高等数学

自测题

华东理工大学高等数学教研组◎编

GAODENG SHUXUE ZICETI

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高等数学自测题

华东理工大学高等数学教研组　编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学自测题 / 华东理工大学高等数学教研组编. —上海：华东理工大学出版社，2015.9

ISBN 978-7-5628-4353-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①华… Ⅲ.①高等数学—高等学校—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 182106 号

高等数学自测题

编　　者 / 华东理工大学高等数学教研组
策划编辑 / 周永斌
责任编辑 / 刘　婧
责任校对 / 金慧娟
封面设计 / 裘幼华
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地　址：上海市梅陇路 130 号，200237
电　话：(021)64250306(营销部)
(021)64251837(编辑室)
传　真：(021)64252707
网　址：press.ecust.edu.cn
印　　刷 / 上海展强印刷有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 20.25
字　　数 / 312 千字
版　　次 / 2015 年 9 月第 1 版
印　　次 / 2015 年 9 月第 1 次
书　　号 / ISBN 978-7-5628-4353-5
定　　价 / 45.00 元

联系我们：电 子 邮 箱 press@ecust.edu.cn
官 方 微 博 e.weibo.com/ecustpress
天猫旗舰店 http://hdlgdxcbs.tmall.com

華東理工大學出版社

编委会名单

顾问 谢国瑞　龚成通

主编 殷锡鸣　龚成通

编者 谢国瑞　龚成通　殷锡鸣　王　刚
冯家裕　许树声　蒲思立　陈秀华
曹宵临　李红英　江志松　苏纯洁

统稿 殷锡鸣　李红英

前 言

高等数学课程是高等院校理工科、商学院各专业的一门重要的基础课. 长期以来,高等数学课程以其概念抽象、内容多、范围广、习题量大、技巧性强等特点成为大学学习的一道“坎”. 所以,如何帮助学生学好高等数学,让他们顺利地跨过这道“坎”就成为我们必须思考和解决的问题. 本书的编者以帮助学生跨过这道“坎”,提高学生的高等数学解题能力为目标,针对学生普遍反映的问题,以自测练习的形式组织编写了这本学习辅导书. 我们认为一本好的练习书就是一间好的“练功房”,而构建一间好的“练功房”对学生而言是学好课程所必不可少的,同时也是广大学生所迫切需要的.

本书的前身是华东理工大学“高等数学第二课堂”的自测练习册. 该练习册作为“高等数学第二课堂”课程的辅导书在华东理工大学已经运用近 30 年,其间经过多次修订,因此可以说,它是华东理工大学广大高等数学教师几代人共同努力、长期积累的结晶. 30 年的运用表明,该练习册特色鲜明,深受历届学生的喜爱,是学生不可或缺的学习辅导资料. 该练习册所发挥的作用经过近 30 年的检验,证明它对提高高等数学解题能力、保证高等数学课程的教学质量是非常有效的,取得了丰硕的教学成果. 更可喜的是它让广大学生心中的那道“坎”变成向成功更迈进一步的新起点.

全书对原练习册进行了修订,具有以下特点.

(1) 练习题内容全面、新颖、典型、富有启发性

学习高等数学的第一个难点是习题量大、方法多. 本书以问题为主线设计练习卷,总共安排了 38 个练习卷. 每一练习卷涵盖这一问题中的典型习题、典型方法以及所延伸出的综合性习题,内容全面,习题典型,富有启发性.

(2) 解题方法、解题技巧全面,满足考研要求

学习高等数学的另一难点是概念多、解题技巧性强. 本书在每一练习卷中尽可能安排了有关问题的概念性练习题,有些练习题的概念性很强,具有较大的难度. 本书分层次地安排了各种难度的习题,全面、深入地覆盖了所涉问题的解题技巧,全书的总体难度达到了考研的要求.

