俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

Foundation of Geometry

几何学基础

[苏]科士青 著　苏步青 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

几何学基础

Foundation of Geometry

[苏] 科士青 著

苏步青 译

HITP

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书详细介绍了几何学的历史概要，欧几里得几何及罗巴切夫斯基几何等的内容. 全书共分七章，从历史概要开始，详细介绍了绝对几何、欧几里得几何，罗巴切夫斯基几何及其三角法和绝对三角法以及其解释，面积论等内容. 有助于学生更好地理解几何，学习几何.

本书适合相关专业本科生、研究生及数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

几何学基础/(苏)科士青著：苏步青译. --哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.1

ISBN 978-7-5603-5166-7

Ⅰ.①几… Ⅱ.①科… ②苏… Ⅲ.①几何学 Ⅳ.①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第015403号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　赵新月
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张19.25　字数364千字
版　　次　2016年1月第1版　2016年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5166-7
定　　价　58.00元

目录

引言

第0章

本书是汇集著者在国立高尔基大学和高尔基师范学院多次授课的结果而编成的.

无论在教程讲授中或在筹备付印过程中,著者必须去寻求逻辑因素和历史因素的恰当配合.当然,我们可以从现代的公理法着手,从它再导出一切历史的意义.这种方法在科学上的见解虽然有其较高级品质,但在教育方法上却有缺陷,因为我们不能符合下面所说的要求:"如果我们关于某个事物不知道它是如何发展的话,那也就无法理解它".并且,这方法首先是几何的现代公理法与有关的形式逻辑演绎法相联系.没有适当的历史的叙述,这对学生们就会变成悬空的结构;尽管我们再怎样说明它的必要性、真正的意义和作用,这些东西也仍旧是不可了解的.

明白所讨论目标的历史,对于将来的教师和学生不但有益,而且是必要的.我们应该知道什么事物,在何地、何时,是怎样发展起来的,并且在哪些影响下才采用现在的形式.

第1章的任务是引导读者对几何的现代形式的逻辑构成有所领会并且知悉其必要性.这个目标是借助于中学毕业生所熟悉的那个几何系统的批判而得到的,而且这个系统是由欧几里得所创造的.最初简单说明在我们之前的几何学基础——欧几里得的"原本"的由来的历史根据(§1).其次,在"原本"分析的基础上对含于其中的基础内容给予批判(§2).

接下来观察改进"原本"的各种方法.一方面,这是针对定义的改进和补充欧几里得公理的总集(§3),而其他方面,是针

对欧几里得第5公设的试证(§4).最后还说明后人如何努力引导到罗巴切夫斯基的非欧几何学的发现(§5).

由于第1章还是起辅助作用的,所以把历史上试证欧几里得第5公设的一切主要资料(包括与这公设等价的命题)隶属于现代公理法之下最合理的,放在第3章末.

以下几章中在适合于现代公理法的要求这种精神下(包括公理的相容性、独立性和完备性的研究),在对应的公理法的基础上叙述绝对几何、欧几里得几何和非欧几何的构造.由于主张运动的概念上比符合的概念早存在(正如波恩加赉①所指出,这不是反过来的),所以放弃希尔伯特的符合公理,而导入和它逻辑等价的运动公理.这样一来,因为所取的基本概念是运动而不是符合,认识到进一步的几何构造是接近于群的观点的构造,就是把几何看作群与物的机构.众所周知,这观点发源于克莱因(爱尔兰根的计划②),而且被认为是最有成果的(嘉当著作③).

在所讨论的目标根据这学科的本性及逻辑的因素迫切地要求自身的历史材料与方法论中的说明相符.因为对象特别复杂,在书本的限定范围内做好这种教程是颇不容易的.仅仅指出一点:在充分抓住几何学基础的内容的努力下,如果本书还能较为易读,那就算达到目的了.

除了著名的经典文献外,本书中采用卡刚教授和古列维奇教授的几何学基础的叙述体裁.从这些著作中挑选了一系列定理的证明.

