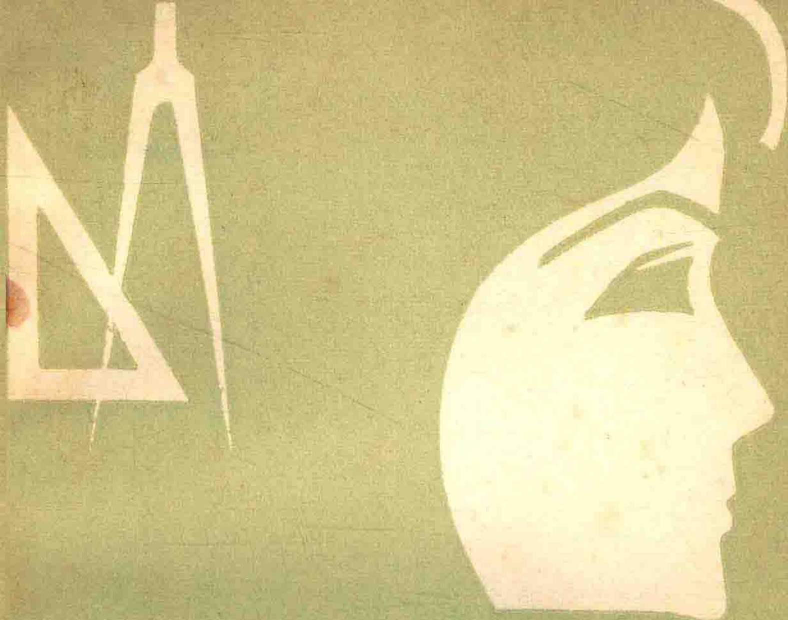

中学课外辅导丛书

高中代数第二册
单元能力训练

辽宁教育出版社

高中代数第二册单元能力训练
陈雪筠　　曲瑞民　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　建昌印刷厂印刷

字数：100,000　开本：787×1092　1/32　印张：5
印数：147,856—203,956
1985年11月第1版　　1988年6月第4次印刷

责任编辑：俞晓群　　责任校对：理　俞
封面设计：安　迪　　插　　图：潘智倩

ISBN7-5382-0071-1/G·66　定价：0.83元

目

习题部分

第一章　反三角函数和简单三角方程

一　反三角函数

1．回答下列问题：

（1）正弦函数$y=\sin x$在它的定义域（$-\infty$，$+\infty$）上有没有反函数？为什么？

（2）在$y=\sin x$的定义域上选取怎样的子集可以建立它的反函数？

（3）为什么选取$y=\sin x$定义域的子集$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$建立它的反函数？

（4）可否选取$y=\sin x$定义域的子集$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$建立它的反函数？为什么？

2．说明下列各式表示什么意义：

（1）$\arcsin\frac{1}{5}$　　（2）$\arcsin\sqrt{3}$

（3）$\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$　　（4）$\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

（5）$\mathrm{arctg}(-1)$　　（6）$\mathrm{arcctg}(-1)$

3．指出使下列等式成立的x的取值范围：

（1）$\sin(\arcsin x)=x$　　（2）$\arccos(\cos x)=x$

(3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x$　　(4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x$

4. 选择题（答案中有且只有一个正确）：

(1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$的值是（　）。

(A) $120°$　　(B) $150°$

(C) $-30°$　　(D) $-60°$

(2) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{3}\right)$（　）。

(A) 等于$\frac{\pi}{3}$　　(B) 等于$\frac{1}{2}$

(C) 等于$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) 无意义

(3) $\sin\left(\arccos\frac{1}{7}\right)$的值是（　　）。

(A) $\frac{1}{7}$　　(B) $\pm\frac{4\sqrt{3}}{7}$

(C) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$　　(D) $-\frac{4\sqrt{3}}{7}$

(4) $\arccos\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$的值是（　）。

(A) $-\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{2\pi}{3}$

(C) $-\frac{2\pi}{3}$　　(D) $\frac{\pi}{3}$

(5) $\arcsin(\sin 4)$的值是（　）。

(A) 4　　(B) $\pi-4$

(C) $4-2\pi$　　(D) $2\pi-4$

(6) 直线$y=-2x+5$的倾斜角等于（　　）.