本书由华东理工大学高等数学教研组编写. 全书由殷锡鸣教授和李红英副教授统稿. 在编写过程中,得到了华东理工大学理学院院长鲁习文教授、数学系主任李建奎教授、学校教务处领导以及华东理工大学出版社的大力关心和支持,在此表示衷心的感谢. 同时还要特别感

谢为本书作出重要贡献，长期在华东理工大学从事高等数学教学的谢国瑞、龚成通、冯家裕、许树声、王刚、蒲思立、陈秀华老师，感谢曹宵临、江志松、苏纯洁、赵建丛、邵方明、宋洁、李继根、陆履亨、孟雅琴、李义龙、方民、吕雪芹、胡海燕、贺秀霞、卢俊杰、赵瑞芳、马先锋、黄秋深等老师，他们在本书的编写过程中提出了许多宝贵的建议.

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者予以指正.

编者

2015 年 7 月

目　录

练 习 一
有关一元函数的一些问题

一、选择题.

(1) 下列各组函数中所表示的两个函数是同一个函数的是 ( )

(A) $y = \ln x^2, y = 2\ln x$ (B) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right), y = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

(C) $y = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}, y = \frac{\sqrt[3]{1 + x^3}}{x}$ (D) $y = \arcsin(\sin x), y = \sin(\arcsin x)$

(2) 函数 $f(x) = \tan\left(x^2 - \frac{\pi}{2}\right)$是 ( )

(A) 奇函数 (B) 偶函数

(C) 周期函数 (D) 单调函数

(3) 函数 $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$ 的最小正周期为 ( )

(A) 2π (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

(4) 设 $f(x)$ 是$(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数且 $x \geqslant 0$ 时 $f(x) = 2^x - 1$,则当 $x < 0$ 时,$f(x) =$ ( )

(A) $2^{-x} - 1$ (B) $-(2^x - 1)$

(C) $-(2^{-x} - 1)$ (D) $2^x - 1$

(5) 设函数 $f(x)$ 是$(-\infty, +\infty)$ 上的以 $T = 3$ 为周期的周期函数,在区间$[0,3)$ 上有 $f(x) = x$,则 $f(100) =$ ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 100

二、填空题.

(1) 若函数 $f(x)$ 的定义域为$[a,b]$,则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为__________.

(2) 若 $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}, f[\varphi(x)] = 1 + x^2$,则 $\varphi(x) =$ __________.

(3) 若函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$,则 $f[f(x)] =$ __________.

(4) 指数螺旋线 $\rho = e^{\theta}$ 上点$(1,0)$ 在直角坐标系上的坐标为__________.

(5) 双纽线 $\rho^2 = 2\cos 2\theta$ 和圆 $\rho = 2\sin\theta$ 的交点为____________________.

三、证明下列恒等式.

(1) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$;

(2) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.

四、求函数 $f(x)$,使其对一切非零实数 x,总有如下等式成立:

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}.$$

五、设函数 $f(x)$ 的定义域为$(-3,1]$,求函数 $f(2x-1)+f(1-x)$ 的定义域.

六、设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\leqslant 0,\\ x,\ x>0,\end{cases}$ 求 $f(1-x)$.

七、求函数 $f(x)=(1+x^2)\cdot \operatorname{sgn} x$ 的反函数.

八、已知函数 $f(x)$ 和 $f(ax+b)$ 是两个不同的函数，但它们有相同的定义域 $[0,1]$，求常数 a 和 b.

九、设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，曲线 $y=f(x)$ 有对称轴 $x=1$，试证明函数 $f(x)$ 必是周期函数.

十、用不等式组表示心形线 $\rho=a(1-\cos\theta)$ 外且在圆 $\rho=\dfrac{a}{2}$ 内部分的区域，并求这两条曲线的交点.

十一、设 $f_n(x)(n=0,1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，

$$f_0(x)=1,f_1(x)=x,f_{n+1}(x)=2xf_n(x)-f_{n-1}(x)(n=1,2,\cdots),$$

证明

$$f_n(x)=\cos(n\arccos x).$$

十二、求函数 $f(x)$，使其对任一实数 x，总有如下等式成立：

$$f(2+x)+2f(1-x)=x^2.$$

十三、已知 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 互为反函数，求函数 $y=f\left(\dfrac{1+g(x)}{1-g(x)}\right)$ 的反函数.

