概率论与数理统计

张玉环 主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

概率论与数理统计

张玉环　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是结合编者多年概率论与数理统计课程的教学经验编写而成的.全书共9章,包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验以及回归分析与线性模型.编者特别注意了例题的选择与配备,另外,每章后都配备了一定数量的习题,方便不同层次学生的练习,并附有习题答案.其中,A组题侧重基本知识的训练;B组题题型丰富,包括填空、选择、计算或证明,且B组题中的计算题稍难于A组,综合性稍强.书中带"*"的内容,可由教师根据具体情况选讲.

本书可作为普通高等院校各专业的概率统计教材,也可供有关人员学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 张玉环主编. — 天津: 天津大学出版社, 2015.7

ISBN 978-7-5618-5352-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①张… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第153097号

出版发行 天津大学出版社
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647
网　　址 publish.tju.edu.cn
印　　刷 天津市蓟县宏图印务有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 13.75
字　　数 343千
版　　次 2015年8月第1版
印　　次 2015年8月第1次
定　　价 26.00元

编委会

主编　张玉环

编者　白建侠　赵凯芳　张恩路

前　　言

本教材以有利于应用型人才的培养为目标，以深化教学改革、提高教学质量为前提，结合编者多年概率论与数理统计课程的教学经验编写而成.

概率论与数理统计是大学工科、经济类、管理类等有关专业本科生的数学基础课程之一. 本教材注重基本概念、基本理论与基本方法的阐述，在保持叙述严谨性的基础上，弱化纯数学定义及复杂证明，意在培养学生解决基本问题的能力. 另外，本教材用较多篇幅对基本概念、基本理论及其应用做了解释，便于读者正确领会.

本教材由两部分组成：第一部分是第 1 章至第 5 章，讲授概率论的基础知识，包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理，约 32 学时；第二部分是第 6 章至第 9 章，讲授数理统计的基本概念、参数估计、假设检验以及回归分析与线性模型，约 32 学时. 书中带“ * ”的内容，可由教师根据具体情况选讲.

编者特别注意了例题的选择与配备，本教材例题丰富. 另外每章后都配备了一定数量的习题，方便不同层次学生的练习，并附有习题答案. 其中，A 组题侧重基本知识的训练；B 组题题型丰富，包括填空、选择、计算或证明，且 B 组题中的计算题综合性稍强，既开阔了学生的视野，又扩展了学生深入学习的空间. 本教材可以作为普通高等院校各专业的概率统计教材，也可供有关人员学习参考.

本教材由张玉环主编，具体写作分工为：第 1、9 章由赵凯芳编写，第 2、6 章由张恩路编写，第 3、7、8 章由张玉环编写，第 4、5 章由白建侠编写.

本教材的编写工作是在杨则燊教授的组织下完成的，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，敬请同行及读者指正.

编者

2015 年 3 月

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

1.1　随机试验

自然界所能观察到的现象千姿百态，概括起来无非是两类：确定性的和随机性的. 例如：向上抛一枚石子必然下落；标准大气压下，100 ℃的纯水必然沸腾；同性电荷必然相斥；物体在恒力作用下必然匀加速运动，等等。这类现象称为确定性现象，它们在一定条件下一定会发生. 另一类现象，在一定的条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，但事先又不能预测是哪一种结果，此类现象称为随机现象. 例如：抛掷一枚硬币，它可能正面朝上也可能反面朝上，就是说"正面朝上"这个结果可能出现也可能不出现；记录一段时间内某电话的呼叫次数，这个结果可能较多，也可能较少；车床加工某种产品，产品可能合格，也可能不合格；射击运动员一次射击可能中 10 环、9 环、…、1 环、脱靶，等等.

虽然随机现象中出现什么样的结果不能完全预言，但是可以假定全部可能结果是已知的. 在上述例子中，抛一枚硬币只会有"正面朝上"与"反面朝上"这两个可能结果；电话呼叫次数必然是个非负整数. 可见，"全部可能结果是已知的"这个假定是合理的，而且它会给我们带来诸多方便.

