中考各科疑难解答

数学 卷

张溉 雷学丽 主编

北京理工大学出版社

SHUXUE shuxue

zhong kao ge ke yi nan jie da

中考各科疑难解答

数学卷

张溉　雷学丽　主编
张德本　梁淑勤　傅佑珊　编写

北京理工大学出版社

(京)新登字 149 号

中考各科疑难解答

数 学 卷

张 溉 雷学丽 主编

*

北京理工大学出版社出版发行

各地新华书店经售

秦皇岛市卢龙印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 32 开本 12.125 印张 270 千字

1993 年 2 月第一版 1995 年 4 月第三次印刷

ISBN 7-81013-709-3/G·187

印数:21001—31100 册 定价:7.80 元

前　言

本书根据国家教委颁发的数学大纲和教材，以及中考的最新规定，特邀请了北京市部分重点中学有丰富实践经验的高级教师，编写了《中考各科疑难解答》这套丛书，它包括《语文卷》、《英语卷》、《数学卷》、《物理卷》、《化学卷》五个分册。

本丛书的主要内容及特点如下：

1. 知识结构：本丛书将帮助读者把所学过的知识形成比较科学的知识结构形式，这不仅有助于理解知识的来龙去脉及其相互间的关系，也有助于理解知识的重点及其关键环节，可加强理解知识的深度和广度，而且这也是增强记忆的基本方法。

2. 思维方法：本丛书不仅以常规的思维方法去解答问题，更主要的是教会读者，从联系、运动、变化和发展的观点，去提出问题、思考问题和解决问题。达到举一反三，学一题会一类的目的，本丛书各种类型的例题，就是为此目的而设计的。

3. 能力训练：本丛书根据少而精的原则，精心设计了一套目的性强的综合练习题，并配有习题答案。这些练习题除了一些常规题型外，还包含有适应各级考试的题型，这对于提高思维的逻辑性、灵活性，适应考试改革的要求，将起着积极的作用。

本丛书是初中学生的良师益友，对于教师的教学也有参

考价值。本分册由雷学丽主编。参加编写的有（按姓氏笔划为序）张德本、梁淑勤、傅佑珊。欢迎广大读者对本书的不足之处提出批评指正。

本《丛书》编写小组

1992年9月于北京

目　　录

第一章　数与式

一、知识结构

1．整体结构

本章主要内容包括：实数有关概念，分数四则运算；代数式的有关概念、分类和运算．

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{有限小数}\\\text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数——无限不循环小数}\end{cases}
$$

$$
\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式——根式}\end{cases}
$$

人类对于数的认识是随着生产实践的需要和社会的进步而不断扩展的，数的范围的扩展首先是从自然数（正整数）扩展到有理数，当引入无理数（无限不循环小数）这一概念以后，数的概念便扩展到实数．本着形与数结合的关系，建立起实数轴，使实数与数轴建立起一一对应的关系．

数的运算法则、运算性质和运算定律的应用，是准确进行四则运算的依据，而迅速、准确地进行四则运算，是数学能力的一种反应．所以在复习过程中，对有关概念着重于理

解，有关法则、性质牢固地掌握，为下一步学习打好基础.

2. 局部结构

(1)实数有关概念

ⓐ 实数的绝对值：

$$|a| = \begin{cases} a, & (a \geqslant 0) \\ -a, & (a < 0) \end{cases}$$

ⓑ 互为相反数：在数轴上原点两旁，离开原点距离相等的两个点所表示的两个数叫做互为相反的数. 如 a 与 b 是互为相反的数则满足 $a+b=0$

ⓒ 互为倒数：两个数的乘积等于 1，叫做这两个数互为倒数，a 的倒数是 $\frac{1}{a}$，$(a \neq 0)$ 零没有倒数.

(2) 多项式的因式分解

把一个多项式化成几个整式积的形式，叫做多项式的因式分解. 多项式的因式分解与多项式的乘法. 是互为因果的两种运算、从变形上看是两种截然不同的变形；从因果关系来看又是有着密切联系的变形. 乘法中所提出的问题，恰是因式分解的结果，整式乘法的结果又恰是因式分解中的问题.

(3) 分式

ⓐ 意义：除式中含有字母的有理式叫做分式.

