湖南科技大学学术著作出版基金资助出版

插值系数有限元法超收敛分析

Superconvergence Analysis of Finite Element Methods with Interpolated Coefficients

熊之光 著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

本书由湖南科技大学学术著作出版基金资助

插值系数有限元法超收敛分析

熊之光　著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

内容简介

本书针对半线性微分方程中含有的非线性项 $f(u)$，在有限元计算中将插值 $I_h f(u_h)$ 代替 $f(u_h)$，从而得到一种简化的有限元法——插值系数有限元法. 同经典的有限元求解非线性微分方程相比，插值系数有限元法是一种高效而经济的算法. 本书用中国学派独创的单元正交分析法及其修正技术，系统地对多种半线性微分方程问题，研究了插值系数有限元的超收敛性，对其性质和相关结构做出比较完整的理论分析，为某些应用非线性微分方程的数值模拟和计算提供一种高精度的高效计算方法.

本书可供高等院校计算数学专业的师生以及科研人员和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

插值系数有限元法超收敛分析/熊之光著. 一南京：东南大学出版社，2015.7

ISBN 978-7-5641-5842-2

Ⅰ.①插… Ⅱ.①熊… Ⅲ.①半线性偏微方程—研究 Ⅳ.①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 135702 号

插值系数有限元法超收敛分析

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
责任编辑	陈潇潇
社　　址	南京市四牌楼 2 号
邮　　编	210096
经　　销	新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700 mm×1000 mm　1/16
印　　张	11
字　　数	200 千字
版　　次	2015 年 7 月第 1 版
印　　次	2015 年 7 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-5842-2
定　　价	36.00 元

* 本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话：025-83791830。

前　言

20 世纪 60 年代以来，中国、美国和西欧的计算数学学者们各自独立地发明了有限元法. 这是当代计算数学进展的里程碑，意义重大，影响深远. 中国学者独有的单元正交方法及其校正技术在有限元法的研究上取得了很大的成就. 本书的目的是试图向读者介绍解决一类非线性微分方程插值系数有限元方法及其超收敛性的理论研究成果. 全书分为十章.

第一章介绍了国际上研究此类问题已有的结果和进展，主要阐述插值系数有限元法的研究背景与现状.

第二章给出研究插值系数有限元所需的工具与引理，引入了 Legendre 正交展开和 M-拟正交展开的定义及相关性质等，介绍了单元分析法及其校正技术的基本思想.

第三章简单介绍常微分方程初值问题连续有限元法与间断有限元法，以及已有的利用单元正交逼近校正技巧证明其收敛性与超收敛性的主要成果.

以后几章是本书作者的主要研究内容：即将插值系数有限元法 ICFE 用于求解各种不同问题的收敛性和超收敛性.

第四章利用单元正交逼近校正技巧，研究解半线性常微分方程初值问题的超收敛性，并推导了其重构导数的强超收敛性. 随后把该方法用于研究一个非线性振动问题的振动频率，与常用的奇异摄动法相比，插值系数有限元法有更高的效益.

第五章研究求解半线性椭圆问题，首先给出了已有的两点边值问题的结果，然后分别研究了三角形二次元与任意矩形元的超收敛性，最后对这两种单元类型都给出了典型的数值例子.

第六章研究插值系数有限元求解半线性抛物初边值问题，对一维情形，分别研究了半离散和全离散格式的超收敛性，对二维情形则研究了半离散三角形元的任意次矩形元的超收敛性.

第七章研究了二维情形的半线性双曲问题的半离散和全离散插值系数有限元法，并利用较简洁的方法证明了它们的收敛性.

第八章针对非线性微分方程最优控制问题，研究了插值系数混合有限元方法，

获得了一种求解一类非线性最优控制问题简洁而高效的计算格式，并进行了相应的误差分析，拓展了插值系数混合有限元法在最优控制问题方面的研究与计算.

第九章针对一类半线性两点边值问题和半线性椭圆边值问题，研究了插值系数最小二乘混合有限元方法，并通过引进投影算子和对偶问题进行收敛性分析.

第十章介绍将插值系数思想用于非线性微分方程有限体积法研究，并研究了非线性常微分方程和两点边值问题插值系数有限体积元法及其收敛性.