进行一次试验，如果其所得结果不能完全预言，但其全体可能结果是已知的，则称此试验为随机试验. 显然，随机试验有如下特点：

(1) 可重复性，即在相同的条件下试验可以重复进行；

(2) 不确定性，即试验的可能结果不止一个，但所有可能结果是预先可知的；

(3) 不可预见性，即在试验结束之前不能确定哪一个结果会出现.

这里及今后所使用的"试验"这一术语，其含义是广泛的，它既可以是通常意义下的物理或化学试验，也可以是对自然或社会现象的观测与记录. 通常用大写字母 E 或 $E_1, E_2, \cdots$ 表示随机试验.

例 1.1　一些随机试验.

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2：抛一枚硬币三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_3：抛掷一枚骰子，观察点数.

E_4：对一堂课的听课人数进行一次统计.

E_5：记录某段时间内电话交换台的呼叫次数.

E_6：记录一批电子产品的寿命.

虽然一次随机试验的结果不能完全预言，但是在相同的条件下重复此试验时，则会呈现出一定的数量规律性，这一点被历史上许多人的试验结果所证明. 表 1.1 列出了蒲丰等人

连续抛掷均匀硬币所得到的结果. 从表中的数据可看到,当抛掷次数很多时,正面出现频率非常接近 0.5,也就是说,出现正面与出现反面的机会差不多各占一半.

表 1.1

试验者	掷币次数	出现正面的次数	频率
德·摩根(De Morgan)	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊(Karl Pearson)	24 000	12 012	0.500 5
维尼(Reina)	30 000	14 994	0.499 8

上表表明,在相同条件下大量重复某一随机试验时,各可能结果出现的频率稳定在某个确定的数值附近,称这种性质为频率的稳定性. 频率稳定性的存在,标志着随机现象也有它的数量规律,概率论就是研究随机现象中数量规律的数学学科.

1.2 样本空间和随机事件

1.2.1 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果构成的集合,称为 E 的样本空间,记为 Ω,称 Ω 中的元素 ω 为样本点.

例 1.2 例 1.1 中随机试验的样本空间可写为:

$\Omega_1=\{H,T\}$;

$\Omega_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,TTH,THT,HTT,TTT\}$;

$\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$\Omega_4=\{1,2,\cdots,n\}$;

$\Omega_5=\{1,2,\cdots\}$;

$\Omega_6=\{T\geqslant 0\}$.

不难看出,样本空间 Ω 可以是数集,也可以是任何抽象的集合;可以是有限集、可列集,也可以是不可列的无穷集合.

1.2.2 随机事件

在实际中,我们时常会关心试验的某一部分可能结果是否出现,例如规定某种电子元件的寿命大于或等于 1 000 h 为正品,则在例 1.1 的 E_6 中我们关心元件寿命是否满足 $T\geqslant 1\ 000$,这一条件的样本点组成 Ω_6的一个子集 $A=\{T\mid T\geqslant 1\ 000\}$. 我们称 A 为试验 E_6的一个随机事件. 显然,当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时,才有 $T\geqslant 1\ 000$.

一般地,称试验 E 的样本空间的子集为 E 的随机事件,简称事件,用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 或 $A_1,A_2,A_3,\cdots$表示.

特别地，由单个样本点组成的单点集，称为基本事件，例 1.1 中 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$. 由于样本空间 Ω 包含了全部可能结果，因此在每次试验中 Ω 都会发生，故称 Ω 为必然事件；相反，空集 $\varnothing$ 不含任何样本点，每次试验必定不发生，故称 $\varnothing$ 为不可能事件.

例 1.3　E：抛掷一枚骰子，观察点数，有 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. A：掷出奇数点. B：掷出点数小于 7. C：点数大于 8. 用集合写出事件 A,B,C.

解　$A=\{1,3,5\}$；$B=\Omega$（必然事件）；$C=\varnothing$（不可能事件）.