ⓑ 分式值为 0：分式的分母不为 0，分子为 0 则分式的值为 0.

ⓒ 分式无意义：分式的分母为 0，分式无意义.

ⓓ 分式基本性质：

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}, (m \text{ 是不为 0 的代数式})$$

ⓔ 分式四则运算法则：(略)

(4) 根式

ⓐ 根式的意义：表示方根的代数式叫做根式.

在根式 $\sqrt[n]{a}$ 中

$\begin{cases} n\text{ 是奇数时 } a \text{ 可取任何实数} \\ n\text{ 是偶数时 } a \text{ 是非负数} \end{cases}$

ⓑ 根式的性质：(设 n 是大于 1 的整数)

a. $(\sqrt[n]{a})^n = a$

b. 当 n 是奇数时，$\sqrt[n]{a^n} = a$

c. 当 n 是偶数时，$\sqrt[n]{a^n} = |a|$

ⓒ 算术根定义：正数正的方根叫做算术根，零的算术根是零.

ⓓ 算术根性质

a. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$，$(a \geqslant 0, m、n、p$ 都是自然数，$n > 1)$

b. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$，$(a \geqslant 0, b \geqslant 0, n > 1$ 的自然数)

c. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$，$(a \geqslant 0, b > 0, n > 1$ 的自然数)

d. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$，$(a \geqslant 0, m、n$ 都是大于 1 的自然数.)

(5) 指数

ⓐ 意义：式子 a^b 中的 a 叫做底数，b 叫做指数.

ⓑ 指数的扩展

a. 零指数幂　$a^0 = 1, (a \neq 0)$；

b. 负整数指数幂　$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, (a \neq 0, m$ 是正整数)；

c. 正分数指数幂　$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, (a \geqslant 0, m, n$ 是正整

数)；

d. 负分数指数幂 $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$,($a>0,m,n$ 为正整数).

ⓒ 有理数指数幂的运算法则：

a. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$,($a>0,m$、n 为有理数)；

b. $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$,($a>0,m$、n 为有理数)；

c $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$,($a>0,b>0,n$ 是有理数).

二、思维方法

例 1 选择题：(答案中有且只有一个答案是正确的)

(1) 已知 x 的相反数等于它本身,则它的倒数是( )

(A) $\frac{1}{x}$; (B) $-\frac{1}{x}$; (C)0;(D) 不存在.

解：方法 1 直接解法：由已知条件有 $-x=x$ $2x=0$ $\therefore x=0$,而 0 没有倒数,故选(D).

方法 2 排除法：$\because$ 0 无倒数故排除(C),$\frac{1}{x}$ 的倒数是 x 而它的相反数是 $-x$,不是它本身,故除掉(A),同理排除(B),故选(D).

(2) 已知 $a^2>b^2$ 则一定有( )

(A)$a>b$;(B)$|a|>|b|$;(C)$a>|b|$;(D)$a=b$.

解：用特殊值筛选：(D) 容易排除. 如 a 是负数 b 是 0 满足已知条件,但不满足条件(C),故排除,同理可排除答案(A),故选(B)

(3) 若 $a>b>c$ $I_1=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$, $I_2=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$,$I_3=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$ 则乘积 $I_1\cdot I_2$,$I_1\cdot I_3$,I_2

$\cdot I_3, I_2^2$ 中最小的一个是( )

(A)$I_1 \cdot I_2$;(B)$I_1 \cdot I_3$;(C)$I_2 \cdot I_3$;(D)I_2^2.

解:用特殊值法:因为答案中只有一个是正确的,而且此题形式繁琐不易选择,故给出几个简单的特殊值,使计算简单,过程简洁,思路清晰,判断可靠.令 $a=3, b=2, c=1$ 代入 $I_1=\sqrt{20}$ $I_2=\sqrt{18}$ $I_3=\sqrt{26}$ $\because I_3>I_1>I_2$ 故 I_2^2 最小的选(D)

(4) 已知:$a=1-\sqrt{3}, b=\sqrt{3}-1, c=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}, d=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$;$a,b,c,d$ 的大小次序是( )

(A)$a>b>c$; (B)$d>b>c>a$;

(C)$c>d>b>a$; (D)$d>c>b>a$.

