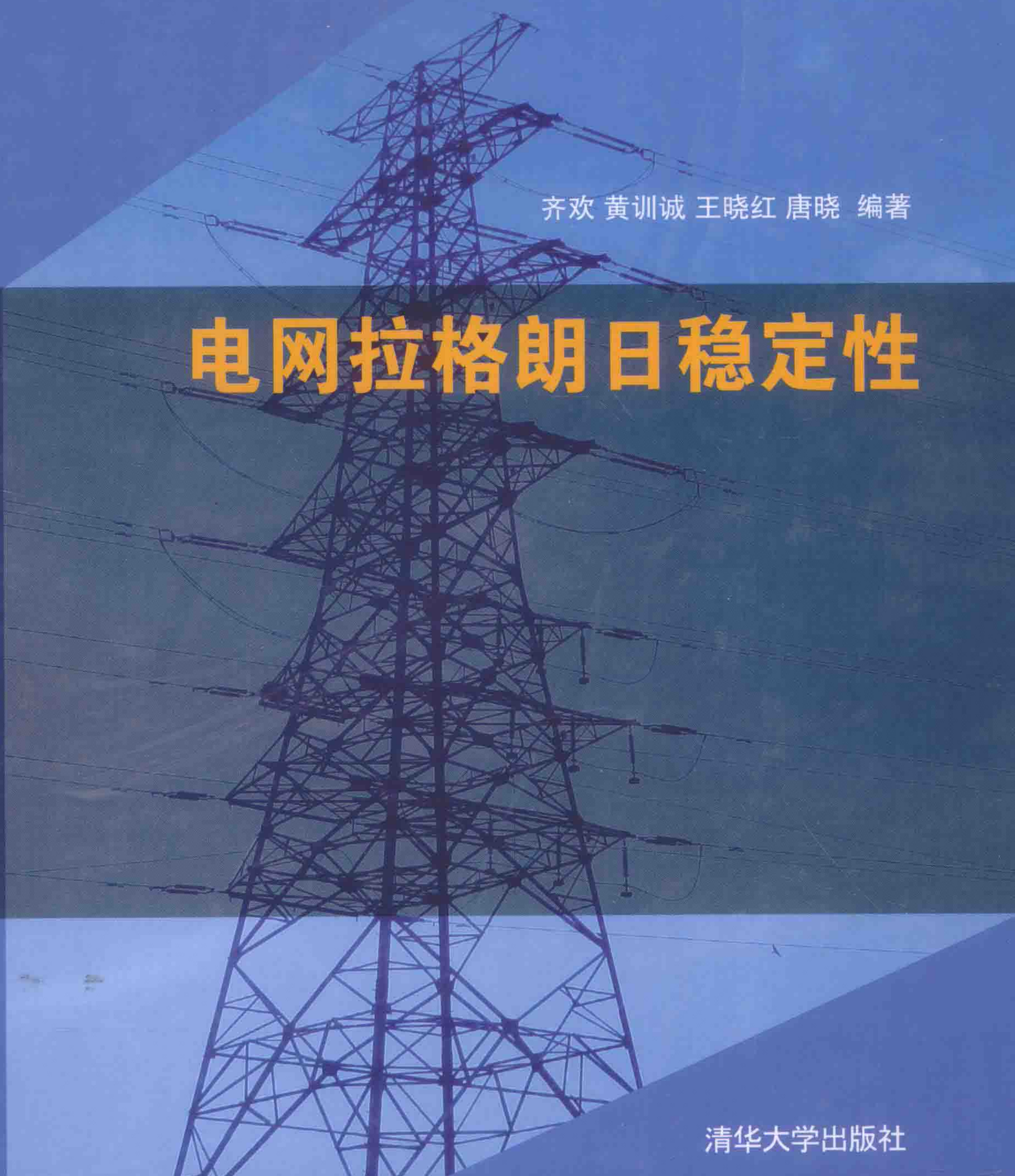
电网拉格朗日稳定性

齐欢 黄训诚 王晓红 唐晓 编著



清华大学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

电网拉格朗日稳定性

齐欢 黄训诚 王晓红 唐晓 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书研究了电网拉格朗日稳定性判定的两个问题：第一，利用电网基于外部观测的模型，采用LMI（线性矩阵不等式）技术，判断电网的拉格朗日稳定性；第二，用拟周期系统近似电力系统，借助希尔伯特-黄变换（HHT）判断电网的拉格朗日稳定性。

本书为这两种判定方法提供了理论分析与工程应用案例。其中，第1～5章以神经网络为代表，研究了一类非线性系统的拉格朗日稳定性及其稳定域估计；第6～8章为电力系统监测数据分析中的同步相量测量单元（PMU）优化布置、系统参数的快速辨识和希尔伯特-黄变换，这些技术是电力系统稳定性分析中必不可少的技术基础；第9～10章利用上述理论结果和工程技术研究了电力系统的拉格朗日稳定性判定。

本书对于从事电网调度控制的工程技术人员、高校电气工程专业、自动化专业、信号处理等专业的师生也具有参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

电网拉格朗日稳定性/齐欢等编著. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-39391-7

Ⅰ. ①电…　Ⅱ. ①齐…　Ⅲ. ①电力系统稳定－研究　Ⅳ. ①TM712

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第031468号

责任编辑：庄红权　赵从棉
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市中晟雅豪印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：12.25　　**字　　数**：296千字
版　　次：2015年10月第1版　　**印　　次**：2015年10月第1次印刷
印　　数：1～1500
定　　价：79.00元

产品编号：061930-01

前言

FOREWORD

近年来受到广泛关注的广域测量系统(wide-area measurement system,WAMS)在一定程度上缓解了对大规模互联电力系统进行动态分析与控制的困难。WAMS可以在同一参考时间框架下捕捉到大规模互联电力系统各地点的实时稳态/动态信息,这些信息在电力系统稳态及动态分析与控制的许多领域,给大规模互联电力系统的运行和控制提供了新的视角。