1.2.3　事件的关系

事件是样本空间的子集，所以事件之间的关系与运算同集合之间的关系与运算完全一致. 可采用图示的方法表示事件之间的关系与运算. 设想向正方形 Ω 内任投一点 ω，则 Ω 与 ω 分别表示此试验的样本空间与样本点；而正方形 Ω 内的子集 A 代表随机事件，所投点 ω 落入 A 中，则事件 A 发生. 于是事件间的几种关系见图 1.1（文氏图）.

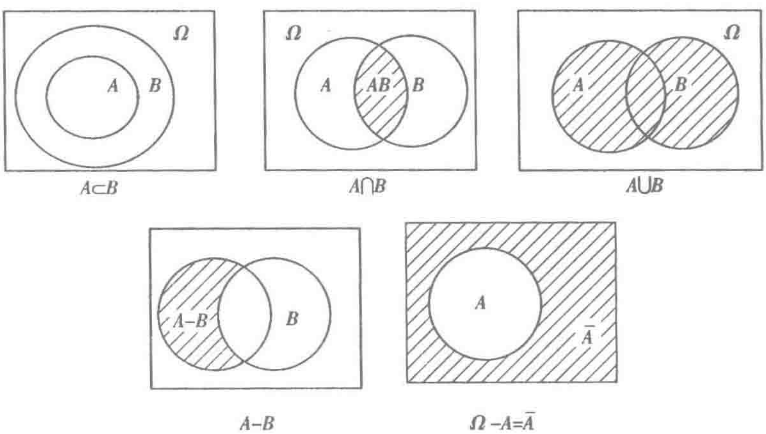

图 1.1

(1) 包含 $A\subset B$：指事件 A 发生一定导致 B 发生. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，并记 $A=B$.

例 1.4　若记 $A=\{$明天天晴$\}$，$B=\{$明天无雨$\}$，则 $A\subset B$.

若记 $A=\{$至少有 10 人候车$\}$，$B=\{$至少有 5 人候车$\}$，则 $A\subset B$.

(2) 积事件 $A\cap B=\{x:x\in A$ 且 $x\in B\}$：指 A 与 B 同时发生. $A\cap B$ 也记为 AB.

$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$：可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生.

(3) 和事件 $A\cup B=\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}$：指 A 与 B 至少有一个发生.

$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生.

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$：可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生.

(4) 当 $AB=\varnothing$ 时，称 A 与 B 互不相容或互斥.

(5)差事件 $A\overline{B}=A-B=\{x:x\in A$ 且 $x\notin B\}$:指 A 发生且 B 不发生.

(6)若 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 互逆或互相对立,且称 B 为 A 的对立事件. A 的对立事件记为 $\overline{A}$. 显然 $A\cup\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\varnothing, \overline{\overline{A}}=A$.

1.2.4 事件的运算性质

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

(2)结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$.

(3)分配律:$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC, (AB)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4)德·摩根律(对偶律):$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.5 设 $A=\{$甲来听课$\}$,$B=\{$乙来听课$\}$,则:

$A\cup B=\{$甲、乙至少有一人来听课$\}$;

$A\cap B=\{$甲、乙都来听课$\}$;

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}=\{$甲、乙都不来听课$\}$;

$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}=\{$甲、乙至少有一人不来听课$\}$.

例 1.6 某人连续买了 3 期彩票,用 A_i 表示"第 i 期中奖",$i=1,2,3$. 试用 A_i 及 $\overline{A_i}$ 表示下列事件.

(1)A:3 期中至少有一期中奖.

(2)B:3 期中恰有一期中奖.

(3)C:3 期中至多有一期中奖.

(4)D:3 期都中奖.

(5)E:3 期都不中奖.

解 (1)$A=A_1\cup A_2\cup A_3$.

(2)$B=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

(3)$C=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(4)$D=A_1A_2A_3$.

(5)$E=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$.

