数理化竞赛丛书

初中数学竞赛解题思维方法与技巧

夏兴国

河南教育出版社

初中数学竞赛解题思维方法与技巧

夏 兴 国

河 南 教 育 出 版 社

（豫）新登字03号

初中数学竞赛解题思维方法与技巧

夏 兴 国

责任编辑 刘宗贤

河南教育出版社出版

河南第一新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 8.652印张 180千字

1992年1月第1版 1992年1月第1次印刷

印数1—9,125册

ISBN 7-5347-0982-2/G·816

定 价 2.35元

前　言

凡是参加数学竞赛的学生，在校的数学成绩都在优秀之列，但他们的数学竞赛成绩并非个个优良。究其原因，他们都很好地掌握了数学基本知识和基本技能，但他们中的许多人对数学思维方法缺乏系统的了解和训练，特别是遇到一个从未见过的新题型，往往束手无策。于是，我在多年的数学竞赛教练的实践中，逐渐萌发了一个念头：要为中学生写一本关于数学竞赛解题思维方法与技巧方面的书。

我是满怀着激情写这本书的。因为我认为数学并不仅仅是公理、定义、定理、习题，数学应该包括数学家在发现和创造这些公理、定义、定理、习题时的全部经验和智慧。而数学思维方法正是这些经验和智慧的结晶。一个学习数学的人，如果不学习数学思维方法，只能入宝山而空返。

我希望拥有诗一样的年华、花一样的岁月的青少年朋友，能学习数学思维方法，变得更加机敏和聪慧。因为你们将面对新世纪的雄风，脚踏高科技的浪潮，成为一代叱咤风云的新人。

然而，思维毕竟是在头脑中进行的。一个个脑神经元的接通显得异常神奇。用语言来描述思维自然十分困难。在我这本书里，不妥之处，在所难免。因此，恳切希望读者把本书看作引玉之砖，并欢迎多加教正。

我还要感谢所有数学竞赛书刊的作者们。他们的作品在各个不同的侧面给予我启迪，引发我深思，成为我完成本书的重要的基础。

愿大家都来学习和研究数学思维方法，愿大家都开动各人神奇的大脑来探讨大脑真正的神奇。

夏兴国

1990年11月

目　录

一、智慧之源

谁说数字中听不出跳动的音符？
谁说公式里看不到五彩的花朵？
谁说定理内寻不着奔腾的江河？
谁说证明时找不见汹涌的波涛？

数学的林间回荡着智慧的睿语，
数学的花园飘洒着智慧的芳香，
数学的峡谷飞挂着智慧的瀑布，
数学的海洋连接着智慧的云天．

1.智慧高于知识

先看一道例题：

计算　17＋17＋17＋17＋17＋17＋17＋17＋17＋10．

这道题太容易了，它是一道简单的算术题．但是，切莫小看这道题．你不妨先动手做一做．

你是用什么方法做的呢？

如果一个数一个数地加起来，显得笨拙；如果用17×9＋10来做，灵巧得多；要是想到17×10－7，那就更上一层楼了．

三种做法，三个层次．个中差异，不在知识，而在智慧．

再看一个正方体．如果它的边长是4，那么用一把刀，

从上向下均匀地切 3 刀，从左向右均匀地切 3 刀，再从后向前均匀地切 3 刀，我们可以把这个正方体切成 $4\times4\times4=64$ 块边长为 1 的正方体。

做同样的事情，切的刀数能不能减少一些呢？可以！

切 3 刀先把原来的正方体切成 8 块边长为 2 的正方体；再把这 8 个正方体垂直地重迭起来，从上向下切一个“+”字，用 2 刀将它们切成32块长、宽、高分别为 1、1、2 的长方体（今后简称 $1\times1\times2$ 的长方体）；最后把这32个长方体放倒，再重迭起来，用 1 刀将它们切成64块边长为 1 的正方体。

前一种方法用了 9 刀，后一种方法允许切后重新排列各块的位置，只需要 6 刀。

类似地，如果用前一种方法来切一个边长为 3 的正方体，需要 6 刀切得 $3\times3\times3=27$ 块边长为 1 的正方体。现在的问题是，如果用后一种方法，能不能减少刀数呢？因为 1 刀最多能切成 2 块，2 刀最多能切成 4 块，3 刀最多能切成 8 块，4 刀最多能切成16块，所以只需要讨论 5 刀能否切成所要求的27块。也就是说，5 刀能不能将一个 $3\times3\times3$ 的正方体切成27块 $1\times1\times1$ 的小正方体？