阔尔莫果洛夫院士和拉雪夫斯基、雅诺夫斯卡娅、斯杰巴诺夫、布查金教授对本书的改进提了许多意见和指导,著者以愉快的心情向他们表示热烈的感谢.

著者怀着深厚的谢意来追忆已故的格拉果列夫教授,他曾经花费了很宝贵的时间,慎重校阅本书初稿并提供一连串重要的意见.

最后必须提起出版者伯朗斯杰因的姓名.

---

① 波恩加赉,关于希尔伯特著作的评论,列入俄译的希尔伯特著书《几何学基础》.彼得格勒,1932年版,112页.

② 克莱因,最新几何研究的比较评论(嘉桑大学物理数学会学报,2卷,1896).

③ 1937年在获得罗巴切夫斯基奖金的第八国际会讲上宣读,由嘉桑大学嘉桑物理数学会刊载.

历史概要

第1章

§1 欧几里得以前的几何

在著名的欧几里得"原本"中，作出了在我们之前最初的构成几何学的尝试，两千多年中它一直为用严格的逻辑来叙述科学的典范. 它是其前的多个世纪的脑力劳动的创造性总结. 为说明在怎样的基础上产生了这古代希腊文化的优秀产物，首先简单地观察欧几里得以前的古代数学家所做的工作.

历史遗留下来给我们的往往仅是它的残缺的片断，想要由此重建它的真正姿态，那是非常困难，甚至有时完全不可能. 几何的起源想必在巴比伦和埃及. 通过蒲罗克鲁(希腊的欧几里得评论家，后文将更详细地谈到他)，我们获得古代著作的一个片断. 这片断是以下面的文章做开头的："因为此地我们有观察科学和艺术根源的必要，所以指出，依据很多的实证，几何是埃及人创造的且发生于土地测量. 由于尼罗河泛滥，经常冲毁界线，这使测量变成必要的工作. 无可置疑的，这类科学和其他科学一样，都发源于人类的需要. 发源起来的任何知识总是从不完全走向完全. 它起源于感性的感觉，逐渐变为我们研究的对象而且最后成为理性的财富"①.

我们对于埃及数学的认识主要是以两本纸草纸书为基础的：

① 这些句子是亚里士多德派哲学家欧金·罗道斯科所写的(参照卡刚《几何学基础》第二卷).

其一是阿赫密斯(勒乌斯王的秘书[①])纸草纸书,属于公元前2000~前1700年时期且包含着关于面积及体积测量的算术和几何课题.其二是莫斯科的纸草纸书[②].

从这些纸草纸书内容的研究曾经导出下述的埃及几何的情况,埃及人已能决定矩形、三角形和梯形的面积,并且他们的决定方法和现在是相同的.他们所采用的圆的面积等于一边是直径的$\frac{8}{9}$的正方形面积,这相当于近似值$\pi=3.1605$.埃及人曾经知道直角三角形的各角是决定于两直角边的比的,就是实质上掌握了相似图形的概念.他们取了单位长度的一边的正方形面积作为面积的单位.埃及数学家的最光辉的成就之一是关于以两正方形为底的缺顶棱体体积的正确公式

$$v=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

但a,b是两底的边长,h是其高(莫斯科的纸草纸书中的公式).

埃及人是否知道以毕达哥拉斯为名称的定理,他们是否利用边长3,4,5的绳三角形来做直角(大概是由康托尔所流传,并且广泛传播在许多中学几何书本中的传说),那是不能断定的.

最近研究的结果指出,巴比伦人在几何范围内的成就与已形成的观点相反,绝不亚于埃及人;此外巴比伦人还用了包含有代数的萌芽的方法解决许多问题.

这些研究也表明了,旧的观点即把希腊前的数学看作依靠实验方法所导出的方案的集成,因而含有大量的错误,那是不正确的[③]

几何知识的更进一步的发展和希腊相联系.在希腊较短时期内(公元前第7到公元前第3世纪),几何在法列斯、毕达哥拉斯、杰谟克里特、柏拉图、欧多克斯等哲学派之中,开始成为理论的科学,以高度抽象性为其特点.