WAMS可看作传统的监控与数据采集系统(supervisory control and data acquisition,SCADA)的进一步延伸,其外部基本单元为基于全球定位系统(global positioning system,GPS)的同步相量测量单元(phasor measurement unit,PMU)和连接各PMU的实时通信网络,其核心是一个中心数据站及基于其上的分析与应用。在这种形势下,直接利用电网外部观测所获取的PMU数据,研究电网运行的稳定性,具有重要的理论意义和工程价值。

多年来,一些学者探讨基于外部观测的方法,这些方法与系统模型无关,计算时间很短。Athay T(1966),Found A A,Kruempel K C和Vittal V等(1986),Vaahedi E,Mansour Y,Tse E K(1988)先后研究了利用观测数据分析电力系统的暂态稳定性。孙建华(1993)提出了一种电力系统暂态稳定性快速实时预测方法,只需采集少量转子速度数据,不需预先知道电力系统网络结构和参数,预测电力系统暂态稳定性。孙福军、任强和李国庆(1995)提出基于外部观测的电力系统暂态稳定性实时预测和控制方法,只需采集少量电磁功率,不需预先知道系统的网络结构和参数,便能准确反映系统的真实运行情况。周鲲鹏和陈允平(2003)提出了电力系统运行状态与控制目标之间的距离指标的概念,在故障后系统轨迹灵敏度理论的基础上进一步拓展,分析了上述距离指标对可控的系统的运行参数的灵敏度,形成灵敏度矢量,按此灵敏度矢量可以实现电力系统的动态安全控制。对所提出的运用轨迹灵敏度的电力系统动态安全控制问题给出了算法,并在IEEE 4机11节点试验系统上进行了计算。计算结果表明了该动态安全控制方案的有效性。谢欢、张保会、于广亮、李颖晖和李鹏(2006)研究了一种快速的在线暂态不稳定识别方法,方法基于相轨迹凹凸性,仅使用了观测数据,而不受运行时刻网络的结构、系统参数和模型影响。殷明慧、邹云和薛禹胜(2009)通过对CCEBC的进一步抽象,在不借助于具体模型方程或参数的前提下,提出了一类直接基于轨线的拉格朗日(Lagrange)稳定性概念及其理论分析方法。

在动态系统的理论和应用中,拉格朗日稳定性很早就被学者们所关注。Lasalle(1960)和Yoshizawa(1966)应用李雅普诺夫(Lyapunov)函数来研究拉格朗日稳定性。从动态系统的观点出发,李雅普诺夫意义下全局稳定模型是单稳态系统,即系统存在唯一渐近吸引所有轨迹的平衡点。但在实际的生物学应用中,有时系统不再是全局稳定,因而,需要更加合适的稳定性概念来研究多稳态系统。同样地,在实际系统中,如生物网络以及电力系统等非线

性系统中往往存在多个平衡点，这时探讨拉格朗日稳定性会更符合实际需要。因为拉格朗日稳定隶属非线性系统稳定性概念的一种，用来反映系统解的有界性。拉格朗日稳定理论是李雅普诺夫稳定理论的一个补充和外延，它更侧重于考察系统的总体特性，属于整体概念。所以说，对非线性系统拉格朗日稳定性的探讨和研究具有非常重要的理论价值和实际意义。

电网与电器的运行不同，由于网络非线性的影响和越来越多的自动保护装置的投入使用，电网越来越接近于生态系统的运行模式。从外部观测来看，电网不存在渐近稳定的状态，而是时刻处于振荡之中。因此，研究电网运行的一致有界性，即拉格朗日稳定性更加具有理论意义与实际应用价值。

本书的特点是：其一，基于电力系统的外部观测，直接利用 PMU 的检测数据，采取非线性分析方法，研究电网的拉格朗日稳定性判定问题；其二，为判别方法提供了理论分析与工程应用方法，可用于实际操作。

本书第 1～6 章由王晓红和齐欢编写，以神经网络为代表，研究了一类非线性系统的拉格朗日稳定性及其稳定域估计，并用来研究电网的拉格朗日稳定性；第 7～8 章由黄训诚和唐晓编写，介绍了希尔伯特-黄变换的主要理论与技术；第 9～10 章由齐欢和唐晓编写，介绍了拟周期函数的理论结果和工程技术，研究了电力系统的拉格朗日稳定性判别。路丽芳、潘秀才和朱祥和参加了本书部分章节的工作。在编写过程中，黄训诚主持电网运行的背景和实际状况的分析，唐晓提供所有的计算与绘图，齐欢负责统稿。

本书得到国家科学技术学术著作出版基金、河南省电力公司和清华大学出版社的大力支持，在此深表谢意！

编　者

2015 年 8 月

目录

CONTENTS

第1章

非线性系统稳定性

线性系统理论相对比较成熟，然而，现实生活中的系统一般是非线性的，这就形成了新的挑战。

1.1 非线性动力系统

近代非线性动力学研究的重要内容是混沌(chaos)。麦克斯韦(Maxwell J C)早在1873年就对传统力学的缺点有了清醒的认识，从科学方法论层次上认识到动力学不稳定性的深刻含义。法国著名数学家阿达马(Hadamard J S)于1898年考虑到负曲率曲面上的测地流存在“对初始条件的敏感依赖性”。1906年法国科学史家、科学哲学家迪昂(Duhem P)给出“一个数学推演永远失效的实例”，提出在初始条件中出现的微小不确定性将导致很大的不确定性，使得对于足够长时间的轨道预测来说，预测失去了根本意义。庞加莱(Jules Henri Poincaré)对混沌研究的贡献非常大。从非线性动力学角度看，庞加莱的贡献至少包括4个方面：①定性动力学，从整体上分析流的通有行为，相图的分类；②遍历理论，概率思想，回复性定理；③周期轨道的存在性，近周期轨道处流的结构的详细分析；④分岔理论。1887年布伦斯(Bruns H)证明，三体问题的9个二阶微分方程只有10个代数积分，即3个动量积分、3个角动量积分、3个关于质心运动的积分和1个能量积分。庞加莱1890年将上述定理推广到有摄动参数的情形。1892年，他把这一定理作了一般表述：在通常的保守问题中，经典力学正则方程除了满足能量积分外，不满足其他任何解析、一致的积分，它从一般原理的层次明确指出，可积系统是很少的；并且，当许多行为很规则的系统受到扰动后，也可能出现不连续性，即参数或初始条件只要有微小的变化，就可能引起复杂的、定性上的变化。