(A) $\operatorname{arctg}2$　　(B) $\operatorname{arctg}(-2)$

(C) $\pi-\operatorname{arctg}2$　　(D) $\pi-\operatorname{arctg}(-2)$

(7) 若函数$y=\sin x\left(\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}\right)$的反函数是 $y=\varphi(x)$且$x\in I$，则下列结论中正确的是（　　）.

(A) $\varphi(x)=\arcsin x$，$I=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$

(B) $\varphi(x)=\arcsin x$，$I=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0\}$

(C) $\varphi(x)=\pi-\arcsin x$，$I=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$

(D) $\varphi(x)=\pi-\arcsin x$，$I=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0\}$

(8) $\sin(\arccos x)$ $(|x|\leqslant 1)$的值是（　　）.

(A) $\pm\sqrt{1-x^2}$　　(B) $\sqrt{1-x^2}$

(C) $-\sqrt{1-x^2}$

(D) $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时是$-\sqrt{1-x^2}$，

$0\leqslant x\leqslant 1$ 时为$\sqrt{1-x^2}$

(9) $\operatorname{tg}(\arcsin x)$ $(|x|<1)$的值是（　　）.

(A) $\pm\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$　　(B) $\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

(C) $-\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

(D) $-1<x\leqslant 0$ 时是$-\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$，

$0\leqslant x<1$ 时是$\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

(10) 函数$y=\arcsin(2\cos x)$的定义域是（　　）.

(A) $\left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right]$　　(B) $\left[k\pi+\dfrac{\pi}{6},\ k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right]$

(C) $\left[k\pi+\frac{\pi}{3}, k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$

(D) $\left[k\pi-\frac{\pi}{3}, k\pi+\frac{\pi}{3}\right]\cup$

$\left[k\pi+\frac{2\pi}{3}, k\pi+\frac{4\pi}{3}\right](k\in Z)$

(11) 函数$y=\arccos(x^2-x)$的值域是（　　）.

(A) $[0,\pi]$　　　(B) $\left[0, \pi-\arccos\frac{1}{4}\right]$

(C) $\left[\pi-\arccos\frac{1}{4}, \pi\right]$

(D) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi-\arccos\frac{1}{4}\right]$

(12) 若$\arccos x<1$，则x的取值范围是（　　）.

(A) $[0,1)$　　　(B) $[-1, 1]$

(C) $[0,\cos 1)$　　　(D) $(\cos 1, 1]$

(13) 设$a\geqslant 0, b\geqslant 0$且$(a+1)(b+1)=2$，则$\mathrm{arctg}\,a+\mathrm{arctg}\,b$等于（　　）.

(A) $\frac{\pi}{2}$　(B) $\frac{\pi}{3}$　(C) $\frac{\pi}{4}$　(D) $\frac{\pi}{6}$

(14) 已知$\cos x=-\frac{3}{4}(x\in[\pi,2\pi])$，则$x$等于（　）.

(A) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$　　(B) $\pi+\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$

(C) $-\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$　(D) $2\pi-\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$

(15) $\arcsin\frac{1}{3}$，$\mathrm{arctg}\sqrt{2}$，$\arccos\frac{3}{4}$的大小顺序

是（　　）．

（A） $\arcsin\frac{1}{3}<\operatorname{arctg}\sqrt{2}<\arccos\frac{3}{4}$

（B） $\arccos\frac{3}{4}<\operatorname{arctg}\sqrt{2}<\arcsin\frac{1}{3}$

（C） $\operatorname{arctg}\sqrt{2}<\arccos\frac{3}{4}<\arcsin\frac{1}{3}$

（D） $\arcsin\frac{1}{3}<\arccos\frac{3}{4}<\operatorname{arctg}\sqrt{2}$

5．填空：

（1） $\arcsin a=\arccos$（　　）$=\operatorname{arctg}$（　　）$=\operatorname{arcctg}$（　　）　（其中$0<a<1$）．