解:恒等变形后进行比较:$c=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, d=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ $a=1-\sqrt{3}<0$ $\therefore a$ 最小,$b=\sqrt{3}-1>c=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,其中大的 b 与 d 比较 $d-b=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}>0$ $\therefore d$ 最大故应选(B).

(5) 已知 $\left|a+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}b\right|+(b-\sqrt{3})^2=0$,则 $a,b,a-b,a+b$ 中在数轴上所对应的点与原点距离最近的是:

(A)a; (B)b; (C)$a+b$; (D)$a-b$.

解:求出 a 与 b 的确定值后,在数轴上选取正确答案.

由已知可得$\begin{cases} b - \sqrt{3} = 0 \\ a + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} b = 0 \end{cases}$ $\therefore b = \sqrt{3}, a = -\sqrt{2}$

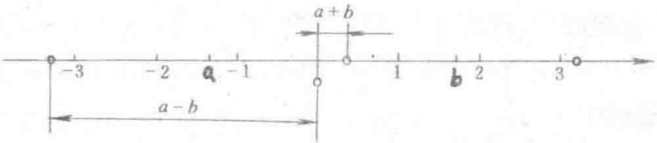

图 1-1

从观察可知 $a + b$ 所对应点到原点距离最近故应选(C)

[此题亦可通过运算进行比较选取答案(C).

$\because a - b = -(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ $a + b = \sqrt{3} - \sqrt{2} < \sqrt{2}$]

例 2 求适合的正整数解

(1) $|2x - 3| = 5$

(2) $|x^2 - 2| = 7$

解:(1) 原等式变形为 $2x - 3 = \pm 5$

当 $2x - 3 = 5$ 时 $x = 4$

当 $2x - 3 = -5$ 时 $x = -1$ (舍)

$\therefore$ 适合的正整数解是 $x = 4$

(2) $x^2 - 2 = \pm 7$

当 $x^2 - 2 = 7$ 时 $x^2 = 9$ $\therefore x = \pm 3$

$\therefore$ 适合的正整数解是 $x = 3$

当 $x^2 - 2 = -7$ 时 $x^2 = -5$(无解)

例 3 把下列各数填入下面适当的集合中：$\sqrt{5}$，-1，

$3.1415, \pi, \log_e\sqrt{e}, -\lg\frac{1}{100}, \lg 3, \sin 90°,$

$0.1001000100001\cdots\cdots, -\sqrt{1000}, \sqrt{441}.$

整数集合:{ }

正有理数集合:{ }

无理数集合:{ }

解:整数集合:$\{-1, -\lg\frac{1}{100}, \sin 90°, \sqrt{441}\}$

正有理数集合:$\{-\lg\frac{1}{100}, \log_e\sqrt{e}, \sin 90°, \sqrt{441}\}$

无理数集合:$\{\sqrt{5}, \pi, \lg 3, -\sqrt{1000},$

$0.1001000100001\cdots\cdots\}$

说明:在判断一个实数是属于什么数集的时候,不仅要看外形,主要要看它的实质.比如$\frac{5}{\sin 90°}$是分数形式,但它所表示的数确是整数而 sin30° 所表示的数确是分数,在判断一个小数是有理数还是无理数时要注意:无限小数不一定是无理数,而无理数一定是无限小数.

一般地,不尽方根是无理数的一种,比如 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$……,常用对数中真数不能写成 10 的整数次方幂时是无理数的一种,π,e 是无理数.

例 4 化简下列各式

(1) $|a-2|+|2a-3|$

(2) $\sqrt{a^2-6a+9}-|a+1|$.

解:(1)

$$原式=\begin{cases}a-2+2a-3=3a-5, & (a\geqslant 2 时)\\ 2-a+2a-3=a-1, & (\frac{3}{2}\leqslant a<2 时)\\ 2-a+3-2a=5-3a, & (a<\frac{3}{2} 时)\end{cases}$$

$$(2)\ 原式=\begin{cases}a-3-(a+1)=-4, (a\geqslant 3 时)\\ 3-a-(a+1)=2-2a, (-1\leqslant a<3 时)\\ 3-a-[-(a+1)]=4, (a<-1 时)\end{cases}$$

说明：绝对值和算术根是两个重要的概念，它们之间即有区别，有时又有一致的地方. 比如 a 是实数，则有 $\sqrt{a^2}=|a|$ 一般地 $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$（n 是自然数），这就是说在研究一个实数的偶次方根时，可以转化为研究绝对值的问题，使新旧知识有机的结合起来，加深对新概念的理解.