1921年美国哈佛大学数学家莫尔斯(Morse H M)发表论文，证明存在“不连续型的回复性测地流”。这种“不连续”流就是当今的混沌曲线。伯克霍夫(Birkhofr G D)1913年证明了“庞加莱几何定理”，把庞加莱截面法用于探索哈密顿系统的一般行为。他发现微分方程解的性质取决于正则级数的收敛性。如果收敛，解位于N维不变环面上。但是情况却是，级数的收敛、发散与否取决于振幅的大小。当考虑非线性作用时，椭圆不动点周围的不变环面有些受到破坏，有些继续存在但有点变形。伯克霍夫花费较大精力分析不变环面的

“生存”问题，特别是对于两自由度的哈密顿系统。1932 年他证明，对应于不变环面的消失，存在不稳定区域。这样的一个不稳定区可以被一条扭曲映射下的不变曲线所包拢，但区域内并无环绕原点的不变曲线。事实上他已证明，任意接近外边界的点在映射作用下可以任意接近内边界，反之亦然。在研究不稳定区结构时他找到了我们今天称之为“奇异吸引子”的实例，当时他叫它“奇特曲线”，并且已经意识到这种混沌行为是动力系统的通有行为。1922 年伯克霍夫发表了论文《面变换及其动力学应用》，触及可积性、稳定性、各种运动的分类以及相互关系等艰难问题。其中提到不连续型回复运动，正好对应于今日广泛研究的“混沌”。

对范德坡方程的研究也是非线性动力系统的重要内容。20 世纪 20 年代，德国物理学家范德坡(vonderPol B)就已开始研究非线性电路的弛豫振荡问题，得出以他的名字命名的范德坡方程及受迫范德坡方程。1927 年范德坡与范德马克(vonderMark J)发现了著名的“分频”现象，在物理界发现了倍周期分岔，并首次绘出“魔鬼阶梯”图像。英国数学家卡特莱特(Cartwright M L)和李特尔伍德(Littlewood J E)1945 年发表了关于二阶非线性微分方程的论文，指出从一般拓扑理论来看，极限集合除了不动点、周期轨线以外，确实还有其他可能性，即存在非常“坏”的曲线，当参数处于某个区间时，存在由无穷多个周期构成的集合。此外还有一种集合，它由非周期的极限轨线构成，具有连续统的势，这就是伯克霍夫所说的“不连续型回复运动”。

对于混沌，莱温松(Levinson N)1949 年发表了论文《具有奇异解的二阶微分方程》。方程存在解的一个混沌族 F，F 具有连续统的势，F 之中还有一些是不稳定的周期轨道。这些周期轨道因为镶嵌在混沌族 F 中，小的摄动就可以使轨道丧失周期性，因而它们是不稳定的。数学家斯美尔(Smale S)1959 年抽象出“马蹄”概念，这是出现混沌的重要判据。

保守经典力学中真正可解的可积问题并不多，但许多情况可用摄动理论圆满地处理。庞加莱称研究条件周期运动的摄动是“动力学的基本问题”。用一角度变量表示的哈密顿函数经过某种变换，若能化成只依赖于作用变量，与角度变量无关，则系统是可积的。如果找不到一种变换，使得哈密顿方程只包含作用变量，则系统是不可积的。事实上，对于多数保守系统，无法找到这样的正则变换，因而是不可积的。直观上容易理解这一点，因为一旦找到这样的正则变换，就意味着系统的行为可以化简，归约为 N 维环面上的条件周期运动。条件周期运动包括周期运动和准周期运动。

著名的 KAM 定理就是关于近可积系统的一个重要的、一般性的结论。此定理是自牛顿以来物理学、数学领域最大的突破之一，有十分重要的意义。KAM 是以证明此定理的三个人——柯尔莫哥洛夫(Kolmogrov A H)、阿诺德(Arnold B H)和莫泽(Moser J)的姓的首字母命令的。1954 年在阿姆斯特丹举行的国际数学会议上，柯尔莫哥洛夫宣读了论文《在具有小改变量的哈密顿函数中条件周期运动的保持性》，正是在这篇简短的论文里，柯尔莫哥洛夫提出了最早形式的 KAM 定理，后来阿诺德(1961，1963)和莫泽(1962，1966)严格证明了它。

KAM 定理的非形式化叙述为：如果一个未摄动的系统是非退化的，则对于充分小的保守哈密顿摄动，多数非共振不变环面不消失，只是有轻微变形，以至于在摄动了的系统相空间中仍然有不变环面，它们被相曲线稠密地充满着，相曲线条件周期地环绕着环面。环面的独立频率的个数等于自由度的数目。当摄动很小时，这些环面的测度很大，而它们的并集的