（2） $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=$（　　）．

（3） $\arccos\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]=$（　　）．

（4） $\sin\left[\arccos\text{（　　）}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

（5） $\arcsin[\cos\text{（　　）}]=\frac{\pi}{6}$．

（6） $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x)=$（　　），其中 $x\in(\pi,2\pi)$．

（7） 函数$y=3\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}$的反函数是（　　），

反函数的定义域是（　　），值域是（　　）．

（8） 函数$y=\arcsin(x^2+1)$的定义域是（　　），

值域是（　　）。

（9） 函数 $y=\frac{3\pi}{2}-\arccos\frac{1}{3x}$的定义域是（　　），

值域是（　　）．

（10）函数$y=\mathrm{arcctg}(2^{x}-1)$的定义域是（　　），值域是（　　）．

6．确定下列各式的符号：

（1）$\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)-\arcsin\left(-\frac{5}{6}\right)$.

（2）$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

（3）$\mathrm{arcctg}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)-\mathrm{arcctg}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$.

（4）$\arccos(\mathrm{tg}1)-\arccos(\mathrm{tg}2)$.

（5）$\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)-\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$.

（6）$\mathrm{arcctg}\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)-\mathrm{arctg}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$.

7．下列各题的解法是否正确？为什么？

（1）已知$\sin x=a$，$-1<a<0$ 且 $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$，求x．

解　∵ $-1<a<0$，∴x在三、四象限．

又　$-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$，∴x是第三象限角．

故$x=\pi+\arcsin a$．

（2）已知$\cos x=a$，$-1<a<0$且$-\frac{3\pi}{2}<x<-\pi$，求x．

解　∵ $-1<a<0$，∴x在二、三象限．

又$-\frac{3\pi}{2}<x<-\pi$，∴x是第二象限角．

故$x=\arccos a$。

（3）已知 $\operatorname{tg}x=a, a<0$且$-\frac{3\pi}{2}<x<-\pi$，求 x。

解　$\because a<0$，$\therefore x$ 在二、四象限。

又$-\frac{3\pi}{2}<x<-\pi$，$\therefore x$ 是第二象限角。

$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}a<0$，$\therefore x=-\pi+\operatorname{arctg}a$。

（4）已知 $\operatorname{ctg}x=a$，$a=0$且$-\frac{3\pi}{2}<x<-\pi$，求 x。

解　$\because$ $\operatorname{ctg}x=0$且$-\frac{3\pi}{2}<x<-\pi$，$\therefore x=-\pi$。

8．求下列各式的值：

（1）$\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)+\arcsin\frac{2}{3}$。

（2）$\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+\arccos\frac{2}{3}$。

（3）$\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)+\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$。

（4）$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{2}{2}}\right)+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{2}}$。

（5）$\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{\frac{2}{2}}\right)+\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{2}{2}}$。

（6）$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{2}{2}}\right)+\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{\frac{2}{2}}\right)$。

9．求下列各式的值：

（1）$\sin(\arcsin x+\arcsin y)$，其中 $x\in[-1,1]$，$y\in$

$[-1, 1]$.

（2）$\cos(\arccos x - \arccos y)$，其中 $x \in [-1, 1]$，$y \in [-1,1]$.

（3）$\operatorname{tg}(2\arccos x)$，其中 $x \in [-1,1]$ 且 $|x| \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

（4）$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)$，其中 $x \in [-1,1]$.

10．求下列各式的值：

（1）$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$.

（2）$\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{2}\right)$.

11．求下列各式的值：

（1）$\sin\frac{1}{2}(\pi + \operatorname{arctg}2\sqrt{2})$.