几何发展的希腊时期的开始是与希腊科学和哲学的元祖——密列脱城的

---

① 阿赫密斯纸草纸书有下列的称呼“如何达到藏在对象中的一切黑暗的东西、一切秘密的东西的指南”.

② 莫斯科的纸草纸书的名称并不知道,因为其中缺少了卷首.

③ 实际上难以承认像缺棱体体积公式一类的复杂公式.在几何范围内,似乎繁重的理论工作也会求得的看法,加之,留到现在的一共只有两本上述的有关数学的原文,而又是狭窄应用性质的;我们不可能从它们获得关于当时数学的共同特点的正确判断.“依它们来重建一切的埃及数学的面目,其错误正好像我们要从两本不好的商业算术教本来重建现代数学的面目一样”.——魏果茨基.

哲学家法列斯(前 635—前 548)的名字分不开的. 在几何范围内一些发现如半圆的弓形角是直角,对顶角相等,等腰三角形的两底角相等,都是归功于他的(例如蒲罗克鲁就是这样看的). 法列斯还知道三角形是决定于一边和其上两角的;以这为根据,他已经能够对不可接近的物体用它的影子和对它的距离来决定它的高度.

可是,借蒲罗克鲁的话来说,只有毕达哥拉斯学派即生活在公元前 570 ~ 前 471 年的毕达哥拉斯的继承者"才赋予几何以现代科学的品质."这是由于毕达哥拉斯以更客观的观点观察了几何,并且用更理性的而非物质的方式研究了他的定理;此外他还发现了无理数和宇宙图形①的构造.

下面的一些发现是归于毕达哥拉斯派的:(1)关于三角形内角和的定理;(2)把平面分成正多角形(正三角形、正方形及正六角形)的分割法;(3)二次方程的几何解法(面积的应用);(4)与一已知多角形等积且与另一已知多角形相似的多角形作法;(5)不可通约的线段的存在;(6)宇宙体(正多面体)的五个类型的存在;(7)毕达哥拉斯的定理;(8)圆和球的极值性.

在最后的这个发现中可以找出关于等周问题研究的萌芽.

不可通约数量的发现属于毕达哥拉斯的学生希派斯,这在毕达哥拉斯学派中好像唤起了危机. 在这发现之前,他们或许是以这样一个假说做根据的,即任何两个线段之比可以表示做两个整数之比. 为弥补线段比较论,毕达哥拉斯的学生们很可能做过一个假设:不可通约的线段具有无限小的共同尺度,即和点互等的最简单元素. 毕达哥拉斯的学生们也利用这些纯数学理想点作为实体世界的元素. 关联于不可通约数量的各种困难后来为欧多克斯的聪敏的比例论所克服(参照下文).

杰谟克里特(约前 470—前 370)是多方面的能人. 亚里士多德关于杰谟克里特曾经说过,他"思考过一切而且分析过一切"(他著述着哲学、数学、物理学、工程学、气象学、动物学、美学及其他). 杰谟克里特把原子与真空的集合当作世界的根本基础,而这些原子在真空里经常运动着. 杰谟克里特的原子或"不可分的物"就是物质元素,也不能再分,但同时有一定的极小的广度. 因此,如果毕达哥拉斯的学生们的不可分物是没有长度非物质的点,那么杰谟克里特的不可分物是有宽度的物质的元素. 如数学史所明示的,杰谟克里特的观点在几何里起了很重要的作用. 以不可分物的方法,杰谟克里特发现了关于棱体和锥体的体积定理. 借助于不可分物阿基米德发现了关于面积及体积的一连串定

---

① 这是古代对正多面体的称呼.

理. 笛卡儿、伽利略、嘉瓦勒里、帕斯嘉尔等或多或少都采用了杰谟克里特的不可分物. 因此,为无限小量的计算的发现奠定了基础[①].

在柏拉图(前429—前348)学派中,数学曾经受到特殊的尊敬. 对哲学研究他认为预先熟习几何是必要的. 传奇式的故事说:在柏拉图所设的学院入口他写了一句:"别让不懂几何的人入内". 可能部分地说明着这一点,但这是千真万确的,他对数学表示了特别的兴趣,且以坚决的态度劝告学习数学. 大概正是受了柏拉图的影响,在公元前4世纪后的古代时期中以及后来罗马时代一定程度地精通欧几里得"原本"成为完成的古典教育中的必要因素.