补集的测度很小。

1964 年法国天文学家埃农(Honon M)和他的学生海尔斯(Heils C)通过计算机数值计算,得出了重要发现。他们的出发点是,出于天文学的考虑,对于某个哈密顿系统,寻找可能存在的第三个孤立、光滑、整体运动积分。已经知道第一个积分是哈密顿量本身,相当于能量;第二个积分是角动量。一个系统存在的整体积分越多,运动受到的约束越多,规则性也就越强。因此能否找到新的运动积分不变量,是天文学中一直有人在研究的问题。庞加莱早已从定性上研究清楚,对于多数不可积系统,除了能量积分外不存在其他的不变积分。那么,由可积到不可积,系统的行为是不是截然过渡的呢?回答是二者有本质的不同,但二者又有密切联系。传统摄动理论正是靠着这种联系才获得诸多成功的,但也正是由于过分依赖于这种一定范围内的有限的联系而失去威力的。在似是而非的情况下,KAM 定理起到了原则性的廓清作用。1969 年,沃尔克(Walker G H)与福特(Ford)合著《保守非线性振子系统的振幅不稳定性与遍历行为》一文,成功地利用 KAM 定理解释了这些计算机实验结果。在这篇论文中,他们已把 KAM 定理与庞加莱定理、统计物理学的基础、简单非线性系统中复杂性的起源、埃农和海尔斯实验、FPU 实验等联系在一起进行思考。

在 KAM 定理首次提出的同时,在美国的洛斯阿拉莫斯(Los Alamos National Laboratory,LANL)的费米(Fermi E)、帕斯塔(Pasta J)和乌拉姆(Ulam S M)从 1952 年起由计算机实验也发现了奇特的现象,他们试图观测到系统弛豫到平衡态的不可逆过程,然而所依据的却是可逆的动力学方程。如果仅从可逆的动力学定律出发,考虑保守的哈密顿系统,必然遇到 KAM 定理所刻画的图像:有序不变环面与随机的混沌共存于一体,二者的测度可在很大范围内变动。KAM 定理一般地描绘了复杂系统的大致图景,从此经典力学进入了一个新阶段。

在现代混沌研究中,寻找横截同宿点(轨道)已成为发现混沌运动的一种最严格的方法,甚至在一维逻辑斯蒂(logistic)映射里也能找到同宿轨道。"同宿"一词是庞加莱在《天体力学的新方法》中引进的,用以说明动力学系统相空间的复杂结构。"同宿",指轨道在演化中有共同的归宿。双曲不动点的不变流形可以分解出稳定流形和不稳定流形,在不动点附近,当时间增加时,位于不稳定流形上的点,一般来说不断远离此双曲不动点。但当时间趋于无穷大时,此不稳定流形也可以返回来,又成为双曲点的稳定流形。这样此双曲点就成了流形的共同的归宿,叫做同宿点(homoclinio point)。这是一种特殊的同宿点,较普遍的是,同一或同一类双曲点的稳定流形与不稳定流形相交(又有"相切"和"交叉"(横截)两种),交点就是一个同宿点。有趣的是,有一个横截同宿点则必有无穷多个同宿点。因为同宿点在映射或流的作用下,依然能生成轨道,此轨道叫同宿轨道(不是物理上的真实轨道),它由同宿点组成。显然每一个同宿点都在双曲点的不变流形上,因而同宿轨道在映射或流的作用下是不变的。应当注意的是,单纯有同宿轨道还不足以证明系统的复杂的动力学行为,同宿轨道的直接含义是形成一个边界线,把定性上不同的运动分离开。只有当简单的闭合的同宿轨道受到摄动时,才出现复杂现象:分界线不闭合,不是简单的曲线,使得定性上不同的运动犬牙交错,这时候出现了横截同宿点和同宿分岔。

庞加莱 1894 年说道,分界线的"横截"形成了一种具有无穷精细网络的格子、组织或格栅的形态。两条曲线中任何一支自身都不会相交,但它们又必须以很复杂的方式弯曲回来,无穷多次地对直穿过格栅中所有的网格。

在现代微分动力系统理论以及整体性分析中，同宿点（轨道）是其中重要的研究内容之一。同宿点与移位自同构有密切联系，而斯美尔构造的马蹄对应于一个移位映射。因此寻找混沌的步骤是：同宿点→横截同宿点→马蹄→数学混沌＋收缩性→奇怪吸引子→耗散系统的物理混沌。

1956 年斯美尔（Smale S）、托姆（Thom R）和希尔茨（Hirsch M）、利马（Lima E）与帕雷斯（Palais D）、斯滕伯（Sternberg S）、派克索托（Peixoto M）的合作大大推进了研究的深入。

1918 年德国科学家杜芬（Duffing G）在研究具有立方非线性项的受迫振动时，提出著名的杜芬（Duffing）方程。在 20 世纪 60 年代初，日本的林千博（Hayashi C）、上田皖亮（Ueda Y）在模拟计算上有重大发现。

1963 年洛伦兹（Lorenz E）在萨尔兹曼（Saltzman B）1962 年的工作的基础上提出的“洛伦兹模型”，率先在非常具体的三阶微分方程系统中发现了混沌。他的论文叫做《确定性非周期流》，发表在《大气科学》杂志上。在二维连续系统中不可能出现混沌，三维是出现混沌所要求的最低维数。洛伦兹模型恰好只有三维。混沌热以来人们对各种各样的系统尝试建模，试图发现新的混沌类型。但是做来做去发现，所找到的能生成混沌的最简模型，与洛伦兹模型总是大同小异，奇怪吸引子的形状也非常类似于洛伦兹吸引子。奇怪吸引子概念直到 1971 年才由吕埃尔（Ruelle D）和塔肯斯（Takens F）提出。洛伦兹的伟大贡献是多方面的：①为非线性动力学研究贡献了一个绝好的数学模型；②给出了一套清晰的研究程序，定性的数学分析与计算机定量模拟相结合，开创了复杂性研究的新方法，认清了复杂系统中“对初条件的敏感依赖性”具有的实质意义。