（2）$\cos2\left(\pi - \arcsin\frac{1}{3}\right)$.

12．求下列各式的值：

（1）$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）$2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}$.

（3）$\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$.

13．求证：

（1）$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

(2) $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

(3) $\sin\{\arccos[\operatorname{tg}(\arcsin x)]\}=\sqrt{\frac{1-2x^2}{1-x^2}}$，其中 $|x|\leqslant\sqrt{\frac{2}{2}}$.

14. 求出下列各式里的 x：

(1) $\arcsin x+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$.

(2) $3\arcsin x+2\arccos x=\frac{7\pi}{6}$.

(3) $2\arcsin x=\arccos(1-2x^2)$.

15. 解方程组

$$\begin{cases}\arcsin x\cdot\arcsin y=\frac{\pi^2}{12},\\ \arccos x\cdot\arccos y=\frac{\pi^2}{24}.\end{cases}$$

16. 解下列不等式：

(1) $\arcsin x>\arcsin(1-x)$.

(2) $\arccos x>\arccos x^2$.

(3) $\arcsin x>\arccos x$.

17. 画出下列函数的图象：

(1) $y=\cos(\arccos x)$.

(2) $y=\cos(\arcsin x)$.

(3) $y=2\operatorname{arctg} x$.

(4) $y=\frac{\pi}{2}+\arcsin(x-1)$.

二　简单三角方程

1. 选择题（有且只有一个答案正确）：

(1) 方程$\sin x=a$的解集（ ）.

(A) 是$\{x|x=k\pi+(-1)^k\cdot\arcsin a,k\in z\}$

(B) 是$\{x|x=2k\pi+\arcsin a,k\in z\}\cup$
$\{x|x=2k\pi+\pi-\arcsin a,k\in z\}$

(C) 是$\{x|x=k\pi\pm\arcsin a,k\in z\}$

(D) 以上都不对

(2) 方程$\mathrm{tg}2x=a$的解集（ ）.

(A) 是 $\{x|x=k\pi+\frac{1}{2}\mathrm{arc\ tg}a,k\in z\}$

(B) 是 $\{x|x=k\pi\pm\frac{1}{2}\mathrm{arctg}a,k\in z\}$

(C) 是$\{x|x=2k\pi+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}a,\ k\in z\}$

(D) 以上都不对

(3) 方程 $\cos^2x=\frac{1}{2}$的解集（ ）.

(A) 是$\{x|x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4},k\in z\}$

(B) 是 $\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in z\}$

(C) 是 $\{x|x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in z\}$

(D) 以上都不对

(4) 用“万能公式”解方程 $3\sin x-2\cos x=2$ 所得解集（ ）.

(A) 是$\{x|x=k\pi+2\mathrm{arctg}\frac{2}{3},\ k\in z\}$

(B) 是$\{x|x=k\pi+4\mathrm{arctg}\frac{2}{3},k\in z\}$

(C) 是$\{x|x=k\pi+2\mathrm{arctg}\frac{12}{5},k\in z\}$

(D) 以上都不对

2. 填空:

方程	解集
$\sin x=1$	
$\sin x=-1$	
$\sin x=0$	
$\cos x=1$	
$\cos x=-1$	
$\cos x=0$	
$\mathrm{tg}\, x=0$	
$\mathrm{ctg}\, x=0$	

3. 求证:

(1) 如集合$A=\{x|x=k\pi,k\in z\}\cup\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{2},$

$k\in z\}$, 集合$B=\{x|x=\frac{k\pi}{2},k\in z\}$, 则$A=B$.