大家都相信,关于地球、月球和太阳的球形学说是属于柏拉图的;其根据好像是在于:球面是最完全的几何图形.

可是柏拉图在几何园地上的基础业绩不仅在于他发明了那些具体的定理(他的继承者把一切都归于柏拉图,这自然是可疑的),而更多地在于他传给自己学生的许多有效的推动力. 如著名的数学史家希别尔克所说:"首先可以肯定地说,为使初等数学的系统建设具有精密性和逻辑完美性,他(柏拉图)的逻辑数学给予了很大的帮助,而这两种性质始终是数学的特色. 此外,从一些定义和几个前提毫无缺陷地开展任何系统,这无疑是要归功于柏拉图的".

但是,作为在哲学中战斗着的大思想家的柏拉图,却对杰谟克里特的唯物论掀起猛烈的斗争(众所周知,列宁在杰谟克里特路线与柏拉图路线的斗争中认识到古代哲学源流的主要斗争). 特别地,柏拉图起来反抗杰谟克里特的不可分物并且禁止它在数学上的应用,因而阻挡了它的发展. 其特点是(如阿基米德在他的著作《逸福德》中关于这点所断定的):古代数学家内部也就是说,非正式地并非为了发表而开始找寻在杰谟克里特的原子道路上某些问题的解答而且其后只好用归谬法,即引到与其他假设相违背的情况探求证明法.

欧多克斯(前410—前356)是空前的创造者、权威的医生、天文学家、数学家和机械学家. 在数学领域里比例论的创作与他的名字相联系,后来欧几里得在其理论的基础上以当时最大可能的严密方式叙述了几何. 所以欧多克斯的名字可以说是当时数学的奠基者.

与欧多克斯的名字相联系的第二个基本发现是取尽法(17世纪才有它的命名). 这方法和他的比例论有密切的关联且是以下面的假设做基础的:"如果从某数量拿掉一半或更多部分且对剩下的部分施行同一手续,并同样地一直进

---

① 关于这里所提到不可分物的知识希望熟悉其内容的读者可参照罗勒著的《古代原子论者的无限小论》,苏联科学院1935年版.

行下去的话,那么可以获得这样数量使它比任意给予的一数量还要小些". 欧多克斯用反复的讨论而获得棱体、锥体和球的体积量法.

欧多克斯的学生麦尼汉为钻研二倍立方体问题达到圆锥曲线的发明,这方面的理论后来为阿破劳尼所详细地发展而刊载于他的八本著作(现在只剩下七本)中叙述它.

古代著名的哲学家,形式逻辑的创立人亚里士多德(前384—前322)除了从事于自然科学外,还分身致力于数学. 历史证明了亚里士多德推动了数学发展,和他同时代的数学家没有一个不置身于他的学派之中的. 但他本身在几何领域内却并没有什么具体工作.

由此可见,希腊数学的发展是与哲学的发展在密切协力中进行的."这样一来,数学与哲学以本身的和平关系,也以本身的纷争相互受着影响. 由此,数学变成了希腊文化发展的一个因素,而在这时候代数学的科学所披着的形式最有凭据地指出了,这些因素是在力求以完全精确的方式表达的精细的思想家中间发展起来的"①.

因此,近公元前3世纪希腊哲学派中的几何已经达到了高度抽象性. 此外,几何一般是与实用问题分开的. 罗马历史家勃鲁达尔克斯写着:"……力学作为研究和赞扬的目标,是欧多克斯和亚希脱的发明. 他们曾经希望以某种方法来阐明几何(给几何以外部的装饰)且把依论理和科学证明难以解决的一些定理放在感觉和物质对象的基础上……可是不久柏拉图很不满意地责备他们,说他们破坏了几何,剥夺它的优点,把它变成奔走的奴隶,把它与非物质的和理智的东西隔离开来而转向可感觉的对象,并且除了理性外求助于奴隶式地由手的劳动所创造出的物体".