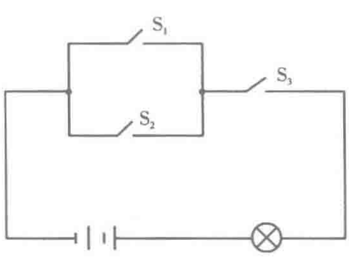

图 1.2

例 1.7 图 1.2 所示电路中,以 A 表示"信号灯亮"这一事件,以 A_1,A_2,A_3 分别表示开关 S_1,S_2,S_3 闭合事件. 易知"信号灯亮"当且仅当 S_3 闭合且 S_1,S_2 至少一个闭合,即 $A=(A_1\cup A_2)A_3$;反之"信号灯不亮"当且仅当 S_3 未闭合与 S_1,S_2 都未闭合至少一个发生,即 $\overline{A}=(\overline{A_1}\,\overline{A_2})\cup\overline{A_3}$. 事实上由德·摩根定律也可以得到:

$$\overline{A}=\overline{(A_1\cup A_2)A_3}=(\overline{A_1\cup A_2})\cup\overline{A_3}=(\overline{A_1A_2})\cup\overline{A_3}.$$

1.3　频率与概率

除去必然事件和不可能事件这两种情形外,随机事件在一次试验中是否发生是不确定的. 我们常常希望知道某一事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大,并希望找到一个合适的数来表征事件在一次试验中发生的可能性的大小. 为定量地分析和研究这种可能性的大小,首先引入频率的概念,它初步描述了事件发生的频繁程度.

1.3.1　频率

定义 1.1　在一定条件下,将一随机试验重复 n 次,如果其中事件 A 共发生 m 次,则称 $f_n(A)=\frac{m}{n}$为事件 A 发生的频率.

由定义,显然频率具有如下性质。

(1)非负性:对任意的事件 A,有 $f_n(A)\geqslant 0$.

(2)$f_n(\Omega)=1, f_n(\varnothing)=0$.

(3)有限可加性:若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$是两两互不相容的事件,则有

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)=\sum_{i=1}^{k} f_n(A_i).$$

人们在长期的实践中发现,对于一个随机事件 A,不同的试验次数以及相同的试验次数不同的记录者所得到的事件 A 发生频率常常是不同的,但随着试验重复次数 n 的不断增大,随机事件 A 发生的频率总在一个确定的数值附近摆动,这个确定的数值好像是它的摆动中心,也好像是当 $n\to\infty$ 时频率的极限.

为揭示这一规律,历史上有许多数学家进行了成千上万次抛掷硬币的试验,部分结果记录在表 1.1 中. 从表中可以得到蒲丰等人的试验结果表明大量重复地抛一枚均匀硬币时,正面出现的频率稳定在 0.5 附近. 频率的稳定值 0.5 恰好代表了正面与反面出现的可能性的大小,这个数值称为事件 A 发生的概率.

1.3.2　概率的定义及性质

苏联数学家柯尔莫哥洛夫于 1933 年提出了概率的公理化定义,为概率论具有严谨的逻辑推理打下了坚实的基础.

定义 1.2(概率的公理化定义)　设 Ω 是随机试验 E 的样本空间,对每个事件 A,赋予一个实数 $P(A)$与之对应,若 $P(A)$满足:

(1)(非负性)对每个事件 A,均有 $P(A)\geqslant 0$;

(2)(规范性)对于必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$;

(3)(可列可加性)若 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 是两两互不相容的事件,即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$,且 $i,j=1,2,\cdots$,有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

实际上,概率 $P(A)$ 就是当试验次数 $n\to\infty$ 时,$f_n(A)$ 的一种极限,其严格含义将在第5章详加叙述.

由概率的公理化定义,我们可推得概率的一些性质.

性质1 不可能事件 $\varnothing$ 的概率为0,即 $P(\varnothing)=0$.

证明 因为 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$,由概率的可列可加性得

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$

又 $P(\Omega)=1$,所以

$1=1+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$

再由概率的非负性知 $P(\varnothing)\geqslant 0$,故 $P(\varnothing)=0$.

注意此性质反之不成立. 也即若 $P(A)=0$,并不意味着 A 是不可能事件.

性质2(有限可加性) 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

证明 因 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,其中 $A_{n+k}=\varnothing,k=1,2,\cdots$.