为撰写本书，作者直接或间接引用了国内外较多文献的成果，非常感谢同行的研究和帮助. 作者在非线性微分方程插值系数有限元和有限体积元方面的研究工作先后得到了国家自然科学基金、中国博士后科研基金、湖南省自然科学基金、湖南省科技厅科技计划项目基金和湖南省教育厅科研基金的支持，特此致谢.

本书的最终出版得到了湖南科技大学学术出版基金的全额资助. 作者希望本书的出版有助于有限元方法用于非线性微分方程计算的研究，并促进其进一步的发展. 由于作者水平有限，书中难免会有不少疏漏之处，敬请读者批评指教.

熊之光

2014 年 12 月于湘潭

目　录

第一章 绪 论

§1.1 有限元方法及发展

有限元是科学与工程领域中应用最广泛的一种数值计算方法，它不但可以解决工程中的结构分析问题，而且也成功地解决了传热学、流体力学、电磁学和声学等领域的问题. 经过 60 多年的发展，有限元方法的理论已经相当完善，将有限元理论、计算机图形学和优化技术相结合，逐渐形成新的高效可靠的软件产品，它们已经成功地解决了国际工程领域众多大型科学和工程计算难题，包括物理、力学、化学等科学计算与大量工程设计计算，如机械、水工、土建、桥梁、机电、冶金、锻造、造船、宇航、核能、地震、物探、气象、水文、力学、电磁学等. 有限元软件已经成为推动科技进步和社会发展的生产力，并且取得了巨大的经济和社会效益.

有限元法首先是将连续的求解区域剖分为一组有限个单元，在每个单元内未知函数用低次多项式表示，在单元之间用节点上未知节点值连接，从而将一个连续的无限自由度问题变为离散的有限自由度问题. 用能量极小原则导出它们的一个方程组. 一经求解出这些未知量，就可以通过函数插值计算出各个单元函数的近似值. 显然，随着单元数量的增加，也即单元尺寸的减少，解的近似程度将不断改进. 对有限元作收敛性分析，是有限元法首先要研究的问题.

有限元法基本思想的提出，可以追溯到 Courant 在 1943 年的工作. 但由于当时没有计算机，未得到应有的重视和发展. 直到 1956 年，Turner，Clough 等人在分析飞机结构时，从力学角度再次提出此种分析思想，并命名为有限元法. 因此有限元法在工程设计中取得了巨大成功.

有限元法很快地引起了数学界的关注. 20 世纪六七十年代，一些数学家已对有限元的收敛性、稳定性和误差分析等方面，进行了卓有成效的研究，巩固了有限元法的数学基础. 应当提到我国数学家冯康[56]，他于 1964 年在国际上最早论证了有限元收敛性，为有限元理论的创立做出了突出的贡献.

从 20 世纪 80 年代开始，有限元理论与应用进入蓬勃发展时期，对现代科学技术的发展也提出了越来越高的要求. 其中最为突出的有：①计算规模超过百万至千

万个节点;②面对各种复杂的非线性问题. 为了解决这些困难,各国学者从多个方面做了巨大努力,也取得了重大进展. 例如,在解决规模巨大问题方面,创造了多网格法、区域分解法、预处理快速并行算法等;在解决高精度方面(提高精度也意味着可缩小计算规模),建立了超收敛与外推理论、后验误差估计等;在处理各种复杂问题方面,人们也提出了混合元、杂交元、非协调元、间断元等;在解决非线性问题方面,也取得了很大进展. 但面对复杂流动计算,却仍是困难重重. 解决各种复杂困难的非线性问题,可能是当代科学家、数学家、计算数学家永久的主题.

早在 1970 年前后人们就发现有限元解及其导数在某些点上有特别好的精度,称为超收敛. 以后提出多种方法和理论,得到丰富的结果. 1995 年芬兰召开有限元国际会议,Babuska 称超收敛是有限元的十大进展之一. 目前,国际上超收敛公认有三大学派,其中有中国学派的单元正交分析法. 对一般非线性问题,在一定条件下已经证明:非线性有限元具有与线性有限元相同的超收敛性. 对一类较特殊但应用很广泛的半线性问题,插值系数有限元是一种简单经济而有效的算法. 本书采用中国学派的研究方法,系统地研究了多种半线性问题插值系数有限元的超收敛性,给出了较完整的结果.