如此继续到阿基米德(前287—前212),在增长着的生活需要的影响下,在他的手中,数学已得到了应用的方向.

这样一来,从公元前7世纪到3世纪希腊几何集中了丰富的实际材料. 它的系统化的必要性即把它整理在逻辑系统中的必要性也已成熟了.

蒲罗克鲁指出,希波克拉特·熊斯基、列昂、费奇·乌格涅奇斯基、齐尔谟丁·果罗芳斯基及其他数学家都着手解决过这个问题,可是当不朽的著作——欧几里得的"原本"或"元素"出现的时候,他们的作品一概被人们所遗忘了. 如借同一时期的蒲罗克鲁的话来说,"原本"中"搜集了元素,把欧多克斯的许多发现整理成恰当的顺序,补充所创始的东西并且把以前尚未满意地证明过的一

① 杰庆,古代及中古数学史.

切事实严密证明了.”

没有一本科学书籍像欧几里得“原本”一样取得这样巩固而长期的成功.从1482年以来它以各国语言出了500版以上.

§2 欧几里得“原本”

关于欧几里得(约前330—前275)的生平几乎是不明的.在“原本”和他的其余保存下来的著作里面从来没有提到著者.仅仅知道他是柏拉图派的学生并且在托勒密一世年代的亚历山大教过数学.

庞大的科学资料的系统化不是机械的工作——它需要领导的科学原理,这些原理还有必要以更广泛的思维领域——认识论来做根据.可以断定,“原本”的叙述在哲学的见解下是依照亚里士多德的建设科学的原理.亚里士多德在他的第一和第二“分析学”(第一包括推理理论——三段论法,而第二包括科学的证明论)曾经发展这原理.如果考虑到几何是和哲学密切合作而发展起来的,并且欧几里得本身是属于柏拉图学派的,那么上面的事实就不足为奇了.首先“原本”本身的构造就肯定着这事实.

依据亚里士多德(亦可依据柏拉图)的学说,科学是立足于为说明现象的必要联系的原因的认识.任何科学的命题都可从必要的前提(假设)里面经过推理的锁链且用亚里士多德所制订的方法推论出来的①.

追随柏拉图和亚里士多德之后,欧几里得可能已有必要抽出主要的几何概念——类别(亚里士多德把它一般分成10种,即物、量、质、关系、地点、时间、位置、状态、行动、苦难),形式化为公理,于是在这基础上严密逻辑地推论出几何的一切内容.但是,如我们今天所看到的,他未曾圆满地实现这理想,并且事实并不是由于这理想太繁杂,而是由于当时初等几何的建筑离完全状态尚远.可以肯定地说,连续概念、运动及其他基本的重要问题当时刚在起来.

欧几里得“原本”的基础构造的定义、假设和公理的系统.第一卷是以35个定义②、5假设和5个公理开始的.现引证于次.

---

① 参照Г·Φ·亚 山特洛夫,Б·Э·伯霍夫斯基,Н·Б·密青,П·Φ·尤金等编辑的《哲学史》第一卷,ОГИЭ,1941,204-230页.

② “欧几里得预先为了下这许多定义,绝不是像词汇一样的.原来欧几里得进行的工作,好像钟表工人或其他技工给学徒介绍自己技术的工具一样地进行的”.——兰伯特.

定　义

1. 点是没有部分的[①].

2. 线是有长度而没有宽度的.

3. 线的各端是点.

4. 直线是关于它的任何点一样地放置着的.

5. 面是只有长度和宽度的.

6. 面的端缘或边缘是线.

7. 平面是关于它的任何直线一样地摊放着的.

8. 平的角度是一平面上相交而不在同一直线上的二直线的相互倾斜.

9. 当形成一角度的两线是一直线的时候,那角度称为平角.

接下去的25个定义(10~34)是关于直角和垂线,钝角和锐角,圆,圆周和中心;直线形,三角形,四角形,等边、等腰和不等边三角形,正方形,直角三角形,菱形及其他.

最后,结尾的定义是以后具有重大意义的,它是:

35. 平行直线是在同一平面上而且尽管向两侧延长也决不相交的直线.

