高等学校数学学习指导丛书

高等数学精讲精练（上册）

陈启浩　陈文超◉编著

与同济大学《高等数学》（第七版）同步

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

高等学校数学学习指导丛书

高等数学精讲精练（上册）

陈启浩　陈文超◉编著

与同济大学《高等数学》（第七版）同步

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学精讲精练．上册/陈启浩，陈文超编著．—4 版
—北京：北京师范大学出版社，2015.8
（高等学校数学学习指导丛书）
ISBN 978-7-303-19095-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… ②陈… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 121333 号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：大厂回族自治县正兴印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×1092 mm 1/16
印　　张：21
字　　数：525 千字
版　　次：2006 年 8 月第 1 版
2007 年 10 月第 2 版
2014 年 4 月第 3 版
2015 年 8 月第 4 版
印　　次：2015 年 8 月第 4 次印刷
定　　价：32.00 元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆
美术编辑：焦　丽　　装帧设计：焦　丽
责任校对：陈　民　　责任印制：陈　涛

最新版前言

本书自2006年出版以来深受广大读者的关爱，多次再版．最近又做了认真的修订，除改正一些不当之处外，去掉了若干个定义的复述，补充了许多新的内容（如解题方法、新颖例题），与时俱进地将本书的新版（第四版）奉献于世．

由于本书的编写立足于与高等数学课堂教学同步，又高于课堂教学，能与考研培训相衔接．书中既回答了许多初学者不易搞懂、感到迷惑的概念性问题，又给提高者介绍了许多问题的快捷计算方法．从众多读者反馈信息表明，本书已成为他们的良师益友，因此不难理解，有些高校将本书定为学习高等数学的必读参考书；也不难理解有些高校数学教师将本书列入他们编写教材或教学参考书的参考文献．

由于编者水平所限，本版中仍难免有疏漏之处，敬请广大读者与同仁继续赐教与指正．

北京邮电大学教授
陈启浩
2015年3月于北京

前 言

高等数学是大学工学、经济学、管理学各学科和专业的一门重要基础课，也是这些学科和专业的硕士研究生入学考试必考科目之一.

目前出版的高等数学辅导读物，其中虽不乏佳作，但多以题解“《高等数学》(同济大学) 习题”或“历年硕士研究生入学试题”形式出现. 本书则是旨在引导正在学习高等数学的读者，能与课堂教学或自学同步，准确灵活地理解高等数学中的众多概念与理论，熟练掌握各种问题的解题方法和技巧，较快捷、较深入地学会高等数学这门课程；同时帮助正在复习迎接硕士研究生入学考试的读者能在较短时期内使高等数学水平有一个较大幅度的提高，从容面对数学考试.

全书按同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第七版) (高等教育出版社) 各章顺序编写，共分十二章及附录 (高等数学的应用、全书综合练习题及考研试题). 每章分若干节，每节都由以下三部分组成：

一、**主要内容提要** 列出该节的核心内容，即主要定义、定理及计算公式.

二、**疑问与解答** 将该节中较易混淆的概念、学习中会出现的问题以及解题方法和技巧以疑问形式提出，并结合典型例子给出解答.

三、**基础练习** 这里的练习都是基础题，旨在通过这些练习题熟悉本节的有关概念、理论及计算方法. 基础练习包括单项选择题和填空题 (书后都有解答)，特别对单项选择题，在解答中不仅给出选择其中某项的理由，也给出不选择其余三项的理由.

此外，每章的最后都安排有**“主要计算方法总结”**一节 (除第六章) 和**综合练习** (A) (B)，通过这一节的阅读和综合练习训练，将融会贯通全章的各个知识点，提高分析问题和解决问题的能力.

北京师范大学出版社理科室的编辑们对本书面世给予了热情的支持和帮助，谨此致谢.

由于水平有限，成书时间仓促，书中疏漏等不足之处恐难幸免，恳请广大读者及同行指正.

北京邮电大学教授
陈启浩

目录

第一章 函数、极限和连续

第一节 函 数

一、主要内容提要

1 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是给定的数集. 如果对每个 $x\in D$，变量 y 按照某个法则总有确定的实数值与之对应，则称因变量 y 是自变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$ 或 $y=y(x)$ 等.

当任意的 $x\in D$ 都相应地只有一个函数值 y 时，称此函数为单值函数，否则称为多值函数. 在高等数学范畴内，凡没有特别说明的函数都是单值函数.

使表达式 $f(x)$ 有意义的实数值 x 的集合称为函数 $y=f(x)$ 的定义域，记为 D；当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值 y 的集合称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记为 W.