§1.2 插值系数有限元法的基本概念

为了定义插值系数有限元方法,先考察如下形式的半线性二阶椭圆问题

$$Au + f(u) = g(x) \text{ in } \Omega, u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{1.1}$$

其弱形式为寻求 $u \in H^1$ 满足

$$A(u,v) + (f(u),v) = (g(x),v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

其中,$\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 是边界为 Γ 的有界域,且双线性型 $A(u,v) = \int_\Omega (a_{ij}(x) D_i u D_j v + a(x) uv) \mathrm{d}x$ 是 S_0-强制的. 设 S^h 是 n 维有限元子空间,且 $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ 是它的一组基. 因此(1.1)的有限元解 $U \in S^h$ 可以表示为 $U(x) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x) U_j \in S^h$,再取 $v = \varphi_i, i = 1,2,\cdots,N$,则有

$$\sum_{j=1}^N A(\varphi_j,\varphi_i) U_j + \big(f(\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) U_j), \varphi_i\big) = (g,\varphi_i), i = 1,2,\cdots,N \tag{1.2}$$

当用 Newton 迭代法求解非线性方程组(1.2)时,每一次迭代,都必须计算它的切矩阵

$$[A(\varphi_j,\varphi_i)]_{N\times N} + \Big[\big(f'(\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) U_j) \varphi_j, \varphi_i\big)\Big]_{N\times N}$$

但这个切矩阵的计算却依赖于所选定的U值. 因此用 Newton 法求解(1.2)时,人们不得不多次计算这些切矩阵的值,其工作量是相当巨大的.

为了简化算法,可以采用一种朴实的思想,即直接对函数$f(U)$本身作插值$I_h f(U)$,用$I_h f(U(x))=\sum_{j=1}^{N}\varphi_j f(U_j)\in S_0^h$代替$f(U(x))$. 在$\Omega$上定义$n$次插值系数有限元$U$满足

$$\sum_{j=1}^{N}A(\varphi_j,\varphi_i)U_j+\sum_{j=1}^{N}f(U_j)(\varphi_j,\varphi_i)=(g,\varphi_i),i=1,2,\cdots,N. \tag{1.3}$$

用 Newton 迭代法求解非线性方程组(1.3)时,切矩阵为

$$[A(\varphi_j,\varphi_i)]_{N\times N}+[(\varphi_j,\varphi_i)]_{N\times N}\mathrm{diag}(f'(U_1),f'(U_2),\cdots,f'(U_N)).$$

其中,刚度矩阵$[A(\varphi_j,\varphi_i)]$与质量矩阵$[(\varphi_j,\varphi_i)]$可一次形成,而计算第二项只是简单的乘法. 因此迭代计算只是简单地在节点值U_j和$f(U_j)$之间完成,因此整个计算工作量将大大减少. 以上的方法即为插值系数有限元法.

还可以考虑更复杂一些的弱非线性抛物问题

$$\begin{cases}b(u)u_t-\nabla(a(u)\nabla u)+f(u)=g(x,t),(x,t)\in\mathbf{Q},\\ u=0,\text{在}\,\Gamma\,\text{上},u(x,0)=\varphi(x)\,\text{在}\,\Omega\,\text{上}.\end{cases} \tag{1.4}$$

这里要求$b(u)>0,a(u)>0$. 采用 Kirchihoff 变换

$$\alpha(u)=\int_0^u a(s)\mathrm{d}s,\beta(u)=\int_0^u b(s)\mathrm{d}s,$$

注意$\nabla(a(u)\nabla u)=\Delta a(u)$及$F(\omega)=f(\beta^{-1}(\omega))$,则此问题变为以下等价形式

$$\begin{cases}\omega_t-\Delta G(\omega)+F(\omega)=g(x,t),(x,t)\in\mathbf{Q}\\ \omega=0\,\text{在}\,\Gamma\,\text{上},\omega(0)=\phi(x)\equiv\beta(\varphi)\,\text{在}\,\Omega\,\text{上}.\end{cases} \tag{1.5}$$

利用插值系数有限元法,将它半离散化,即寻求$\omega(t)\in S_0^h$使

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left(m_{ij}\frac{\mathrm{d}\omega_j}{\mathrm{d}t}+k_{ij}G(\omega_j)+m_{ij}F(\omega_j)\right)=b_i(t),\\ \omega_j(0)=\psi_h(x_j),i=1,2,\cdots,N.\end{cases} \tag{1.6}$$

这里$\{m_{ij}\}$与$\{k_{ij}\}$分别是质量矩阵与刚度矩阵,它们都可以一次形成,并且与i没有关系. 用任何一种求解常微分方程初值问题的方法都可以求解此类问题.