根据 $P(\varnothing)=0$ 及概率的可列可加性得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质3 设 A,B 是两个事件,若 $A\subset B$,则有 $P(B-A)=P(B)-P(A),P(B)\geqslant P(A)$.

证明 因 $A\subset B$ 知 $B=A\cup(B-A)$,且 $A(B-A)=\varnothing$,由概率的有限可加性得

$$P(B)=P(A)+P(B-A).$$

所以 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

再由概率非负性知 $P(B-A)\geqslant 0$,得到 $P(B)\geqslant P(A)$.

性质4 对任意一事件 $A,P(A)\leqslant 1$.

证明 因为 $A\subset\Omega$,由性质3得到 $P(A)\leqslant P(\Omega)=1$.

性质5 逆事件的概率,对于任一事件 A,有 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

证明 因 $A\cup\bar{A}=\Omega$ 且 $A\bar{A}=\varnothing$ 得到 $1=P(\Omega)=P(A)+P(\bar{A})$,所以 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

性质6(加法公式) 对于任意事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证明 因 $A\cup B=A\cup(B-AB)$,$A(B-AB)=\varnothing$,且 $AB\subset B$,故

$$P(A\cup B)=P(A\cup(B-AB))=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质6还可以推广到更多个事件的情形,对任意三个事件 A_1,A_2,A_3,有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

对于任意的 n 个事件,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

它的计算方法是“加足减,减足加”,所以也称多去少补原理.

例1.8 设 $P(A)=\dfrac{1}{3},P(B)=\dfrac{1}{4}$,在下列的三种情况下分别求出 $P(\bar{B}A)$ 的值.

(1)A 与 B 互不相容;(2)$B\subset A$;(3)$P(AB)=\frac{1}{6}$.

解　(1)由于 $AB=\varnothing$,所以 $A\subset\bar{B}$,$\bar{B}A=A$,故 $P(\bar{B}A)=P(A)=\frac{1}{3}$;

(2)当 $B\subset A$ 时,$\bar{B}A=A-B$,故 $P(\bar{B}A)=P(A-B)=P(A)-P(B)=\frac{1}{12}$;

(3)由于 $\bar{B}A=A-B=A-AB$,而 $AB\subset A$,所以

$$P(\bar{B}A)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

1.4　古典概型和几何概型

1.4.1　古典概型

如果随机试验具有以下特点:

(1)样本空间只含有有限多个样本点;

(2)各样本点出现的可能性相等.

则称此试验为古典概型.

下面讨论古典概型事件概率的计算公式.

设试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$. 由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同,即有 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$,又由于基本事件是两两互不相容的,于是

$$1=P(\Omega)=P(\omega_1\cup\omega_2\cup\cdots\cup\omega_n)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_n),$$

即

$$P(\omega_i)=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

若事件 A 包含 k 个基本事件,则

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}=\frac{n(A)}{n(\Omega)},\tag{1.1}$$

其中,$n(\Omega)$表示 Ω 中基本事件总数,$n(A)$表示 A 中所包含的基本事件数.

1.4.2　计数原理

乘法原理:假设进行过程Ⅰ有 n_1 种方式,而对于过程Ⅰ的每一方式,进行过程Ⅱ,都有 n_2 种方式,那么依次进行过程Ⅰ和Ⅱ共有 n_1n_2 种方式.

加法原理:假定进行过程Ⅰ有 n_1 种方式,进行过程Ⅱ有 n_2 种方式,那么进行过程Ⅰ或Ⅱ共有 n_1+n_2 种方式.

从 n 个不同的元素中,有放回地取 r 个元素组成的可重复排列的种数为 n^r. 从 n 个不同的元素中,不放回地取 $r(r\leqslant n)$个元素组成的不可重复排列的种数为 $\mathrm{P}_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$. 从 n 个不同的元素中,不放回地取 $r(r\leqslant n)$个元素组成的组合种数为

$$C_n^r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{P_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}.$$

易得 $C_n^r=C_n^{n-r}$.

1.4.3 例题

例 1.9 抛一枚硬币 3 次,求恰好出现两次正面的概率.