2 函数的四种基本性质

(1)有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义. 如果存在实数 K，使得对任意的 $x\in D$，有

$$f(x)\leqslant K \quad (\text{或 } f(x)\geqslant K, \text{或当 } K>0 \text{ 时}, |f(x)|\leqslant K),$$

则称 $f(x)$ 是 D 上的有上界的(或有下界的，或有界的)函数.

(2)单调性

设函数在数集 D 上有定义. 如果对任意的 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 是 D 上的单调增加(或单调不减)函数；如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 是 D 上的单调减少(或单调不增)函数.

单调增加(或单调不减)与单调减少(或单调不增)总称函数的单调性.

(3)奇偶性

设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的数集 D(即如果 $x\in D$，则必有 $-x\in D$，例如对称区间 $(-l,l)$ 就是这样的数集)上有定义. 如果对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ (或 $f(-x)=f(x)$)，则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数(或偶函数).

(4)周期性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义. 如果存在正数 l，使得对任意的 $x\in D$，有 $x\pm l\in D$ (例如区间 $(-\infty,+\infty)$ 就是这样的数集)，且 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，称 l 为 $f(x)$ 的一个周期.

称最小正周期，即最小正数周期(如果存在)为 $f(x)$ 的周期.

3 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为D,值域为W,如果对每个$y\in W$,可以确定D上唯一x值,使得$y=f(x)$. 如此确定的函数称为$y=f(x)$的反函数,记为$x=f^{-1}(y)$. 由于习惯上用x表示自变量,y表示因变量,因此,$y=f(x)$的反函数通常指的是$y=f^{-1}(x)$.

4 复合函数

设函数$y=f(u)$的定义域为D_1,函数$u=\varphi(x)$的定义域为D,值域为W. 如果$W\subseteq D_1$,则对每个$x\in D$,通过$u=\varphi(x)$及$y=f(u)$有数值y与之对应,如此确定的以x为自变量、y为因变量的函数,称为$u=\varphi(x)$与$y=f(u)$的复合函数,记为$y=f(\varphi(x))$.

由$u=\varphi(x)$与$y=f(u)$产生复合函数$y=f(\varphi(x))$的运算称为函数的复合运算,简称复合.

5 初等函数

幂函数$y=x^\mu$、指数函数$y=a^x$、对数函数$y=\log_a x$、三角函数及反三角函数称为基本初等函数(应记住每种基本初等函数的定义域、值域及图形).

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的,并能用一个数学表达式表示的函数称为初等函数.

不是初等函数的函数称为非初等函数. 不能转换为用一个数学表达式表示的分段函数(即在定义域的不同部分用不同数学表达式表示的函数)是常见的非初等函数.

二、疑问与解答

问 1 何谓两个函数相同?

答 定义域和表示自变量与因变量之间对应关系的法则是函数的两个要素. 如果函数$y=f(x)$和$y=g(x)$的定义域相同,均为D,且对每一个$x\in D$,有$f(x)=g(x)$,则称这两个函数相同.

例如,$f(x)=|x|$,$g(x)=\sqrt{x^2}$的定义域同为$(-\infty,+\infty)$,且对每一个$x\in(-\infty,+\infty)$,有$f(x)=g(x)$,所以$f(x)$与$g(x)$就是相同函数.

又如,$f(x)=x+1$,$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,除了$x=1$点外,$f(x)$与$g(x)$的对应法则完全一致,但由于$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$g(x)$的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,所以$f(x)$与$g(x)$不是相同函数.

问 2 怎样判别函数无界?

答 根据函数有界的定义,对在数集D上有定义的函数$f(x)$,如果对任意的正数K,对应地存在$x_0\in D$,使得$|f(x_0)|>K$,则$f(x)$在D上无界.

例如,函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上是无界的,这是因为对任意的正数K,有$x_0=\dfrac{1}{K+1}\in(0,1)$,使得$|f(x_0)|=K+1>K$.

例 1.1 判断函数$f(x)=x\cos x$在$[0,+\infty)$上的有界性.

解 对任意的正数K,有正整数$n_0>\dfrac{K}{2\pi}$,所以存在实数x_0,使得$|x_0|=2\pi n_0$. 从而有

$$|f(x_0)|=|x_0\cos x_0|=|x_0|=2\pi\, n_0>K,$$

故 $f(x)$在$[0,+\infty)$上无界.

问 3　周期函数是否都有(最小正)周期?