§1.3 插值系数有限元法研究的发展状况

Zlamal[133,134]等在 1980 年首次提出上述的插值系数有限元法(Zienkien-wicz 也曾提出这种插值的思想),并成功应用于拟线性抛物问题. 他基于一个未证明的

相关的椭圆型有限元的最大模估计 $\max|u_h(x)|\leqslant C$,证明了分片线性的插值系数有限元的最佳阶收敛性估计 $\|u-u_h\|=O(h^2)$. 对半线性抛物问题,用三角形线性元空间离散化的半离散问题,S. Larsson, V. Thomee,张乃莹[74]于 1989 年证明了插值系数有限元 u_h 有误差估计

$$\|(u_h-u)(t)\|=O(h).$$

随后,陈传森,S. Larsson,张乃莹[38]对分片均匀三角形剖分情形使用超收敛技巧,并基于算子 A 的椭圆投影 R_hu 和插值 I_hu 所满足的超收敛估计式(比最佳阶低 1 阶)

$$\|I_hu(t)-R_hu(t)\|=O(h^2|\ln h|^{\frac{1}{2}}),$$

证明了几乎最佳阶收敛性估计

$$\|(u_h-u)(t)\|=O(h^2\ln h).$$

此后 10 年,对插值系数有限元的研究没有重要进展. 直到 2002 年,雷丹、陈传森[76]对一维半线性椭圆边值问题,证明了任意 n 次插值系数有限元的超收敛性. 陈传森、谢资清对非线性椭圆问题,讨论了插值系数法的一致收敛性[106]. 在一般地拟一致剖分下,n 次插值系数有限元 u_h 是否具有最佳阶收敛性 $\|(u_h-u)(t)\|=O(h^{n+1})$,至今尚不清楚. 对多维插值系数有限元 u_h,是否具有超收敛性质,还未研究,这也许是由于插值算子带来的困难所致. 总之,插值系数有限元确实是计算弱非线性问题的有效方法,但插值算子 I_h 在多大程度上保持着椭圆算子 R_h 所具有的收敛与超收敛性质,有待于进一步研究.

对于非线性椭圆问题,在多解的存在性理论基础上[5,20,17],陈传森、谢资清等首次提出了新的计算方法——搜索延拓法,并将其应用于多解逼近计算与激光传输数值模拟中[39,40,119,118]. 在他们的计算中,都采用了插值系数有限元法. 大量数值计算表明,插值系数有限元求解此类半线性问题非常有效.

第二章　基本理论工具

石钟慈院士为陈传森的著作《有限元超收敛构造理论》(2001 年)[35]作序,曾指出:“据国际著名有限元专家 I. Babuska 和 L. Wahlbin 在 2000 年 3 月美国 Berkeley 的研讨会上称:当今国际上超收敛研究有三大学派,即 Ithaca(美)、Texas(美)与中国,可见中国学者的存在与他们的工作已为世界公认. 陈传森教授早于 1978 年与捷克学者 M. Zlamal(1977 年)独立发现并提出单元分析法。经过中国学者的大量出色的工作,逐步奠定了中国学派的基础并形成自己的独特风格和方法体系”. 这表明在有限元超收敛性的研究中,陈传森教授提出的单元正交分析法是国际上重要的研究方法之一. 而单元上的几种正交展开是此法的重要基础. 本书对非线性微分方程问题的插值系数法超收敛性的研究也是基于单元分析法,而在一维区间上则主要采用了 Legendre 正交展开和 M-拟正交展开[35]. 本章先介绍这两种展开,然后给出它们的一些性质.