1.2 非线性动力系统的稳定性

对于一般的非线性系统可能存在四种稳态：平衡点、周期轨、拟周期轨和奇异吸引子。接下来将给出自治系统平衡点等术语以及用于稳定性分析的一些相关理论。

定义 1-1 考虑非线性自治系统

$$\dot{x} = f(x) \tag{1-1}$$

式中 $f:D\to\mathbf{R}^n$ 是满足局部李普希兹（Lipschitz）条件的从区域 D 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射。不失一般性，可假定原点是系统的一个平衡点，即满足 $f(0)=0$。

如果对 $\forall\varepsilon>0$，总是存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $\|x(0)\|<\delta$ 时，其解满足：$\|x(t)\|<\varepsilon, \forall t\geqslant 0$，则称原点是稳定的平衡点。

如果 $x=\mathbf{0}$ 是稳定的平衡点，并且还满足：$x(t)\to\mathbf{0}$，当 $t\to\infty$ 时，则称原点是渐近稳定的平衡点。

从上面的定义可以看出，零解稳定的意义是指对任意给定的半径 ε，总能在 $\mathbf{R}^n$ 中找到一个以原点为中心，半径为 δ 的开球 B_δ，使得系统在零时刻从开球 B_δ 出发的解曲线当 $t>0$ 时总能停留在半径为 ε 的开球内。而渐近稳定的平衡点不但要求平衡点是稳定的，而且要求系统的轨迹沿时间 t 趋向于平衡点。直观地说，平衡点是稳定的，意味着所有从平衡点附近出发的解轨线始终保持在平衡点附近。平衡点是渐近稳定的，意味着不但所有从平衡点附近出发的解轨线始终保持在平衡点附近，而且随着时间趋向于无穷，解轨线趋向于平衡

点。但在实际问题中，提出的微分方程往往是复杂的，无法求出其解析解，这就需要我们从方程本身来判断零解的稳定性，李雅普诺夫直接法就是解决这类问题的有效途径。

下面引入正定函数的定义，并叙述利用李雅普诺夫函数判断非线性自治系统稳定性的基本定理。

定义 1-2(局部正定函数)　连续可微函数 $V:B_h\to\mathbf{R}_+$ 是局部正定函数，如果满足：$V(0)=0, V(\boldsymbol{x})>0, \forall \boldsymbol{x}\in B_h-\{0\}$。

定义 1-3(全导数，轨线导数)　函数 $V:B_h\to\mathbf{R}_+$ 对常微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的全导数等于

$$\dot{V}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(\boldsymbol{x})=\left[\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right]\begin{bmatrix}f_1(\boldsymbol{x})\\ f_2(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ f_n(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}$$

定理 1-1(自治系统稳定性)　令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\in B_h$ 为常微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的平衡点，如果存在：

(1) 连续可微函数 $V:B_h\to R_+$ 满足 $V(0)=0, V(\boldsymbol{x})>0, \forall \boldsymbol{x}\in B_h-\{0\}$(即局部正定函数 V)；

(2) 全导数 $\dot{V}(\boldsymbol{x})\leqslant 0, \forall \boldsymbol{x}\in B_h-\{0\}$，则平衡点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的。

定义 1-4(稳定矩阵)　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是稳定矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值的实部 $\mathrm{Re}(\lambda)$ 满足 $\mathrm{Re}(\lambda)<0$。

定理 1-2　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是稳定矩阵，当且仅当对任意给定对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$，满足此李雅普诺夫矩阵方程：$\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q}$；另外，如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是稳定矩阵，则 $\boldsymbol{P}$ 是唯一的。

定理 1-3(自治系统渐近稳定性)　令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\in B_h$ 为自治系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的平衡点，如果存在：

(1) 连续可微函数 $V:B_h\to\mathbf{R}_+$ 满足 $V(0)=0, V(\boldsymbol{x})>0, \forall \boldsymbol{x}\in B_h-\{0\}$(即局部正定函数 V)；

(2) 全导数 $\dot{V}(\boldsymbol{x})\leqslant 0, \forall \boldsymbol{x}\in B_h-\{0\}$，则平衡点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的。如果还满足 $V(\boldsymbol{x})\to\infty$，当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ 时，那么平衡点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是全局渐近稳定的。

定理 1-4　系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的平衡点是稳定的，当且仅当系统在原点的雅可比矩阵 $\boldsymbol{A}=\left.\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_0$ 是稳定的。

定义 1-5(稳定域)　设原点是系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的渐近稳定的平衡点，$\varphi_t(\boldsymbol{x})$ 是系统(1-1)经过初始点 x 的轨迹曲线，稳定域集合 Ω 定义为：$\Omega=\{\boldsymbol{x}\in D\mid\varphi_t(\boldsymbol{x})\to 0, t\to\infty\}$。

对于一个渐近稳定的系统，如果进一步考虑存在参数不确定性或者外界扰动时，系统的轨迹并不能收敛到平衡点，而是在平衡点周围的一个邻域内运动。此时不能用按常规意义下的李雅普诺夫稳定来分析系统的稳定性，因此引入下面“最终有界”与“一致最终有界”的概念。

定义 1-6　若存在常数 $\beta>0$，对于自治系统 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), x(t_0)=x_0$ 的任意解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,x_0)$，存在 $T(t_0,x_0)>0$，当 $t>t_0+T(t_0,x_0)$ 时，有 $\|\boldsymbol{x}(t,t_0,x_0)\|<\beta$，则称该系统为耗散系统，也称系统的解最终有界。

定义 1-7 对于自治系统$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}(t_0)=x_0$，若存在常数$\beta>0$，$\forall\alpha>0$，$\forall t_0\in I$，$\exists\beta(\alpha)>0$，$\forall x_0\in S_\alpha=\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\alpha\}$，$\exists T(\alpha)>0$，当$t>t_0+T(\alpha)$时，有$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,x_0)\|<\beta$，则称系统为一致耗散，也称系统的解最终一致有界。