假　设

要求下面的一些事项:

1. 从每一点到另一点可引直线.

2. 有限的直线可以无限延长.

3. 从任何中心可用任何半径画圆周.

4. 所有的直角是相等的.

5. 若两直线和第三直线相交且在同一侧所构成的两个同侧内角[②]的和小于两直角的和,则把这两直线向这一侧适当地延长之后一定相交.

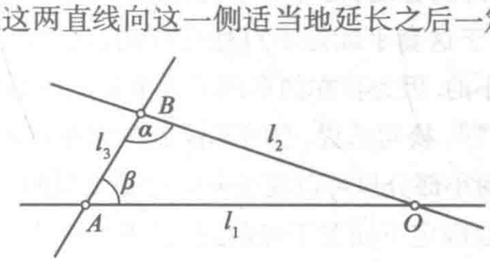

图1

① 如用其他译语,便是:点是一个部分也不会有的.

② 参阅图1.

公 理

1. 各与同一第三个相等的两个也一定相等.

2. 若相等的加上相等的,那么整个也相等.

3. 若从相等的减去相等的,那么所获的差也相等.

4. 相互重合的一定相等.

5. 整个大于部分.

让我们分析一下欧几里得的这些定义,便可指出:他采用了部分、长度和宽度等概念作为基本(原始)的概念. 他利用了这些来定义点、线和面,于是下了直线和平面的定义,作为对应于线和面的特例的概念. 这样对基本概念的选择并不是偶然的.

事情是这样的:长度和宽度的概念历史地说来是在点、线和面的概念之先. 我们曾经说过,几何原是发生于地段测量的需要,而且最初它和测地学是一致的. 用绳子、锁链或自己的步伐来量长短曾是主要的手段. 从这些测量通过抽象化引导到长度的概念. 为制定地段的"点的"界限,除了其他要求外,更需要有界限的狭窄,从而引导到没有宽度的线的概念. 用水准器(绷直的线)来做地段的分割,在太阳光下的观察,工业技术及其他实用上的要求产生了直线和平面的概念.

可是,数学家罗巴切夫斯基说过:"像几何中那样定义起来的面、线、点仅存在于我们的想象中……""自然里没有任何直线,没有任何曲线,没有任何平面;在那里所见到的只是一样物体,就是说由我们的理想所建立起来的所有的点只有在理论中存在."例如,拿点来说吧. 依据欧几里得的定义它是没有部分的. 可是任何实在的物是物质,一定有部分. 经过抽象的手续,把一个物体的大小缩小到所谓无限粉碎的程度,便导出点的概念. 此外,"点"是作为"极限"而产生的. 但是,问题在于这套手续是不可能完成的,这是因为,"在小物里不存在最小的,而常有更小的. 因为存在的东西不能由分割而不再存在,哪怕这分割继续到最后怎样长久"①. 换句话说,空间不仅是在它没有到头的意义下是无限的,而且在它本身任何小部分里可以说是向内也是无限的.

实用上,我们可以限定下面关于点的定义:当一物体在观察的范围内已不能再予分割时,称为点. 充分细的光线可以取做"直线",正如在天文学里决定天体间的距离时所用的一样. 由于天体的大小比较它们的距离是很小的,实用

① 希腊哲学家阿那克萨果尔.

上不妨把天体看作“点”.

虽然欧几里得的各个定义是反映了自然的抽象化方法,而由此产生了主要的几何概念的;但这些定义里并没有适合于严格逻辑推论的精确内容,所以在建立几何学时,他事实上完全不利用这些内容.他怎样能利用自己的直线和平面的模糊定义呢!实际上,“直线关于它的所有点一样地放置着”(定义4)有什么意义呢?这句话可以随便怎样解释,例如可以解释为直线在它的所有点有同一方向,可是这样一来,必须到达于方向概念设置的基础上.“放置的一样性”也可理解为这样的事实:如果以轴的方式实际化直线的话,那么在空间的一定运动之下它会和本身一致.在这场合里,要取运动来做基本概念.关于平面(定义7)也是同样的.角的定义(定义8)是同语反复,且其他依此类推.