在考虑代数式的取值范围和比大小关系时常见到的非负数有：

①$a^2\geqslant 0$，　　② $\sqrt{a^2}=|a|\geqslant 0$

在研究这些问题时要注意：

ⓐ　正数与整数的区别；

ⓑ　正数与非负数的区别.

例 5　若 $\sqrt{a+4}+|b-3|=0$ 求 $\frac{2b-1}{a+3b}$ 的值

解：由已知可得：

$a+4=0$，　$b-3=0$

$\therefore a=-4$，　$b=3$

$$\frac{2b-1}{a+3b}=\frac{2\times(+3)-1}{-4+3\times 3}=\frac{6-1}{-4+9}=1$$

例 6　已知，$m^2+n^2-4m-6n+13=0$　求 $\log_m \frac{4}{3}n$

的值.

解：由已知变形有：$(m-2)^2+(n-3)^2=0$，$m-2=0$，且 $n-3=0$ 满足等式

$\therefore m=2,n=3$，把 m、n 的值代入，得 $\log_m \frac{4}{3}n=\log_2(\frac{4}{3}\times 3)=\log_2 4=2$

例 7 已知 $|2\sin\alpha-1|+\sqrt{a-4\sin\alpha}=0$ 求 $(\sqrt{2}-2\cdot\sin\alpha)^0$ 的值.

解：由已知可得

$2\sin\alpha-1=0$ 且 $a-4\sin\alpha=0$

$\therefore \sin\alpha=\frac{1}{2},a=2$，把 $\sin\alpha$ 与 a 的值代入 $(\sqrt{2}-2\sin\alpha)^0=(\sqrt{2}-1)^0=1$

说明：如果几个非负数和为 0，当且仅当每个非负数是 0 时才成立.

例 8 比较下列各组数的大小

(1) -3.1415 与 $-\pi$　　(2) $1\frac{1}{7}$ 和 1.142857

(3) $\sqrt{11}-\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{10}-2$

解：(1) $\because \pi=3.1415926\cdots,3.14159\cdots>3.1415$

$\therefore -3.1415>-\pi$

(2) $\because 1\frac{1}{7}=1.\dot{1}4285\dot{7}$　　$\therefore 1\frac{1}{7}>1.142857$

(3) $\because (\sqrt{11}-\sqrt{3})^2=14-2\sqrt{33},(\sqrt{10}-2)^2=14-4\sqrt{10}=14-2\sqrt{40}$

$\because 40>33 \therefore 2\sqrt{33}<2\sqrt{40}$　$\therefore -2\sqrt{33}>-2\sqrt{40}$，$14-2\sqrt{33}>14-2\sqrt{40}$

即是$(\sqrt{11}-\sqrt{3})^2>(\sqrt{10}-2)^2$　又∵ $\sqrt{11}-\sqrt{3}>0$，$\sqrt{10}-2>0$

∴ $\sqrt{11}-3>\sqrt{10}-2$

说明：比较两个含有根号的正数的大小的时候，如果不易直接比较，可以把两个数分别平方，平方数较大的数原数也较大.

例 9　试比较边长为 3.14cm 的正方形的周长与半径为 2cm 的圆的周长的大小.

解　正方形周长 $A_1=4\times3.14$

圆的周长 $A_2=2\pi R=4\times\pi$

∵$\pi>3.14$　　∴$4\pi>4\times3.14$

∴ 圆的周长 > 正方形周长

例 10　比较下面各组式的大小

(1)$(a^2-2)^2$ 与 a^4-3a^2+4

(2)$2-\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

解(1)：作差比，

$(a^2-2)^2-(a^4-3a^2+4)$

$=a^4-4a^2+4-a^4+3a^2-4=-a^2\leqslant0$

∴$a^2-3a^2+4\geqslant(a^2-2)^2$

解 (2)：方法 1　作商比，

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+3-\sqrt{6}}{4-3}$$

$$=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+3-\sqrt{6}$$