定义 1-8(正极限集) 称$L^+\subset\mathbf{R}^n$为自治系统(1-1)的正极限集，如果对$\forall\hat{\boldsymbol{x}}\in L^+$，存在一个序列$x(t_n)$，满足：$\forall\hat{\boldsymbol{x}}\in L^+\ \boldsymbol{x}(t_n)\to\hat{\boldsymbol{x}}$，当$t_n\to\infty$时。

定义 1-9(不变集) 称$M\subset\mathbf{R}^n$为自治系统$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x})$的不变集，如果：$\forall x_0\in M\Rightarrow x(t)\in M$，$\forall t>0$。

定理 1-5(拉萨尔不变性原理) 设$x=0$是非线性系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的一个平衡点，假设存在连续可微函数$V:B_h\to\mathbf{R}_+$，令$\Omega\subset B_h$为一紧致的正不变集，而且满足：$\dot{V}(\boldsymbol{x})\leqslant0$，$\forall\boldsymbol{x}\in\Omega$；令$E=\{\boldsymbol{x}\in\Omega;\ \dot{V}(\boldsymbol{x})=0\}$，$M$为$E$中最大不变集，则当$x_0\in\Omega$时，有$\lim\limits_{t\to\infty}x(x_0,t)\in M$。

推论 1-1 设$x=0$是非线性系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的一个平衡点，如果存在连续可微的实值函数$V:D\to\mathbf{R}$，使得$V(0)=0$且$\dot{V}(\boldsymbol{x})>0$，$\forall\boldsymbol{x}\in D-\{0\}$；$\dot{V}(\boldsymbol{x})\leqslant0$，$\forall\boldsymbol{x}\in D$。设集合$S$为：$S=\{\boldsymbol{x}\in D\mid\dot{V}(\boldsymbol{x})=0\}$，如果除了平衡点之外，任何从区域$D$内出发的解曲线都不会永远位于集合$S$中，则$x=0$是渐近稳定的平衡点。

推论 1-2 设$x=0$是非线性系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的一个平衡点，如果$V:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$是连续可微、径向无界的正定函数，并且满足：$\dot{V}(\boldsymbol{x})\leqslant0$，$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，设集合$S$为：$S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid\dot{V}(\boldsymbol{x})=0\}$，如果除了平衡点之外，非线性系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的任何解曲线都不会永远位于集合$S$内，则平衡点$x=0$是大范围渐近稳定的。

拉萨尔不变原理及其推论的重要意义不仅在于它放松了对辅助函数V正定以及对该函数沿时间的导数负定的要求，更重要的是它给出了非线性系统平衡点稳定域的一种估计方法。事实上，如果能够根据拉萨尔不变原理判断原点是一个渐近稳定的平衡点，那么对应的紧致集合也就是这个平衡点稳定域的一个估计。

1.3 拉格朗日稳定性的研究

在李雅普诺夫意义下的稳定性必须要求非线性系统平衡点是存在的，尤其是在讨论系统的全局稳定性时必须要求平衡点存在且唯一。然而，由于动力系统内在所固有的非线性特性、随机性以及信号传输的误差性等特征可能会使得系统本身不存在平衡点，或者同时存在很多平衡点，甚至这些平衡点的状态可能是不稳定的。这时，就需要使用一种不同于李雅普诺夫稳定的且能够界定并反映整个系统特性的新意义下的稳定性理论。同时这种稳定性还需要在不用被限制到一个平衡点附近足够小的邻域内的条件下却依然能够使得给定的系统中所有解的状态轨迹都保持有界，那么满足这些条件的这种稳定类型就称为拉格朗日稳定，它更侧重于描述整个系统的运动状态。

拉格朗日稳定性的定义如下：

定义 1-10 设$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$，$t\geqslant0$，$x(0)=t_0$，如果存在一有界正数$L>0$，$\forall t\geqslant0$，$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant L$，则称轨线$\boldsymbol{x}(t)$是拉格朗日稳定的。

在一般情况下，系统的平衡态并不唯一，其中某些平衡态还可能是不稳定的。非线性系统很多都具有这一特性。如何研究系统具有多稳态情形的稳定性呢？到目前为止，研究系统的拉格朗日稳定性仍然是最有效的方法。

从动态系统的观点出发，李雅普诺夫意义下全局稳定模型是单稳态系统，即系统存在唯一渐近吸引所有轨迹的平衡点。但在实际的生物学应用中，有时系统不再是全局稳定，因而，需要更加合适的稳定性概念来研究多稳态系统。同样地，在实际系统中，如生物网络以及电力系统等非线性系统中往往存在多个平衡点，这时探讨拉格朗日稳定性会更符合实际需要。因为拉格朗日稳定隶属非线性系统稳定性概念的一种，用来反映系统解的有界性。拉格朗日稳定理论是李雅普诺夫稳定理论的一个补充和外延，它更侧重于考察系统的总体特性，属于整体概念。所以说，对非线性系统拉格朗日稳定性的探讨和研究具有非常重要的理论价值和实际意义。目前，从查阅的相关文献中已有的成果来看，对拉格朗日稳定性的研究仅仅局限在对于有多平衡点的非线性系统的分析与合成方面，尤其是在 Chua's 电路、相同步系统等一系列工程系统中。

拉格朗日稳定性较李雅普诺夫稳定性的不同之处在于：拉格朗日稳定性是关于整个系统所有解的有界性，而不是某些平衡点的稳定性。在研究系统的拉格朗日稳定性时，不需要考虑平衡点的数量，特别是拉格朗日渐近稳定性，只要系统的解最终进入某一个紧集（有界闭集），则称该系统具有拉格朗日渐近稳定性或最终有界。这一稳定性概念不再考虑单个平衡位置的稳定性单稳态系统，条件当然更弱，具有较小的保守性。拉格朗日稳定性也是系统所有解收敛到某个平衡位置的必要条件，当吸引紧集退化为一个唯一平衡位置时，系统则为李雅普诺夫意义下的全局稳定，吸引紧集就是唯一的平衡点。