答　设 $f(x)$是周期函数,则对于任意的 $x\in D$($f(x)$的定义域)都有 $f(x+l)=f(x)$的正数 l 称为 $f(x)$的一个周期. 例如 $2k\pi(k\in \mathbf{N}^+)$都是函数 $y=\sin x$ 的一个周期. 通常,称函数 $f(x)$的最小正周期为它的周期. 因此,$y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数. 但是并非周期函数都有最小正周期. 例如,任何正有理数都是函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 的一个周期. 由于不存在最小的正有理数,因此,这一周期函数无最小正周期.

问 4　如何计算函数 $f(x)$的周期?

答　通常有两种方法.

方法 1　利用某些函数的已知周期计算 $f(x)$的周期. 例如,当 $f(x)$是三角函数时,可以利用 $\sin x$,$\cos x$ 的周期为 2π,$|\sin x|$,$|\cos x|$的周期为 π,$\tan x$,$\cot x$ 的周期为 π 等来计算 $f(x)$的周期.

方法 2　画出 $f(x)$的图形. 如果 $f(x)$的图形当且仅当间隔距离 $l(l>0)$后重复出现,则 $f(x)$是周期为 l 的周期函数.

例 1.2　设函数 $f(x)=\sin 2x+\cos 3x+\ln|\tan 2x|$,求它的周期.

解　$f(x)$的定义域 $D=\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{n\pi}{4},n\in \mathbf{Z}\right\}$. 对于任意 $x\in D$,由 $\sin(2x+2\pi)=\sin2(x+\pi)$知,$\sin 2x$ 的周期为 π,同样可知,$\cos 3x$ 的周期为$\frac{2\pi}{3}$,此外,由 $\ln|\tan(2x+\pi)|=\ln\left|\tan 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|$知 $\ln|\tan 2x|$的周期为$\frac{\pi}{2}$(这里利用了$|\tan u|$的周期为 π).

所以,$f(x)$的周期为 π,$\frac{2\pi}{3}$,$\frac{\pi}{2}$这三个数的最小正整数倍,即 2π.

例 1.3　设函数 $f(x)$满足 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x(x\in \mathbf{R})$,且在$[0,\pi)$上 $f(x)=0$,求 $f(x)$的周期.

解　当 $x\in[0,\pi)$时,$f(x)=0$.

令 $t=x+\pi$,则由 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$ 得

$$f(t)=f(t-\pi)-\sin t.$$

于是,$x\in[\pi,2\pi)$时,$f(x)=f(x-\pi)-\sin x=-\sin x$,

$x\in[2\pi,3\pi)$时,$f(x)=f(x-\pi)-\sin x=-\sin(x-\pi)-\sin x=0$,

$x\in[3\pi,4\pi)$时,$f(x)=f(x-\pi)-\sin x=-\sin x$,

……

$x\in[-\pi,0)$时,$f(x)=f(x+\pi)-\sin x=-\sin x$,

$x\in[-2\pi,-\pi)$时,$f(x)=f(x+\pi)-\sin x=-\sin(x+\pi)-\sin x=0$,

……

所以,$y=f(x)$的图形如图 1.1.1 所示,$y=f(x)$的图形当且仅当每隔 2π 重复出现. 因此 $f(x)$的周期为 2π.

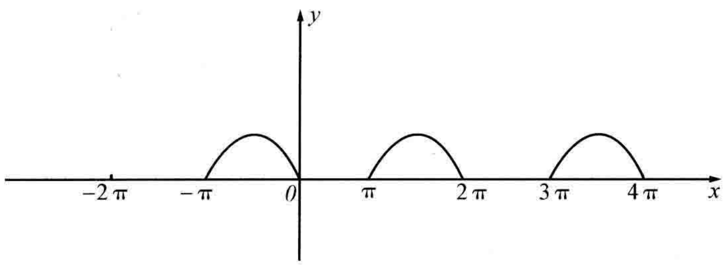

图 1.1.1

问 5 如何计算函数的反函数?

答 根据反函数的定义,在计算函数 $y=f(x)$ 的反函数时,可以分两步进行:

第 1 步 由 $y=f(x)$ 反解求出 $x=f^{-1}(y)$,$f^{-1}(y)$ 的定义域即为 $f(x)$ 的值域;

第 2 步 将 x,y 的记号互换得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

注 关于反函数,以下三点值得注意:

(1)设 $y=f(x)$ 是单调函数,则必有反函数 $y=f^{-1}(x)$,且它与 $y=f(x)$ 有相同的单调性.