十四、若函数 $f(x)$ 是单调增函数，曲线 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 有交点，试证明此交点必在直线 $y=x$ 上.

练 习 二
利用导数的定义计算导数的问题

一、填空题.

(1) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\,|\,x^3-x\,|$ 的不可导点为__________.

(2) 设函数 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2n)$,则 $f'(-n)=$ __________.

(3) 若 $f'(0)=2$,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-h)-f(3h)}{2h}=$ __________.

(4) 若 $f'(x_0)=-1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0+5x)}=$ __________.

二、从导数定义出发证明:

(1) 若 $f(x)=\sqrt{x}$,则 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}(x_0>0)$;

(2) 若 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $f'(x_0)=-\dfrac{1}{x_0^2}(x_0\neq 0)$.

三、(1) 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,证明极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 存在;

(2) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 存在,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否一定可导?若是,则证明之;若不是,则举一反例.

四、有一质线(具有质量的线段)位于 x 轴的 $[a,b]$ 区间上,该质线在区间 $[a,x]$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 上的质量为 $m(x)$,对质量为 Δm 且长为 Δx 的质线,可定义其平均线密度为

$$\bar{\mu}=\frac{\Delta m}{\Delta x},$$

试建立此质线在点 $x_0\in(a,b)$ 处的线密度 $\mu(x_0)$ 的表达式.

五、设对任意实数 x 均有 $f(1+x)=af(x)$，且 $f'(0)=b$(a,b 为非零常数)，证明$f(x)$ 在 $x=1$ 点处可导，并求 $f'(1)$.

六、若对一切实数 x,y，有 $f(x+y)=e^{x}f(y)+e^{y}f(x)$，且 $f'(0)=1$，证明当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 也可导，且 $f'(x)=e^{x}+f(x)$.

练习三
极限的基本计算方法、无穷小与无穷大及其有关的一些问题

一、选择题.

(1) 当 $x \to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限 ( )

(A) 等于 2　(B) 等于 0　(C) 为 ∞　(D) 不存在,但非 ∞

(2) 当 $x \to 0$ 时,下列四个无穷小中哪一个是比其他三个更高阶的无穷小 ( )

(A) x^2　(B) $1-\cos x$　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$　(D) $\tan x-\sin x$

(3) 当 $t \to 0$ 时,无穷小量 $f(t)=t\sin 2t$ 与 $g(t)=\cos 2t-1$ 之间的关系为 ( )

(A) $g(t)=o[f(t)]$　(B) $f(t)=o[g(t)]$

(C) $f(t)\sim g(t)$　(D) 同阶无穷小,但非等价无穷小

(4) 当 $x \to \pi$ 时,$\tan x\sin x$ 是关于基本无穷小 $x-\pi$ 的 ( )

(A) 一阶无穷小　(B) 二阶无穷小　(C) 三阶无穷小　(D) 四阶无穷小

(5) 设 $f(x)=(1-\cos x)\ln(1+x^2)$, $g(x)=x\sin(x^n)$, $h(x)=e^{-x^2}-1$,其中 n 为正整数.已知在 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小,$g(x)$ 是比 $h(x)$ 高阶的无穷小,则必有 $n=$ ( )

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=L$ 的充要条件是 ( )

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} f(3+n)=L$　(B) $\lim\limits_{n\to\infty} f(3-n)=L$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} f(3n)=L$　(D) $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{n}{3}\right)=L$

(7) "数列 $\{a_n\}$ 有界"是"数列 $\{a_n\}$ 收敛"的 ( )

(A) 充要条件　(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件　(D) 既非充分条件也非必要条件

二、填空题.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx}{x^2}=1(k>0)$,则 $k=$ __________.

(2) 设函数 $f(x)=\dfrac{2x-3}{3x-2}\ln x$,则当 $x\to$ __________ 时,$f(x)$ 是无穷小;当 $x\to$ __________