

高等数学

自测题

华东理工大学高等数学教研组 〇 编

GAODENG SHUXUE ZICETI

高等数学自测题

华东理工大学高等数学教研组 编



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

图书在版编目(CIP) 数据

高等数学自测题 / 华东理工大学高等数学教研组编. —上海:
华东理工大学出版社, 2015. 9

ISBN 978-7-5628-4353-5

I. ①高… II. ①华… III. ①高等数学—高等学校—习题集
IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 182106 号

高等数学自测题

编 者 / 华东理工大学高等数学教研组

策划编辑 / 周永斌

责任编辑 / 刘 婧

责任校对 / 金慧娟

封面设计 / 裘幼华

出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司

地 址: 上海市梅陇路 130 号, 200237

电 话: (021)64250306(营销部)

(021)64251837(编辑室)

传 真: (021)64252707

网 址: press.ecust.edu.cn

印 刷 / 上海展强印刷有限公司

开 本 / 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 / 20.25

字 数 / 312 千字

版 次 / 2015 年 9 月第 1 版

印 次 / 2015 年 9 月第 1 次

书 号 / ISBN 978-7-5628-4353-5

定 价 / 45.00 元

联系我们: 电子邮箱 press@ecust.edu.cn

官方微博 e.weibo.com/ecustpress

天猫旗舰店 <http://hdlgdxcb.tmall.com>

华东理工大学出版社



客户关注请进入天猫旗舰店

编委会名单

顾问	谢国瑞	龚成通		
主编	殷锡鸣	龚成通		
编者	谢国瑞	龚成通	殷锡鸣	王 刚
	冯家裕	许树声	蒲思立	陈秀华
	曹宵临	李红英	江志松	苏纯洁
统稿	殷锡鸣	李红英		

前言

高等数学课程是高等院校理工科、商学院各专业的一门重要的基础课。长期以来,高等数学课程以其概念抽象、内容多、范围广、习题量大、技巧性强等特点成为大学学习的一道“坎”。所以,如何帮助学生学好高等数学,让他们顺利地跨过这道“坎”就成为我们必须思考和解决的问题。本书的编者以帮助学生跨过这道“坎”,提高学生的高等数学解题能力为目标,针对学生普遍反映的问题,以自测练习的形式组织编写了这本学习辅导书。我们认为一本好的练习书就是一间好的“练功房”,而构建一间好的“练功房”对学生而言是学好课程所必不可少的,同时也是广大学生所迫切需要的。

本书的前身是华东理工大学“高等数学第二课堂”的自测练习册。该练习册作为“高等数学第二课堂”课程的辅导书在华东理工大学已经运用近 30 年,其间经过多次修订,因此可以说,它是华东理工大学广大高等数学教师几代人共同努力、长期积累的结晶。30 年的运用表明,该练习册特色鲜明,深受历届学生的喜爱,是学生不可或缺的学习辅导资料。该练习册所发挥的作用经过近 30 年的检验,证明它对提高高等数学解题能力、保证高等数学课程的教学质量是非常有效的,取得了丰硕的教学成果。更可喜的是它让广大学生心中的那道“坎”变成向成功更迈进一步的新起点。

全书对原练习册进行了修订,具有以下特点。

(1) 练习题内容全面、新颖、典型、富有启发性

学习高等数学的第一个难点是习题量大、方法多。本书以问题为主线设计练习卷,总共安排了 38 个练习卷。每一练习卷涵盖这一问题中的典型习题、典型方法以及所延伸出的综合性习题,内容全面,习题典型,富有启发性。

(2) 解题方法、解题技巧全面,满足考研要求

学习高等数学的另一难点是概念多、解题技巧性强。本书在每一练习卷中尽可能安排了有关问题的概念性练习题,有些练习题的概念性很强,具有较大的难度。本书分层次地安排了各种难度的习题,全面、深入地覆盖了所涉问题的解题技巧,全书的总体难度达到了考研的要求。

本书由华东理工大学高等数学教研组编写。全书由殷锡鸣教授和李红英副教授统稿。在编写过程中,得到了华东理工大学理学院院长鲁习文教授、数学系主任李建奎教授、学校教务处领导以及华东理工大学出版社的大力关心和支持,在此表示衷心的感谢。同时还要特别感



谢为本书作出重要贡献,长期在华东理工大学从事高等数学教学的谢国瑞、龚成通、冯家裕、许树声、王刚、蒲思立、陈秀华老师,感谢曹宵临、江志松、苏纯洁、赵建丛、邵方明、宋洁、李继根、陆履亨、孟雅琴、李义龙、方民、吕雪芹、胡海燕、贺秀霞、卢俊杰、赵瑞芳、马先锋、黄秋深等老师,他们在本书的编写过程中提出了许多宝贵的建议.

由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,敬请读者予以指正.