§2.1　两类基本正交展开

在参考单元 $E=[-1,1]$上定义内积与范数分别为

$$(u,v)=\int_{-1}^{1} uv\mathrm{d}t,\ \| u \| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$$

引进 Legendre 正交多项式

$$\begin{aligned}
l_0 &= 1,\\
l_1 &= t,\\
l_2 &= \frac{1}{2}(3t^2-1),\\
l_3 &= \frac{1}{2}(5t^3-3t),\\
l_4 &= \frac{1}{8}(35t^4-30t^2+3),\\
l_5 &= \frac{1}{8}(63t^5-70t^3+15t),
\end{aligned}$$

$$l_6=\frac{1}{16}(231t^6-315t^4+105t^2-5),$$

$$\cdots$$

其通式为

$$l_n=\frac{1}{2^n n!}\partial^n(t^2-1)^n, n=0,1,2,\cdots. \tag{2.1}$$

它们是 E 上的正交多项式族,其范数为

$$\| l_n \|_{0,E}=\sqrt{\frac{2}{2n+1}}, n=0,1,2,\cdots. \tag{2.2}$$

$n\geqslant 1$ 次 Legendre 多项式 $l_n(t)$ 在 E 内有 n 个相异的实零点 t'_j:$-1<t'_1<t'_2<\cdots<t'_n<1$,称为 n 阶 Gauss 点. 在 $t=\pm 1$ 上有 $l_n(\pm 1)=(\pm 1)^n$. n 阶 Legendre 多项式满足微分方程

$$(1-t^2)l''_n(t)-2tl'_n(t)+n(n+1)l_n(t)=0. \tag{2.3}$$

不同阶的 Legendre 多项式有以下的递推关系

$$(n+1)l_{n+1}(t)-(2n+1)tl_n(t)+nl_{n-1}(t)=0. \tag{2.4}$$

将 $l_n(t)$ 积分一次,导出另一个重要的 M-多项式族

$$M_0=1,$$

$$M_1=t,$$

$$M_2=\frac{1}{2}(t^2-1),$$

$$M_3=\frac{1}{2}(t^3-t),$$

$$M_4=\frac{1}{8}(5t^4-6t^2+1),$$

$$M_5=\frac{1}{8}(7t^5-10t^3+3t),$$

$$M_6=\frac{1}{16}(21t^6-35t^4+15t^2-1),$$

$$\cdots$$

其通式为

$$M_{n+1}=\int_{-1}^{1}l_n(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2^n n!}\partial^{n-1}(t^2-1)^n, n=0,1,2,\cdots. \tag{2.5}$$

n 次多项式 $M_n(t)$ 在 E 上有 n 个相异的实零点 t_j：$-1=t_1<t_2<t_3<\cdots<t_n=1$，称为 n 阶 Lobatto 点. 注意，当 $n\geqslant 2$ 时总有 $M_n(\pm 1)=0$. 多项式族$\{M_n\}$构成拟正交系，其内积

$$(M_i,M_j)\begin{cases}\text{非零，当 } i-j=0,\pm 2 \text{ 时；}\\ =0,\text{其他 } i,j.\end{cases} \tag{2.6}$$

将微分方程(2.3)写为$(n+1)nl_n(t)=-((1-t^2)l_n'(t))'$，两边对 t 积分并注意 $M_{n+1}(\pm 1)=0$，得到

$$(n+1)nM_{n+1}(t)=-(1-t^2)l_n'(t). \tag{2.7}$$

因此 $n+1$ 阶 Lobatto 点是由两个端点 $t=\pm 1$ 及 $n-1$ 次多项式 $l_n'(t)$的零点组成的. 此外，对式(2.4)进行积分，并注意到等式

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} tl_n(t)\mathrm{d}t &= tM_{n+1}(t)-\int_{-1}^{1} M_{n+1}(t)\mathrm{d}t\\ &=tM_{n+1}(t)-\frac{1}{2n+1}(M_{n+2}(t)-M_n(t)),\end{aligned}$$

可得到以下递推关系

$$(n+2)M_{n+2}(t)-(2n+1)tM_{n+1}(t)+(n-1)M_n(t)=0.$$

为了清楚起见，可以将 n 阶 Gauss 点及 Lobatto 点的数值列于表 2.1 中. 它们不仅在数值求积中，而且在有限元超收敛的研究中，都起着非常重要的作用.

表 2.1　Lobatto 点与 Gauss 点数值

n 次	Lobatto 点 t_j	Gauss 点 t_j'
1		0
2	±1	±0.577 35,02 692
3	±1,0	0,±0.774 59,66 692
4	±1	±0.339 98,14 436
	±0.447 21,35 955	±0.861 13,63 116
5	±1,0	0,±0.538 46,93 101
	±0.654 65,36 707	±0.906 17,98 459
6	±1	±0.238 61,91 861
	±0.765 05,53 239	±0.661 20,93 865
	±0.285 23,15 164	±0.932 46,95 142

§2.2 正交展开的基本性质

在标准单元 $\tau=(-h,h)$ 上用坐标变换 $x=ht\in\tau, t\in(-1,1)$，对适当光滑的 $u(x)$ 可变为 $u(x)=u(ht)$，因此 $\partial_t^i u(ht)=h^i D_x^i u(x)=O(h^i)$. 即对 t 求导 i 次，则变为对 x 求导时，前面出现了小因子 h^i，这个以后会多次利用，不再予以说明.