解 此试验样本空间 $\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,TTT,TTH,THT,HTT\}$,$A$ 表示恰好出现两次正面,则 $A=\{HHT,HTH,THH\}$,所以

$$P(A)=\frac{3}{8}.$$

例 1.10(抽签问题) 一袋中有 a 个红球,b 个白球,记 $a+b=n$,设每次摸到各球的概率相等,每次从袋中摸一球,不放回地摸 n 次,并用 A_k 表示第 k 次摸到红球($1\leqslant k\leqslant n$).

求 $P(A_k)$.

解 方法 1 视同色球可辨,$n(\Omega)$是这$(a+b)$个球的全排列,即 $n(\Omega)=(a+b)!$. A_k分成两个串行过程,先从 a 个红球中选一个放在第 k 个位置上(C_a^1种选法);再将其余$(a+b-1)$个球在其余位置上任意排列($(a+b-1)!$ 种方式),$n(A_k)=C_a^1\cdot(a+b-1)!$,因此 $P(A_k)=\frac{a}{a+b}$.

方法 2 视同色球不可辨,此时样本点取决于这$(a+b)$个位置中哪 a 个放红球,$n(\Omega)=C_{a+b}^a$,而 A_k要求第 k 个位置必须是红球,只需要从$(a+b-1)$个位置中选$(a-1)$个放其余的红球,即 $n(A_k)=C_{a+b-1}^{a-1}$,因此 $P(A_k)=\frac{a}{a+b}$.

例 1.11(占位问题) 将 n 个不同的球,随机放入 N 个抽屉中($n\leqslant N$),设每一球落入各个抽屉的概率相同,且各抽屉容纳球数无限制. 分别求下列事件的概率.

A:某指定的 n 个抽屉中各有一个球.

B:恰有 n 个抽屉中各有一个球.

C:每个抽屉至多有一个球.

D:某指定的抽屉中恰有 m 个球($m\leqslant n$).

解 因为每一个球等可能放入 N 个抽屉中的任何一个,故 $n(\Omega)=N^n$. 事件 A 中样本点取决于 n 个球放在 n 个抽屉的顺序,故 $n(A)=n!$,从而有 $P(A)=n!\ /N^n$.

事件 B 和事件 C 一样,事件 B,C 和事件 A 的差别在于有小球的 n 个抽屉没有被指定,用乘法原理可以得到 $n(B)=n(C)=C_N^n\cdot n!$,故 $P(B)=P(C)=C_N^n\cdot n!\ /N^n$.

为了弄清楚事件 D 所含样本点数 $n(D)$,先取 m 个球放入指定的抽屉中,共有 C_n^m种取法,然后把剩下的$(n-m)$个球任意地放入其他$(N-1)$个抽屉中,共有$(N-1)^{n-m}$种,根据乘法原理可得 $n(D)=C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}$,故 $P(D)=C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}/N^n$.

例 1.12(生日问题) 求任意 n 个人中,至少有两个人在同一天过生日的概率(一年按 365 天计算).

解　可以把一年 365 天理解成 365 个抽屉,n 个人去任意占这 365 个抽屉."至少有两个人在同一天过生日"是上面"每个抽屉至多有一个球"的逆事件,于是所求概率

$$p=1-\frac{C_{365}^{n}\cdot n!}{365^{n}}.$$

当 $n=64$ 时,$p=0.997$.

*1.4.4　几何概型

并不是所有试验都像前面讲的那样都局限于有限多个样本点的情形. 有时,试验的结果是无限多的. 虽然试验的结果无限多,但由于试验的任意性或对称性,每个样本点出现的机会仍然相等. 此时不能简单地通过样本点的计数来计算概率.

定义 1.3　设 Ω 为非空集合,满足条件 $0<m(\Omega)<+\infty$. 对 Ω 的任何可以度量的子集 A,称

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)} \tag{1.2}$$

为事件 A 的几何概率,其中 $m(A)$,$m(\Omega)$ 表示 A,Ω 的几何度量(长度、面积或体积).