编者

2015年7月

目 录

练习一	有关一元函数的一些问题	1
练习二	利用导数的定义计算导数的问题	6
练习三	极限的基本计算方法、无穷小与无穷大及其有关的一些问题	9
练习四	函数的连续性、间断点分类、与闭区间上连续函数性质有关的方程根和 等式证明问题	19
练习五	可导性问题以及导数的计算	25
练习六	平面曲线的切线与法线计算问题	32
练习七	微分中值定理在方程根的存在性和等式证明问题中的应用	36
练习八	洛必达法则在极限、导数计算中的应用	41
练习九	泰勒公式及其在极限计算、等式和不等式证明问题中的应用	47
练习十	函数的单调性、极值、凹凸性、曲率及其在不等式证明问题中的应用	51
练习十一	最值问题及其在不等式证明问题中的应用	57
练习十二	定积分、不定积分的概念和性质,变限积分函数,积分等式与 不等式证明问题	62
练习十三	不定积分的凑微分法与换元法	69
练习十四	不定积分的分部积分法	76
练习十五	有理函数、三角有理函数、简单无理函数的积分法	80
练习十六	定积分的积分法及其在数列极限、积分等式与不等式证明问题中的应用	85
练习十七	定积分的应用	94
练习十八	广义积分的计算	107
练习十九	数项级数的敛散性判别	112
练习二十	幂级数的收敛域确定、幂级数求和、函数的幂级数展开及其应用	118
第一学期期中模拟试题(一)(8 学分)		123
第一学期期中模拟试题(二)(8 学分)		127
第一学期期中模拟试题(一)(9 学分或 11 学分)		131
第一学期期中模拟试题(二)(9 学分或 11 学分)		136
第一学期期末模拟试题(一)(8 学分)		141

第一学期期终模拟试题(二)(8 学分)	145
第一学期期终模拟试题(一)(9 学分或 11 学分)	149
第一学期期终模拟试题(二)(9 学分或 11 学分)	154
练习二十一 一阶微分方程的求解	159
练习二十二 二阶可降阶微分方程、高阶线性微分方程的求解	164
练习二十三 微分方程的应用问题	170
练习二十四 向量代数、平面方程问题	175
练习二十五 直线方程问题	181
练习二十六 空间曲面与空间曲线问题	189
练习二十七 多元函数的极限、连续性、偏导数、方向导数、全微分的计算	192
练习二十八 多元函数微分学在几何问题上的应用	199
练习二十九 高阶偏导数的计算,局部极值、条件极值问题	205
练习三十 二重积分的计算及其应用	212
练习三十一 三重积分的计算	219
练习三十二 第一型曲线、曲面积分的计算	223
练习三十三 物体的质心坐标、转动惯量的计算	228
练习三十四 利用定积分计算第二型平面和空间曲线积分	233
练习三十五 利用格林公式、积分与路径无关性质计算第二型平面曲线积分	236
练习三十六 利用二重积分、高斯公式、无散度场的曲面积分性质计算 第二型曲面积分	240
练习三十七 利用斯托克斯公式、无旋场的曲线积分性质计算第二型空间曲线积分	247
练习三十八 函数的傅里叶级数展开及其应用	249
第二学期期中模拟试题(一)	252
第二学期期中模拟试题(二)	258
第二学期期终模拟试题(一)	263
第二学期期终模拟试题(二)	269
参考答案	274

练习一

有关一元函数的一些问题

一、选择题.

- (1) 下列各组函数中所表示的两个函数是同一个函数的是 ()
- (A) $y = \ln x^2, y = 2\ln x$ (B) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right), y = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$
- (C) $y = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}, y = \frac{\sqrt[3]{1 + x^3}}{x}$ (D) $y = \arcsin(\sin x), y = \sin(\arcsin x)$
- (2) 函数 $f(x) = \tan\left(x^2 - \frac{\pi}{2}\right)$ 是 ()
- (A) 奇函数 (B) 偶函数
- (C) 周期函数 (D) 单调函数
- (3) 函数 $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$ 的最小正周期为 ()
- (A) 2π (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$
- (4) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数且 $x \geq 0$ 时 $f(x) = 2^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ ()
- (A) $2^{-x} - 1$ (B) $-(2^x - 1)$
- (C) $-(2^{-x} - 1)$ (D) $2^x - 1$
- (5) 设函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的以 $T = 3$ 为周期的周期函数, 在区间 $[0, 3)$ 上有 $f(x) = x$, 则 $f(100) =$ ()
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 100

二、填空题.

- (1) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, 则函数 $f(2x + 1)$ 的定义域为_____.
- (2) 若 $f(x) = e^{\sqrt{x}}, f[\varphi(x)] = 1 + x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____.
- (3) 若函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f[f(x)] =$ _____.
- (4) 指数螺旋线 $\rho = e^\theta$ 上点 $(1, 0)$ 在直角坐标系上的坐标为_____.
- (5) 双纽线 $\rho^2 = 2\cos 2\theta$ 和圆 $\rho = 2\sin \theta$ 的交点为_____.

三、证明下列恒等式.

$$(1) \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$$

$$(2) \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$$

四、求函数 $f(x)$, 使其对一切非零实数 x , 总有如下等式成立:

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

五、设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-3, 1]$, 求函数 $f(2x-1) + f(1-x)$ 的定义域.