现在转入欧几里得系统构造中所必需的基础——基本假设.欧几里得把这些命题分为两种形式:假设和公理.

关于公理与假设间有什么区别的问题,有各种不同的观点.其中最有真实性的似乎是下面的一个:公理,这是一般关于量的规定,而假设是关于所定义的几何构造可能性的规定.在这种情况下公理4的几何本质并不十分恰当.必须注意,在现代数学里面没有公理与假设的差别,凡是基本的规定都称为公理.

从逻辑的观点来看“原本”,它的根本缺点在于公理的不完全性.就是在建立起几何的组织的时候,欧几里得不得不以或明或暗的方式应用一些从他所作的假定——假设和公理——无法逻辑地导出的图形性质.这个缺陷的确定与说明占了主要的地位,所以此刻比较详细地讨论它且考察一些例题.

第一例题.欧几里得利用到连续性的思想,虽然他在他的系统里并没有把他在这场合所依靠的公理予以列入.为明确这点,让我们引用“原本”第一卷第1命题.

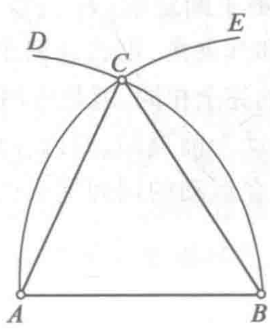

图2

“第 1 命题. 在一定直线[①]上作一等边三角形.

设 AB 是已知的一定直线. 要作立在定直线 AB 上的等边三角形[②].

以 A 为中心,AB 为距离画一圆,且以 B 为中心,BA 为距离又画一圆. 联结这些圆的交点 C 与两点 A 和 B. 由于点 A 是圆 BCD 的中心,$AC = AB$,且由于点 B 是圆 ACE 的中心,$BC = BA$;所以 $CA = BC = AB$. 因此,$\triangle ABC$ 是等边三角形,并且它是立在定直线 AB 上的,这就是所求的”.[③]

在这命题里欧几里得是以直观为根据的,并且假设当两圆的一个通过其他一个的中心时,必有共同的交点. 可是,究竟从何处导出这命题呢?

初学者可能会被这问题的提出所震惊. 他或许会说:“这两圆相交还不够明白吗?”可是问题不在明白性上——几何里所证的定理中有许多东西比我们证明里所引用的还要明白些,但是我们仍要给它证明.

这里我们的目的是一些不同命题间的逻辑相关性的树立. 欧几里得曾以基本的假定——假设和公理——做他的著述的前提;他自己的目标是仅仅从这些假定严格逻辑地导出一切的几何内容而不管进一步的命题自身是否十分明显.

可是这课题当时还不能解决彻底.

实际上,我们回到所选择的例题,必须认识到关于两圆相交的欧几里得假定是不能从他的假设和公理逻辑地导出的. 事实上,倘使接受圆是破裂的曲线而特别提到的点 C 不存在于两圆上的话,那么欧几里得所导入的命题将变成无效的. 因此,点 C 的存在的假定必须以圆的连续性为其前提. 但是列举欧几里得的假设和公理,没有一处讲到连续性. 这就是说,正好在欧几里得的第一命题里有逻辑顺序上的缺点:在证明的过程中很隐秘地导入了新的假设[④].

第二例题. 欧几里得没有表述运动的性质到公理中去,而利用了运动的思想.

在“原本”第一卷第 4 命题里断定说:若一个三角形的两边和其夹角相应的等于另一个三角形的两边和其夹角,那么这两个三角形相等. 欧几里得证明这命题和今天在学校里所做的完全相同,就是应用把一个三角形重合到另一个的方法. 因为重合上去是以运动为前提的,所以在此欧几里得求援于运动的性质. 事实上,让我们想象一下,在运动的期间笔直的线段会变成弯曲的,而长度

---

① 就是在一定线段上.

② 参照图 2.

③ 依据彼得鲁雪夫斯基的译语,以后对“原本”的一切参考都以这翻译本为标准.

④ 这个缺陷最初是被莱布尼茨所指出.