(2)设函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$,则 $y=f^{-1}(x)$ 必有反函数,且这个反函数即为 $y=f(x)$.

(3)设函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$,则在 xOy 平面上,$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形为同一曲线,但 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是两条关于直线 $y=x$ 对称的曲线.

例 1.4 求函数 $y=y(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数 $y=y^{-1}(x)$.

解 $y(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$,

由 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$,即 $e^{2x}-2ye^x+1=0$ 得

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}\text{(略去不合理的解 }e^x=y-\sqrt{y^2+1}\text{)}.$$

所以由 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 解出

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})\ (-\infty<y<+\infty),$$

从而 $y=y(x)$ 的反函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\ (-\infty<x<+\infty)$.

例 1.5 求函数 $y=y(x)=\begin{cases}-e^{-(x+1)^2}, & x<-1,\\ \arcsin\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$ 的反函数 $y=y^{-1}(x)$.

解 当 $x<-1$ 时,$y=-e^{-(x+1)^2}$,它的值域为 $(-1,0)$,于是由 $y=-e^{-(x+1)^2}$ 得

$$x=-\sqrt{-\ln(-y)}-1\ (-1<y<0).$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时,$y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$,它的值域为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 于是由 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 得

$$x=-\cos y\left(0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

由此可知,从 $y=y(x)$ 解出

$$x=\begin{cases}-\sqrt{-\ln(-y)}-1, & -1<y<0,\\ -\cos y, & 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

所以，$y=y^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-\ln(-x)}-1, & -1<x<0,\\ -\cos x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

问 6　我们知道，当函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_1 包含函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 W 时，$u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 可以复合. 那么 $W\subseteq D_1$ 是否为 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 可以复合的必要条件？

答　$W\subseteq D_1$ 不是 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 可以复合的必要条件.

实际上，只要满足 $D_1\cap W\neq\varnothing$（空集）时，函数 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 就可以构成复合函数 $f(g(x))$，其定义域为 $\{x\mid u=\varphi(x),u\in D_1\cap W,x\in D\}$，其中，$D$ 是函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域.

问 7　如何计算分段函数间的复合函数？

答　分段函数是常见的非初等函数，它是定义域的不同部分用不同数学式表示的函数. 应掌握它们之间复合的具体操作. 下面用例子说明分段函数间的复合函数的计算方法.

例 1.6　设函数 $\varphi(x)=\begin{cases}e^x, & x\geqslant 0,\\ x+1, & x<0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $f(\varphi(x))$.

解　$f(\varphi(x))=\begin{cases}\varphi(x), & \varphi(x)<1,\\ \ln\varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1.\end{cases}$　①

解不等式 $\varphi(x)<1$ 得 $x<0$，且此时 $\varphi(x)=x+1$.

解不等式 $\varphi(x)\geqslant 1$ 得 $x\geqslant 0$，且此时 $\varphi(x)=e^x$.

将它们代入①得

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}x+1, x<0\\ \ln e^x, x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}x+1, x<0,\\ x, \quad x\geqslant 0.\end{cases}$$

例 1.7　已知 $f(x)=\begin{cases}-1-x, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(f(x-1))$.

解　$f(f(x-1))=\begin{cases}-1-f(x-1), & f(x-1)<0,\\ [f(x-1)]^2-1, & f(x-1)\geqslant 0,\end{cases}$　①

由于 $f(x-1)=\begin{cases}-1-(x-1), & x-1<0,\\ (x-1)^2-1, & x-1\geqslant 0\end{cases}$

$=\begin{cases}-x, & x<1,\\ x^2-2x, & x\geqslant 1,\end{cases}$

所以，$y=f(x-1)$ 的图形如图 1.1.2 所示. 由图可知，解不等式 $f(x-1)<0$ 得 $x\in(0,1)\cup[1,2)$，且当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x-1)=-x$；当 $x\in[1,2)$ 时，$f(x-1)=x^2-2x$. 解不等式 $f(x-1)\geqslant 0$ 得 $x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$，且当 $x\in(-\infty,0]$ 时，$f(x-1)=-x$；当 $x\in[2,+\infty)$ 时，$f(x-1)=x^2-2x$.