先告诉你答案：5 刀不行，至少 6 刀。还告诉你，要证明这个答案，只需要一个知识，那就是：每一个正方体共有 6 个面。现在请你自己动手来证一证。

如果你证出来了，值得庆贺，因为这个问题曾经难倒过一些大学生。如果百思不得其解，请读下面的证明：

在27块小正方体中，有一个藏在原正方体的正中央。不管你用何种方法来切，每一刀至多切出这个小正方体的一个

面．而这个小正方体的六个面都是切出来的，因此，至少需要 6 刀．

这个证明简单明了，而且只用到小学就知道的知识．可是，我们在寻找这个证明时，远非如此轻而易举．为什么？因为想得到这个证明，不仅需要知识，更需要智慧．证题者必须在种类繁多的切割方法面前，在27个小正方体之中，不被干扰，不受迷惑，长驱直入，紧紧抓住深藏正中的小正方体，找出解决这个问题的金钥匙．这里，我们感受到高于知识之上的智慧的力量．

2. 智慧是闪光的思维

例 1　在每个方格中填入一个数字，使得等式成立：

$$\frac{1}{\square\square\square\square\square}+\frac{1}{1991}=\frac{1}{\square\square\square\square}$$

题目通过眼睛进入大脑，一百亿个脑细胞在活动．信息、想象、判断交替出现，交相辉映：这道题目和中学数学教科书里的例题、习题不一样，无例题可模仿，需要自己去发现解题方法．9 个方格需填 9 个合适的数字，怎么寻找？把每一个分数看作一个整体吧，问题就是找两个分子为 1 的分数，使得其中一个加上$\frac{1}{1991}$等于另一个．好象还不好办．思维中断，陷入沉思．忽然灵机一动，思维接通．把等式改个形式，加法变成减法：

$$\frac{1}{1991}=\frac{1}{\square\square\square\square}-\frac{1}{\square\square\square\square\square}.$$

把$\frac{1}{1991}$写成两个分子为 1 的分数的差．思维顿悟，这不是拆

项吗？它多象

$$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\qquad \frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\cdots\cdots.$$

是不是可以用

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}?$$

啊，不能！$\frac{1}{1991}$不能写成$\frac{1}{n(n+1)}$的形式．思维再次中断，又陷入沉思．不能灰心，我一定要把这道题做出来．继续思索．虽然$\frac{1}{1991}$不能写成$\frac{1}{n(n+1)}$，但$\frac{1}{1991}=\frac{1}{1\times1991}=\frac{1}{11\times181}$，也就是说，$\frac{1}{1991}$可以写成$\frac{1}{n(n+d)}$．它能拆项吗？可是

$$\frac{1}{n(n+d)}\neq\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}.$$

只有 $$\frac{d}{n(n+d)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}.$$

嗨！两边除以d，这不就成了吗？

$$\frac{1}{n(n+d)}=\frac{1}{nd}-\frac{1}{d(n+d)}.$$

$n=1$，$d=1990$时，得

$$\frac{1}{1\times1991}=\frac{1}{1\times1990}-\frac{1}{1990\times1991},$$

显然1990×1991已经不是五位数了，不符合题意．$n=11$，$d=170$时，得

$$\frac{1}{11\times181}=\frac{1}{11\times170}-\frac{1}{170\times181},$$

即 $$\frac{1}{1991}=\frac{1}{1870}-\frac{1}{30770}.$$

问题的解答就是

$$\frac{1}{30770}+\frac{1}{1991}=\frac{1}{1870}.$$

我解出来了！顿时，一种发现后的快感涌上心头，象打了胜仗的一名将军，又象刚发现新大陆的哥伦布.

当我们的思维看到了原来看不到的东西，呈现出一种洞察力的时候，当我们的思维发现了深藏着的规律，创造了解决问题的新方法，呈现出一种创造与发现能力的时候，我们的思维在闪光. 这闪光的思维就是智慧.

例2 一个旅行者早上 8 点从山下启程向山顶爬去. 到达山顶后，休息了一晚上. 第二天，他仍在早上 8 点从山顶出发，顺原路下山. 试证明：在他经过的山路上至少有一个地点，他上山或下山到达这个地点时，钟表上的指针恰好指向同一个时刻.

这道题的证明不需要专门的数学知识，用到的仅仅是生活常识，你不妨自己先试一试.