为了分析需要，我们采用标准 Sobolev 空间[102]

$$W^{k,p}(\Omega)=\{u \mid \partial^\alpha u\in L^p(\Omega), \forall \mid \alpha\mid\leqslant k\},$$

并赋予范数

$$\|u\|_{k,p,\Omega}=\Big(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant k}\mid\partial^\alpha u\mid^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}, 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|u\|_{k,\infty,\Omega}=\max_{|\alpha|\leqslant k}\{ess\sup_{x\in\Omega}\mid\partial^\alpha u(x)\mid\}.$$

若 $p=2$，则 $W^{k,2}(\Omega)$ 简记为 $H^k(\Omega)$，$\|u\|_{k,2,\Omega}$ 简记为 $\|u\|_{k,\Omega}$.

对任意适当光滑的函数 $f(t)$，由多次分部积分可得

$$\int_{-1}^1 f\partial^n(t^2-1)^n\mathrm{d}t=(-1)^j\int_{-1}^1\partial^j f\partial^{n-j}(t^2-1)^n\mathrm{d}t, 0\leqslant j\leqslant n. \tag{2.8}$$

因此，若 $f\in P_{n-1}$ 是 $n-1$ 次多项式，当 $j=n$ 时，上式变为 0，即 n 次 Legendre 多项式与任何 P_{n-1} 正交. 而对任何函数 $f\in W^{j,1}(E)$，由(2.8)可推出以下重要的估计式

$$\mid(f,l_n)\mid\leqslant C_{nj}\int_{-1}^1\mid\partial^j f(t)\mid\mathrm{d}t, 0\leqslant j\leqslant n. \tag{2.9}$$

其中，常数 C_{nj} 仅与 n,j 有关，而与 f 无关.

任何平方可积函数 $f\in L^2(E)$ 可以展开为 Legendre 多项式级数

$$f(t)=\sum_{j=0}^\infty\alpha_j l_j(t), \alpha=\Big(j+\frac{1}{2}\Big)(f,l_j), \tag{2.10}$$

并有 Parseval 等式

$$\int_{-1}^1 f^2(t)\mathrm{d}t=\sum_{j=0}^\infty\frac{2}{2j+1}\alpha_j^2.$$

其实，等式(2.10)对任何 $f\in L^p(E), 1<p\leqslant\infty$ 都是有意义的. 在我们的分析中，还需要 M-型展开.

引理 2.1[35] 若 $f(t)\in W^{n+1,p}(E), n\geqslant1, 1\leqslant p\leqslant\infty$，则有 n 次多项式

$$f_n(t)=\sum_{j=0}^n b_j M_j(t), \tag{2.11}$$

$$b_0, b_1 = \frac{1}{2}[f(1) \pm f(-1)],$$

$$b_j = \left(j - \frac{1}{2}\right)(\partial_t f, f_{j-1}), j = 1,2,3,\cdots,$$

使得余项 $R_n = f - f_n$ 有如下性质：

①$R_n(\pm 1) = 0$；

②$\partial_t R_n(t) \perp P_{n-1}$ 及 $R_n \perp P_{n-2}$；

③对 $0 \leqslant \alpha \leqslant n$ 及任何 $1 \leqslant q, p \leqslant \infty$，有估计式

$$\| \partial^\alpha R(t) \|_{0,q,E} \leqslant C \| \partial^\beta f \|_{0,p,E}, \alpha + 1 \leqslant \beta \leqslant n+1.$$

证明　将导数 $\partial_t f$ 在 E 上展开为 Legendre 多项式级数

$$\partial_t f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j l_{j-1}(t). \tag{2.12}$$