在动态系统的理论和应用中，拉格朗日稳定性很早就被学者们所关注。Lasalle(1960)和 Yoshizawa(1966)应用李雅普诺夫函数来研究拉格朗日稳定性，其中 Lasalle 探讨了李雅普诺夫第二方法的拓展，揭开了系统一致有界性问题研究的序幕，Yoshizawa 则进一步研究了拉格朗日稳定性，即系统的解的有界性。Thornton 和 Mulholland(1974)将拉格朗日稳定性作为一个决定生态系统稳定性的实用概念进行讨论。You J G(1990)研究了 pendulum-type 方程的不变集和拉格朗日稳定性。黄文灶(1992)研究了动力系统中拉格朗日稳定运动的 ω-极限集为稳定几乎周期运动所组成的极小集合的充要条件，进而判别常微分系统中几乎周期解或周期解存在的条件。张胜强(1993)研究了 n 维欧式空间中动力系统奇点邻域以及紧致不变集合邻域内拉格朗日稳定运动的存在性问题。Passino 和 Burgess(1996)选择拉格朗日稳定性概念来研究离散事件系统，认为李雅普诺夫和渐近稳定性可以描述一类“合乎逻辑”的离散事件系统的稳定性，可用于制造系统和计算机网络的稳定性，从而扩展了一致有界性、一致极限有界性、实际稳定性、有限时间稳定性和拉格朗日稳定性的概念，分析了标准的 Petri 网络的稳定性。Andrea Bacciotti 和 Lionel Rosier(1998)研究了李雅普诺夫逆定理在右端不连续的常微分系统中的应用，并分析了在一个平衡点处的局部稳定性问题和系统解的拉格朗日稳定性问题。张克伟(1999)证明了如果一运动是正向拉格朗日稳定的，并且此运动关于其正半轨是一致正向李雅普诺夫稳定的，则其 ω-极限集是几乎周期运动的极小集合。Lionel Rosier(1999)通过构造一个光滑李雅普诺夫函数来说明不连续稳定系统是一个鲁棒拉格朗日稳定。Hasssbs 等研究了超动态系统的拉格朗日稳定性。

王玉敏和孟凡伟(2000)借助于不等式及辅助函数技巧研究了二阶微分方程拉格朗日稳定的若干判定准则。Zharmitsky V(2000)将单调扭定理推广到拟周期情形并应用于探寻一个跳跃粒子系统的运动规律中,当频率满足丢番图不等式时,粒子的速度是一致有界的,满足拉格朗日稳定条件。Yuan X P(2001)研究了非对称杜芬方程的拉格朗日稳定性问题。Huang H(2001)研究了拟周期强迫类摆方程解的一致有界性。Bibikov 和 Yu N(2002)研究了基本非线性哈密顿系统以及带有一个自由度的可逆系统的零解的李雅普诺夫稳定性和拉格朗日稳定性问题。杨莹和黄琳(2003)研究了摄动类摆系统的总体性质和鲁棒稳定性,得到了类摆系统在摄动模式下的拉格朗日稳定条件。弭鲁芳(2003)研究了一类非对称 Duffing 方程的拉格朗日稳定性。Ferrari-Trecate G、Cuzzoia F A 和 Morari M(2003)对离散分段仿射系统进行了拉格朗日稳定性研究和系统性能分析。Yi Z 和 Tan K K(2004)研究了多稳态系统的三个基本性能有界性、吸引性和完全收敛性。Lin S S 和 Wang Y Q (2004)证明了拟周期系统的拉格朗日稳定性问题。Mi L F(2004)利用 Moser 扭转定理研究了一类 Duffing 方程的拉格朗日稳定性。孙光辉和傅希林(2004)运用变分李雅普诺夫函数方法和比较定理得到了脉冲摄动微分系统关于两个测度拉格朗日稳定性的充分条件。

李鑫滨(2005)基于类摆系统理论研究了发电机汽门 H_∞ 控制器设计问题,并利用微分方程的定性分析方法讨论了具有一般非线性形式的二阶类摆系统的拉格朗日稳定性。李鑫滨和钟嘉庆(2005)针对一类特殊的具有多平衡点的非线性系统——类摆系统研究了其鲁棒拉格朗日镇定问题并给出了鲁棒状态反馈控制器的设计方法。吕濯缨和傅希林(2005)通过构造李雅普诺夫函数与运用 Razmikhin 技巧研究了脉冲积分微分方程解的有界性与拉格朗日稳定性的判定准则。Sosnyts'kyi S P(2005)研究了三体问题中的拉格朗日运动稳定性问题。郭戈(2006)采用非线性跳跃方法及其线性化策略研究了非线性采样控制系统在理想离散化方式和无限字长数字控制器作用下的拉格朗日稳定性。Liu C、Huang L 和 Feng D X (2006)采用频域方法研究了在有限维 Hilbert 空间中的一类摆动系统的拉格朗日稳定特性。Wang J Z、Duan Z S 和 Huang L(2006)研究了线性摄动系统的控制问题,通过设计一些控制器策略来确保闭环系统具有类摆性质和拉格朗日稳定性。Yang Y 和 Huang L (2006)研究了一类非线性离散时间系统的鲁棒拉格朗日稳定性。Luo Q、Bao J T 和 Hang Y T(2006)研究了随机反馈扩散方程在均方意义下的拉格朗日稳定性。廖晓昕等人(2007)讨论了 Lorenz 系统族的拉格朗日稳定性并给出全局指数吸引集的指数吸引估计式。