证出来了吗？

其实，你只要想到，第一天和第二天的差别在钟表的指针上是不存在的，你就可以把原来的问题转化为下面一个问题：

两个旅行者早上 8 点分别从山顶和山脚顺着同一条山路相向而行，一个下山，另一个上山. 试证明：在这条山路上

至少有一个地点，他们俩恰好同时到达．

同时到达同一个地点不就是相遇吗！因此问题又转化为证明这两个旅行者一定相遇．这已经是不需要证明的明显的事实了．

这种思维太巧妙了．竟然利用钟表指针一天又一天地重复转动，把不同的两天设想成同一天，又把同一个旅行者设想成不同的旅行者．巧妙的思维闪耀着洞察力的光辉，闪耀着创造与发现能力的光辉．

例3 五个同学量体重，每人和其他各人分别合称一次，记录公斤数如下：111、112、113、114、115、116、117、118、119、121．求每个同学的体重．

开动脑筋思索：记录的公斤数一大堆，却偏偏没有说谁和谁合称重多少．如果设五个同学的体重的公斤数分别是x_1，x_2，x_3，x_4，x_5．因为每人上称4次，所以可以得一个方程．

$$4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=111+112+113+114+115+116+117+118+119+121.$$

即 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=289.$

但是其他方程再也列不出来了．

怎么办？现在是需要洞察力的时候了．

可以从记录上看出，五个同学的体重一定互不相同．（否则，不可能记录下10个不同的公斤数．）因此，我们可以设$x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$．

接着又可以看出，x_1+x_2最小，x_1+x_3次小，x_4+x_5最大，x_3+x_5次大．于是得

$x_1+x_2=111,$

$x_1+x_3=112$,

$x_3+x_5=119$,

$x_4+x_5=121$.

对于五个未知数，找到了五个方程，很容易解得

$x_1=55$，$x_2=56$，$x_3=57$，$x_4=59$，$x_5=62$.

例4 给定如图1—1所示的两个三角形ABC和EFG. 各条线段长度如图所示，并且$\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=120^\circ$. 求证：$x=u+v+w$.

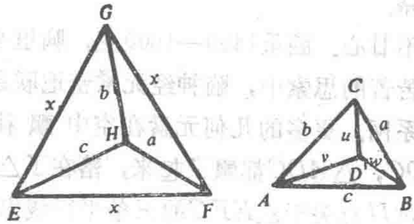

图1—1

每一道例题都在初中数学的范围之内可以解决. 在你读了任何一道题目之后，我们都希望你能启动自己的大脑，先想一想. 然后，再往下读关于这道题的分析或解答. 这样做，肯定对读者是大有益处的. 这样的话，我们在以后不再重复了.

解一道没有例题可以模仿的趣题，好象在一个人迹罕至的高山上攀登. 尽管没有路，我们还是要踏出一条路来. 探索中多少次失败，多少块伤痕，我们毫不在意. 登顶的希望始终激励着我们. 我们宁用一万次失败，来换取一次成功.

终于我们的脑子被激活了，题目中的几何图形仿佛一块

块地都有了生命．它们从纸上轻轻地飘起来，在空中游动．

三角形EFG是一个正三角形．$\triangle ADC$在空中飘移着转动着．C落到G处，A落到H处．D会落到EG上吗？不知道．如果落上了，利用同侧内角互补，两直线平行，AD就成了过H点直线FG的平行线．如果落不上呢？在EG上取点T，使$TG=DC$，来证明$\triangle TGH\cong\triangle DCA$吧．不行，条件不足．过$H$作$HT\parallel FG$，来证明$\triangle TGH\cong\triangle DCA$呢？条件仍然不足．失败了，山重水复疑无路．

不甘心．脑重1400—1500克，脑里平均约有10^{14}个神经元，苦苦的思索中，脑神经元紧密地联系，织成了高密度的联系网．更多的几何元素在空中飘移转动，$\triangle ADB$，$\triangle BDC$，$\triangle ADC$都飘了起来，落在了$\triangle EFG$的相应的位置上．过H点关于$\triangle EFG$的三条平行线出现了（如图1—2）．仍不知道D点落在何处，该落在$\triangle EFG$三边上的，管不了那么多了，先放一放．

注意力到了图1—2．

这里有三个平行四边形，四个正三角形．

$GT=HQ=QN=HN=SF$，

$GQ=TH=TM=MH=EP$，

$ME=HP=PS=HS=NF$．

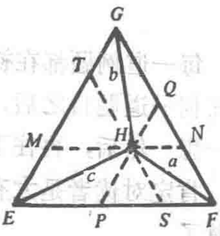

图1—2

$\triangle EMH$绕H点一个顺时针旋转，M落到T上．$\triangle HNF$一个平移，N落到T上，再一个逆时针旋转，H落到G上，F落到$\triangle EMH$的E点的新位置上．恰好拼成了一个边长为a、b、c的三角形（如图1—3）．