六、设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f(1-x)$.

七、求函数 $f(x) = (1+x^2) \cdot \operatorname{sgn} x$ 的反函数.

八、已知函数 $f(x)$ 和 $f(ax+b)$ 是两个不同的函数,但它们有相同的定义域 $[0,1]$,求常数 a 和 b .



九、设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 曲线 $y = f(x)$ 有对称轴 $x = 1$, 试证明函数 $f(x)$ 必是周期函数.

十、用不等式组表示心形线 $\rho = a(1 - \cos \theta)$ 外且在圆 $\rho = \frac{a}{2}$ 内部分的区域, 并求这两条曲线的交点.

十一、设 $f_n(x) (n = 0, 1, 2, \dots)$ 在 $[0, 1]$ 上有定义,

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x) (n = 1, 2, \dots),$$

证明

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x).$$



十二、求函数 $f(x)$, 使其对任一实数 x , 总有如下等式成立:

$$f(2+x) + 2f(1-x) = x^2.$$

十三、已知 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 互为反函数, 求函数 $y = f\left(\frac{1+g(x)}{1-g(x)}\right)$ 的反函数.

十四、若函数 $f(x)$ 是单调增函数, 曲线 $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 有交点, 试证明此交点必在直线 $y = x$ 上.

练习二

利用导数的定义计算导数的问题

一、填空题.

- (1) 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2) |x^3 - x|$ 的不可导点为_____.
- (2) 设函数 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+2n)$, 则 $f'(-n) =$ _____.
- (3) 若 $f'(0) = 2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h) - f(3h)}{2h} =$ _____.
- (4) 若 $f'(x_0) = -1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 + 5x)} =$ _____.

二、从导数定义出发证明:

- (1) 若 $f(x) = \sqrt{x}$, 则 $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} (x_0 > 0)$;

- (2) 若 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} (x_0 \neq 0)$.



三、(1) 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 证明极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ 存在;

(2) 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否一定可导?

若是, 则证明之; 若不是, 则举一反例.

四、有一质线(具有质量的线段)位于 x 轴的 $[a, b]$ 区间上, 该质线在区间 $[a, x]$ ($a \leq x \leq b$) 上的质量为 $m(x)$, 对质量为 Δm 且长为 Δx 的质线, 可定义其平均线密度为

$$\bar{\mu} = \frac{\Delta m}{\Delta x},$$

试建立此质线在点 $x_0 \in (a, b)$ 处的线密度 $\mu(x_0)$ 的表达式.



五、设对任意实数 x 均有 $f(1+x) = af(x)$, 且 $f'(0) = b$ (a, b 为非零常数), 证明 $f(x)$ 在 $x = 1$ 点处可导, 并求 $f'(1)$.

六、若对一切实数 x, y , 有 $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$, 且 $f'(0) = 1$, 证明当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 也可导, 且 $f'(x) = e^x + f(x)$.

练习三

极限的基本计算方法、无穷小与无穷大及其有关的一些问题

一、选择题.

- (1) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限 ()
(A) 等于 2 (B) 等于 0 (C) 为 ∞ (D) 不存在, 但非 ∞
- (2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小中哪一个是比其他三个更高阶的无穷小 ()
(A) x^2 (B) $1 - \cos x$ (C) $\sqrt{1-x^2} - 1$ (D) $\tan x - \sin x$
- (3) 当 $t \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $f(t) = t \sin 2t$ 与 $g(t) = \cos 2t - 1$ 之间的关系为 ()
(A) $g(t) = o[f(t)]$ (B) $f(t) = o[g(t)]$
(C) $f(t) \sim g(t)$ (D) 同阶无穷小, 但非等价无穷小
- (4) 当 $x \rightarrow \pi$ 时, $\tan x \sin x$ 是关于基本无穷小 $x - \pi$ 的 ()
(A) 一阶无穷小 (B) 二阶无穷小 (C) 三阶无穷小 (D) 四阶无穷小
- (5) 设 $f(x) = (1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$, $g(x) = x \sin(x^n)$, $h(x) = e^{-x^2} - 1$, 其中 n 为正整数. 已知在 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小, $g(x)$ 是比 $h(x)$ 高阶的无穷小, 则必有 $n =$ ()
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$ 的充要条件是 ()
(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(3+n) = L$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(3-n) = L$
(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(3n) = L$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{n}{3}\right) = L$
- (7) “数列 $\{a_n\}$ 有界” 是 “数列 $\{a_n\}$ 收敛” 的 ()
(A) 充要条件 (B) 充分不必要条件
(C) 必要不充分条件 (D) 既非充分条件也非必要条件

二、填空题.

- (1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos kx}{x^2} = 1 (k > 0)$, 则 $k =$ _____.
- (2) 设函数 $f(x) = \frac{2x-3}{3x-2} \ln x$, 则当 $x \rightarrow$ _____ 时, $f(x)$ 是无穷小; 当 $x \rightarrow$ _____