(2) 如集合$A=\{x|x=\frac{k\pi}{3},k\in z\}\cup\{x|x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2},$

$k\in z\}$, 集合$B=\{x|x=\frac{k\pi}{2},k\in z\}\cup\{x|x=k\pi\ \pm$

$\frac{\pi}{3}$，$k\in z\}$，则$A=B$。

4. 甲、乙、丙三人解方程 $\sin x-2\cos x=0$所得解集分别为：$\{x|x=k\pi+\operatorname{arctg}2,\ k\in z\}$，

$$\{x|x=k\pi+\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5},k\in z\},$$

$$\{x|x=2k\pi+2\operatorname{arctg}\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},k\in z\}。$$

他们得的结果都对吗？

5. 甲、乙、丙三人解方程$\sin x-\cos x=1$，

甲的解法为：

将$\sin x=1+\cos x$两边平方

$\sin^2 x=1+2\cos x+\cos^2 x$，

$2\cos^2 x+2\cos x=0$，

$2\cos x(\cos x+1)=0$。

由$\cos x=0$　得$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in z)$。

由$\cos x+1=0$得$x=(2k+1)\pi,(k\in z)$。

∴原方程的解集为$\{x|x=(2k+1)\pi$，或$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in z\}$。

乙的解法为：

令$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，则$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，

代入后得$\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}=1$。

解得$t=1$，即$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$，∴ $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in z)$，

故原方程的解集为$\{x|x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in z\}$。

丙的解法为：

将方程左端化积并整理得$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\ x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{4}$，

$x=k\pi+\frac{\pi}{4}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}(k\in z)$。

$\therefore$原方程的解集是$\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4},\ k\in z\}$

上述解法正确吗？如不正确，指出错误所在。

6．解下列方程：

（1） $\sin3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$。　　（2） $\cos(3x+\pi)=-1$。

（3） $\mathrm{tg}x^2=0$。　　（4） $\mathrm{ctg}2x=0$。

（5） $\cos4x=\cos3x$。　　（6） $\sin5x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$。

（7） $\mathrm{tg}5x+\mathrm{tg}\,x=0$。　　（8） $\sin x+\cos x=1$。

（9） $\sin x-\cos x=1$。　　（10） $\sin^3x=\sin x$。

（11） $2\sin^2x+3\cos x=3$。

（12） $\sin x\cdot\cos x+\sin x+\cos x+1=0$。

（13） $\cos x\cdot\mathrm{ctg}\,x+1=\cos x+\mathrm{ctg}\,x$。

（14） $3\sin\frac{x}{2}+\cos x=1$。

（15） $\sin5x-\sin x=\sin2x$。

（16） $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}2x=\mathrm{tg}3x$。

(17) $\sin5x+\sin3x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$.

(18) $5\sin x+2\cos x=0$.

(19) $a\sin x+b\cos^2\frac{x}{2}=0(a\neq0)$.

(20) $3\sin^2x-4\sin x\cdot\cos x+5\cos^2x=2$.

(21) $2\cos^2x=3\sin x$.

(22) $\sin^4x+\cos^4x=\frac{7}{8}$.

(23) $3\cos^3x+3\cos x\cdot\sin^2x+2\sin^2x=0$.

(24) $3\cos^3x+7\sin^2x\cos x=3$.

(25) $\sin x\cdot\sin3x=\frac{1}{2}$.

(26) $\cos3x\cdot\cos x=\cos7x\cdot\cos5x$.

(27) $\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=1+\sin2x$.

(28) $1+\sin x+\cos x+\sin2x+\cos2x=0$.

(29) $\operatorname{tg}x\cdot\cos x+\operatorname{tg}x=\cos x+1$.

(30) $1+\sin x+\cos3x=\cos x+\sin2x+\cos2x$.

(31) $2\cos2x-\sin2x=2(\sin x+\cos x)$.

(32) $\cos x+(2-\sqrt{3})\sin x=1$.

(33) $(\sin2x+\sqrt{3}\cos2x)^2-5=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$.

(34) $\sin^3x+\cos^3x=1-\frac{1}{2}\sin2x$.

(35) $\sin^4x+\cos^4x=2\sin^2x\cos^2x+\sin x\cdot\cos x$.

(36) $\sin2x-12(\sin x-\cos x)+12=0$.