例 1.13　设在区间 $[0,3]$ 内任取一数值,求取到的数落在 $[0,1]$ 内的概率.

解　设 A 为取到的数落在 $[0,1]$ 内. 因为 $\Omega=[0,3]$,$m(\Omega)=3$,且 $m(A)=1$,故 $P(A)=1/3$.

例 1.14(约会问题)　甲、乙两人约定在 $[0,T]$ 的时间段内去某地见面,规定先到者等候一段时间 $t(t\leqslant T)$ 再离开,试求甲、乙能见面的概率.

解　分别用 x,y 表示甲、乙到达见面地点的时刻,则样本点是坐标平面上一个点 (x,y),样本空间 $\Omega=\{(x,y):0\leqslant x,y\leqslant T\}$ 是一个边长为 T 的正方形,而且样本点在 Ω 中分布是均匀的. 事件 $A=$"甲乙能见面"$=\{(x,y)\in\Omega:|x-y|\leqslant t\}$. 如图 1.3 所示,则

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2.$$

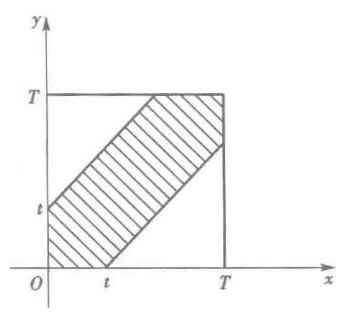

图 1.3

1.5　条件概率

1.5.1　条件概率

本章开始介绍的随机现象,就是"在一定的条件下进行试验或观测,其结果不能完全预言"的现象. 这里的条件是整个试验的共同条件,是讨论问题的前提. 有的时候,人们还需要讨论某些附加条件下的试验结果,通常以"某个事件已经发生"的形式给出,这就是已知某事件已发生后的条件概率.

例如将一枚硬币抛掷 3 次,观察正反面出现的情况,设事件 A 为"至少出现一次正面

H”，事件 B 为“3 次掷出同一面”，现在求已知事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率.样本空间 $\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,TTH,THT,HTT,TTT\}$ 含有 8 个样本点，事件 A 中含有 7 个样本点，B 中含有 2 个样本点，从而 $P(A)=\frac{7}{8}$，$P(B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. 如果已经得知事件 A 已经发生，样本空间已经改变（就是 A），此时 B 发生概率记为 $P(B|A)=\frac{1}{7}$. 注意到 $n(A)=7$，$n(AB)=1$，故

$$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{n(AB)/n(\Omega)}{n(A)/n(\Omega)}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

这启发我们以 $P(AB)$ 与 $P(A)$ 之比作为条件概率 $P(B|A)$ 的一般定义.

定义 1.4 设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.3}$$

为在事件 A 已发生的条件下 B 发生的概率.

容易验证，条件概率 $P(\cdot|A)$ 具有概率定义中的 3 条性质：

(1) $P(B|A)\geqslant 0$；

(2) $P(\Omega|A)=1$；

(3) 若 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$ 两两互不相容，则 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n|A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(B_n|A)$.

所以说条件概率也是概率. 于是 1.3 节中给出的所有结果也适用于条件概率.

例如：若 $B\subset C$，则 $P(B|A)\leqslant P(C|A)$；

$P(B|A)=1-P(\bar{B}|A)$；

$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)$.

1.5.2 乘法公式

由条件概率的定义，立即可得下述定理.

定理 1.1 设 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A). \tag{1.4}$$

设 $P(AB)>0$，则有

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB). \tag{1.5}$$

设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，$n\geqslant 2$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{1.6}$$

上述 3 个公式都称为乘法公式.

例 1.15 设盒中有 3 只红球，5 只白球，每次从盒中任取 1 只球，观其颜色后放回，再放入一只与所取颜色相同的球. 若连续取球 4 次，试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率.

解 以 $A_i(i=1,2,3,4)$ 表示第 i 次取到红球，则 $\overline{A_3}$，$\overline{A_4}$ 分别表示第三、四次取到白球. 应用乘法公式(1.6)可得