将它们代入①得

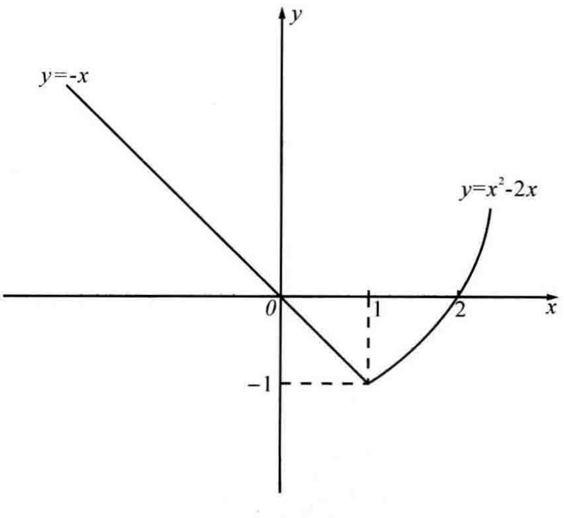

图 1.1.2

$$f(f(x-1))=\begin{cases}-1-(-x), & x\in(0,1),\\ -1-(x^2-2x), & x\in(1,2],\\ (-x)^2-1, & x\in(-\infty,0],\\ (x^2-2x)^2-1, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2-1, & x\in(-\infty,0],\\ x-1, & x\in(0,1),\\ -(x-1)^2, & x\in[1,2),\\ x^4-4x^3+4x^2-1, & x\in[2,+\infty).\end{cases}$$

三、基础练习

1. 单项选择题

(1)函数 $f(x)=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}}$ 的定义域为(　　).

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,0)\cup(0,1)$　　C. $(-\infty,0)$　　D. $(0,1)$

(2)设函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,则函数 $f(x+1)+f\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)$的定义域为(　　).

A. $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\dfrac{\sqrt{5}}{2},0\right]$　　C. $[-1,0]$　　D. $\left[-\dfrac{\sqrt{5}}{2},-\dfrac{1}{2}\right]$

(3)$f(x)=|x\sin x|e^{\sin x}$是(　　).

A. 奇函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 偶函数

(4)设函数 $f(x)=\ln(1+x)$,则复合函数 $f(f(x))$的定义域为(　　).

A. $x>0$　　B. $x>\dfrac{1}{e}-1$　　C. $x>-1$　　D. $0<x<\dfrac{1}{e}$

(5)函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x<0,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 是(　　).

A. 单调增加奇函数　　B. 单调减少奇函数

C. 单调增加偶函数　　D. 单调减少偶函数

(6)函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$即为(　　).

A. $f(x)=x$　　B. $f(x)=|x|$

C. $f(x)=\begin{cases}x-\pi, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2},\\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}-\pi-x, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2},\\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$

(7)函数 $y=\ln(\sec x+\tan x)$是(　　).

A. 以 2π 为周期的周期函数,且是偶函数

B. 以 π 为周期的周期函数,且是偶函数

C. 以 2π 为周期的周期函数，且是奇函数

D. 以 π 为周期的周期函数，且是奇函数

(8)设函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=\varphi(x)$，则(　　).

A. $y=\varphi(x)$ 的反函数是 $y=f(x)$

B. $y=\varphi(x)$ 的反函数不是 $y=f(x)$

C. 当 $y=f(x)$ 是单调减少函数时，$y=\varphi(x)$ 是单调增加函数

D. 当 $y=f(x)$ 是单调增加函数时，$y=\varphi(x)$ 是单调减少函数

2. 填空题

(1)函数 $y=\dfrac{x-2}{\ln x}+\sqrt{25-x^2}$ 的定义域为__________.

(2)函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 的值域为__________.

(3)设 $y=\sqrt{a}+f(\sqrt{x}-1)$. 当常数 $a=1$ 时，$y=x$，则函数 $f(x)=$__________.

(4)函数 $y=\dfrac{1-\sqrt{1-2x}}{1+\sqrt{1-2x}}$ 的反函数为__________(需指明定义域).

(5)设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & -1<x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\sqrt{e^x+1}, & x\leqslant1,\\ \arctan x, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)\cdot g(x)=$__________

(6)函数 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数为__________.

(7)设函数 $g(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant0,\\ 2+x, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant0,\\ x-1, & x>0,\end{cases}$ 则 $g(f(x))=$__________.

(8)设函数 $f(u)=\arcsin u$，$\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & -1<x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ x, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $f(\varphi(x))=$__________.

(9)设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant1,\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$ $y=\varphi(x)$ 是函数 $y=\begin{cases}1-x, & x\leqslant0,\\ -x^2, & x>0\end{cases}$ 的反函数，则 $f(\varphi(x))=$__________.

(10)设函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-1, & x\leqslant0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x-2, & x\geqslant0,\\ 2+x, & x<0,\end{cases}$ 则 $f^{-1}(g(x))=$________.