 年/算额几何
- 092 1795 年/最小平方方法
- 093 1796 年/正十七边形作图
- 094 1797 年/代数基本定理
- 095 1801 年/高斯的《算术研究》
- 096 1801 年/三臂量角器