Liu C、Huang L 和 Feng D X(2007)在有限维 Hilbert 空间中针对一类摆动系统建立了一个确保系统拉格朗日稳定的频域判据。Wang J Z、Duan Z S 和 Huang L(2007)通过使用 H_∞ 理论研究了不确定的类摆反馈系统的二分法特性和拉格朗日稳定性。Duan Z S、Wang J Z、Li R 和 Huang L 等(2007)将光滑 Chua's 方程推广到高阶系统中并建立了系统拉格朗日稳定的相应的简单条件,也分析了规范的 Chua's 振荡器具体的拉格朗日稳定域。郭韵霞(2008)通过证明一个 Halanay 型不等式并用它研究了半线性泛函微分方程的拉格朗日稳定性,通过利用矩阵测度以及欧几里得空间范数构造简单的李雅普诺夫函数,得到了半线性泛函微分方程关于部分变元为拉格朗日稳定的充分条件。Liao X X、Luo Q、Zeng Z G 等(2008)在考虑三种不同类型激活函数的基础上,通过构造恰当的 Lyapunov-like 函数研究了带有多时滞的连续递归神经网络在拉格朗日意义下的全局指数稳定性。紧接着,Liao X X、Luo Q 和 Zeng Z G(2008)基于系统参数进一步研究了多种连续变时滞递归神经网络的

拉格朗日稳定性并给出了全局指数吸引集和正不变集的具体估计式。Li R、Duan Z S 和 Wang B(2008)将原始的 Chua's 电路通过分段线性函数和一个吸引排斥函数进行改进，并通过分岔图来分析新电路的一些基本性质，得到了电路拉格朗日稳定的条件。Liao X X、Fu Y L、Xie S L 和 Yu P 等(2008)提出全局指数吸引集的概念用于分析一族带有变参数的 Lorenz 系统的一致有界性，即拉格朗日稳定性，并给出了一致有界域的估计式。郭韵霞(2009)利用 Gronwall-Bellman 不等式和微分积分不等式，并结合李雅普诺夫函数探讨了一类非线性时变系统关于部分变元的拉格朗日稳定性、等度拉格朗日稳定性和一致拉格朗日稳定性。王晓红(2009)针对时滞 Cohen-Grossberg 型神经网络的动力学行为进行了分析，其中涉及拉格朗日稳定性研究。孙西滢(2009)利用光滑条件下的拟周期扭转映射的不变曲线定理研究了拟周期碰撞振子的拉格朗日稳定性。

殷明慧、邹云和薛禹胜(2009)基于已有的电力工程实用方法，建立了一类基于轨迹的拉格朗日稳定性的数学描述及其判定方法。Gao Q(2009)通过使用 Kalman-Yakubovich-Popov 引理、线性矩阵不等式技巧和频域方法研究了带有参数不确定的相控制系统的拉格朗日镇定问题。Dun A、Geng Z Y、Lei F 等(2009)通过应用系统传递函数的结构奇异值到结构化的不确定性中，得到了研究带有标准约束结构不确定性的类摆系统鲁棒拉格朗日稳定问题的一个新的频域条件。Wang X H 和 Jiang M H 等(2009)探讨了一类带有变时滞和分布时滞的非自治 Cohen-Grossberg 神经网络在拉格朗日意义下的全局指数稳定性。Wang B X 等人(2009)基于李雅普诺夫理论继续研究了带有变时滞和有限分布时滞的 Cohen-Grossberg 神经网络在拉格朗日意义下的全局指数稳定性。王晓红等人(2010)基于两种不同类型的激活函数，讨论了非自治时滞 Cohen-Grossberg 神经网络在拉格朗日意义下的全局指数稳定性。金惠萍(2010)研究了平面非自治 Hamilton 方程的拉格朗日稳定性。金惠萍(2010)还研究了一类非多项式型周期 Hamilton 系统的拉格朗日稳定性。

Cong F Z、Liang X 和 Han Y C(2010)研究了一类拟周期类摆型方程拉格朗日稳定的充要条件。Luo Q、Zhang R B 和 Liao X X(2010)通过构造恰当的李雅普诺夫泛函得到了一类基因调控网络在拉格朗日意义下的全局指数稳定的充分性判据。Luo Q、Zeng Z G 和 Liao X X(2011)研究了多时滞连续中立型递归神经网络在拉格朗日意义下的全局指数稳定性。Wu A L 和 Zeng Z G 等(2011)进一步研究了带有不同类型激活函数的周期型神经网络的拉格朗日稳定性问题。Tu Z W 等人(2011)通过构造李雅普诺夫泛函和时滞微分不等式技巧得到了具有广义激活函数和时变时滞递归神经网络在拉格朗日意义下的全局指数稳定性。Yakar C、Cicek M 和 Gücen M B(2011)研究了初始时间差异有界性标准和分数阶微分方程在卡普托意义下的拉格朗日稳定性。Yakar 和 Cicek(2011)讨论了初始时间差异有界的理论、方法和应用，并采用两种措施研究了非线性系统的拉格朗日稳定性。王卫华、施洋和周国鹏(2011)研究了一类光滑 Chua's 电路的拉格朗日稳定性分析。张亭亭(2011)讨论了具有无界扰动的非对称振动的拉格朗日稳定性。刘杰(2011)研究了具有奇点的等时系统在无界扰动下的拉格朗日稳定性。施洋、周国鹏和廖晓昕(2012)构造了一类新型 Chua's 电路，研究该系统的拉格朗日稳定性。邢秀梅(2012)研究了非线性方程的拉格朗日稳定性。贤锋和马合保(2012)利用 K 类函数和 Dini 导数，分别研究了非线性广义系统拉格朗日稳定、等度拉格朗日稳定性和一致拉格朗日稳定性的充分条件。Sosnitskii S(2012)研究了三体问题中的拉格朗日运动稳定性和最终演化问题。Yakar C、Cicek M 和