其中 Fourier 系数 b_j 有估计式

$$| b_j | \leqslant C \| \partial^\beta f \|_{0,1,E}, 1 < \beta < j.$$

对式(2.12)进行积分，又可以得到

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j M_j(t), \tag{2.13}$$

其中，b_0 是待定常数. 在一维情形中，空间 $W^{1,1}(E)$ 可嵌入到连续函数空间 $C(E)$，因此节点值 $f(\pm 1)$ 是有意义的. 为了使部分和 $f_n(\pm 1) = f(\pm 1)$，并注意到当 $j \geqslant 2$ 时 $M_j(\pm 1) = 0$，只要取 b_0 满足

$$f(1) = b_0 + b_1, f(-1) = b_0 - b_1.$$

由于 $b_1 = \frac{1}{2}(\partial f, l_0) = \frac{1}{2}[f(1) - f(-1)]$，可知 $b_0 = \frac{1}{2}[f(1) + f(-1)]$. 在这种选取之下，余项 $R_n(\pm 1) = 0$.

其次讨论余项 R_n 的正交性. 首先对 $i \leqslant n-1$ 次多项式 $l_i(t)$ 有

$$\begin{aligned}(\partial R_n, l_i) &= (\partial f, l_i) - \sum_{j=1}^{n} b_j (l_{j-1}, l_i) \\ &= (\partial f, l_i) - b_{i+1}(l_i, l_i) = 0,\end{aligned}$$

即 $\partial_t R \perp P_{n-1}$. 对 $i \leqslant n-1$，由分部积分知

$$(R_n, \partial l_i) = R_n l_i |_{-1}^{1} - (\partial R_n, l_i) = 0.$$

可得 $R_n \perp P_{n-2}$.

为证明第 3 个结论，将余项 $\partial^\alpha R_n$ 看做是 f 的一个线性泛函 $\partial^\alpha R_n = l(f)$.

$$\partial^\alpha R_n(t)=l(f)=\partial^\alpha f-\sum_{j=1}^{n}b_j\partial^\alpha M_j(t).$$

由于在一维情形中，$W^{1+\alpha,1}(E)$可嵌入到连续可微空间 $C^\alpha(E)$，函数$\partial^\alpha f$ 及系数 b_j 皆可用范数 $\|f\|_{\beta,p,E}$估计，故$|\partial^\alpha R_n(t)|\leqslant C\|f\|_{\beta,p,E}$. 另一方面，当 f 是$\beta-1$ 次多项式时($\beta-1\leqslant n$)，显然有 $R_n(t)=0$. 因此由著名的 Bramble-Hilbert 引理[14,15]可以得到所需的估计$|\partial^\alpha R_n(t)|\leqslant C\|\partial^\beta f\|_{0,p,E}$. 引理得证.

在有限元超收敛的研究中，我们有时也把余项写为无穷级数形式，因为它们的正交性质可由其结构明显看出：

$$R_n(t)=\sum_{j=n+1}^{\infty}b_jM_j(t)\perp P_{n-2},$$
$$\partial_t R_n(t)=\sum_{j=n}^{\infty}b_{j+1}l_j(t)\perp P_{n-1}. \tag{2.14}$$

其中，主要的项 $b_{j+1}M_{n+1}(t)$及 $b_{n+1}l_n(t)$将起着特别重要的作用. 由此可以看到，利用单元正交展开方法，由函数 $f\in W^{1,1}(E)$可得到一个相应的 n 次多项式 f_n，它确定了一个从 $W^{1,1}(E)$到 $P_n(E)$的单元(局部)投影算子 Q_n：

$$f_n=Q_nf=\sum_{j=1}^{n}b_jM_j(t) \tag{2.15}$$

对于该算子 Q_n，有以下精致的性质.

引理 2.2[35]　在 E 上的投影算子 Q_n 是$C(E)$上的有界算子. 则有

$$\|Q_n\|_{C(E)}\leqslant C_n\|f\|_{C(E)}. \tag{2.16}$$

证明　首先写出

$$b_0=\frac{1}{2}[f(1)+f(-1)],$$
$$b_1=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f_t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)].$$

利用分部积分还可以改写 b_j 为

$$b_j=\left(j-\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}f_t(t)l_{j-1}(t)\mathrm{d}t=$$
$$\left(j-\frac{1}{2}\right)\left[f(t)l_{j-1}|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}f(t)l'_{j-1}(t)\mathrm{d}t\right],j\geqslant 2.$$

因此，对所有系数 b_j 都有估计

$$|b_j|\leqslant C_n(\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|f(t)|+\int_{-1}^{1}|f(t)|\mathrm{d}t)$$