《著名重点中学各科学习指导与测试》

高中立体几何

潘慰高　主编

尤小平　吴祥华　编

南京大学出版社

著名重点中学各科学习指导与测试

高中立体几何

主编　潘慰高
编著　尤小平
　　　吴祥华

南京大学出版社

1996・南京

著名重点中学各科学习指导与测试

高 中 立 体 几 何

潘慰高　主编

尤小平　吴祥华　编写

*

南京大学出版社出版

(南京大学校内　邮编 210008)

江苏省新华书店发行　　丹阳兴华印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 7.375　　字数 165 千

1994 年 5 月第 1 版　　1996 年 5 月第 3 次印刷

印数 9001 — 19000

ISBN 7-305-02211-X/O·139

定价 5.80 元

(南大版图书若有印、装错误可向承印厂退换)

出版说明

为了帮助中学生学好基础知识，掌握基本的技能技巧，训练思维方法，提高解题能力，我社组织了南京师范大学附中、金陵中学等著名重点中学的特级教师、高级教师，编写了这套"著名重点中学各科学习指导与测试"丛书，它包括初高中语文、英语、数学、物理、化学五个学科。

本丛书紧扣教材，每一节分三个部分：第一部分为知识要点，提纲挈领，突出重点要点，对复习起指导作用；第二部分为学习指导，通过典型例题的分析评述，着重指导解题的思想与方法，提高解题的技能技巧，加强对基础知识和基本技能的训练，以提高学生解题的自觉性、科学性、技巧性；第三部分为练习与测试，供学生用以训练、巩固和提高基本知识、基本技能和基本方法。

本丛书的作者们有厚实的业务基础，丰富的教学经验，培养了一批又一批基础扎实、思维敏捷、作风过硬、能力卓著的优秀学生，在国内享有较高声誉。本丛书是他们数十年经验的总结，智慧的结晶，相信本丛书是广大中学生的良师益友，对指导学习、锻炼思维、提高分析解题能力，掌握基本的知识体系是大有裨益的。

南京大学出版社

目　录

第一章　直线和平面

本章的主要内容是研究空间的直线和直线、直线和平面、平面和平面的位置关系，以及有关图形的画法，其中空间的直线和直线、直线和平面、平面和平面的平行与垂直的性质定理与判定定理是这一章的中心问题。学习时，首先要理解这些概念的含义及特征；其次要明确立体几何是平面几何的发展，点引伸成线，线扩展成面，它们之间有很多类似的性质，因此要善于类比，区别它们之间的异同；第三要善于把空间问题转化为平面问题，用平面几何知识来解决；最后还要能正确画出空间直线和平面位置关系的直观图，提高对图形的识别能力，借助图形，探索解题途径。

一、平　　面

（一）知识要点

1．平面的概念与平面的画法。

2．平面的基本性质（三个公理及公理3的三个推论）

3．水平放置的平面图形的直观图的画法。

（二）学习指导

1．学习要求

（1）理解平面的概念，掌握平面的画法。

（2）牢固掌握平面的基本性质，并注意这些性质在解题

中的应用。

(3) 会用斜二测的画法画水平放置的平面图形(特别是正三角形、正四边形、正五边形、正六边形)的直观图。

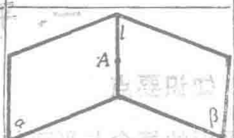
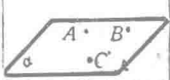
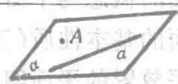
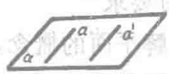
2．平面是一个只描述而不定义的原始概念，它是从我们日常见到的桌面、黑板面、平静的水面等一些物体抽象出来的，几何里的平面是无限延伸的。

3．立体几何中，通常画一个平行四边形表示平面。但是，应注意到：

(1) 所画的平行四边形是表示它所在的整个平面，需要时，我们可以把它扩展出去，这同画直线一样，直线是可以无限延伸的，但在画图时，却只能画一段来表示直线。

(2) 画表示水平平面的平行四边形时，通常把它的锐角

表 1-1

<table>
<tr><th>名称</th><th colspan="2">内　　容</th><th>图　　形</th><th>作　用</th></tr>
<tr><td>公理一</td><td colspan="2">若点$A\in$直线l，又点$B\in l$且$A\in$平面α，$B\in$平面α，则$l\subset$平面α</td><td></td><td>判断直线在平面内</td></tr>
<tr><td>公理二</td><td colspan="2">若$A\in$平面α，$A\in$平面β，则平面$\alpha\cap$平面$\beta=l$且$A\in l$</td><td></td><td>证明两平面相交和点共线、线共点</td></tr>
<tr><td rowspan="3">公理三</td><td rowspan="3">若A、B、C三点不共线，则该三点可确定一个平面α
</td><td>若$A\notin$直线a，则A，a确定一个平面</td><td></td><td rowspan="3">确定平面及判定两个平面重合的依据</td></tr>
<tr><td>若直线$a\cap$直线$a'=A$，则a和a'确定一个平面</td><td></td></tr>
<tr><td>若直线$a\parallel$直线a'，则a和a'确定一个平面</td><td></td></tr>
</table>

画成45°，横边画成邻边的两倍。

(3) 根据需要，有时也可以用其它平面图形(如三角形、圆及其它的封闭曲线)表示平面。

4. 平面的三个基本性质是立体几何的理论基础，其主要内容和作用可归纳为表 1-1。

5. 公理 3 中，"有一个"是说明图形的存在性，"只有一个"是指图形的唯一性，不能用"只有一个"代替"有且只有一个"，遇到证明"有且只有一个"的问题时，需证明"存在"和"唯一"两个方面。

例 1 若不共点的四条直线两两相交，那么这四条直线在一个平面内。

证明 满足题意的四直线 a、b、c、d 的相互位置关系有两种情况。

1° 任何三条直线不过同一点(图 1-1(1))。

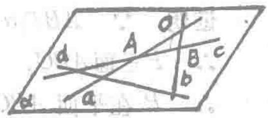


图 1-1(1)

设 $a\cap b=O$，则 a、b 确定平面 α。

$\because\ a\cap c=A,\ A\in a,\ \therefore\ A\in\alpha,$

$b\cap c=B,\ B\in b,\ \therefore\ B\in\alpha,$

$\therefore\ AB\subset\alpha$，即 $c\subset\alpha$，同理 $d\subset\alpha$。

$\therefore$ a、b、c、d 在同一平面 α 内。

2° 有三直线 a、b、c 交于一点 O (如图 1-1(2))。

$\because\ a\cap d=A$，$\therefore$ a、d 确定一个平面 α。$\because\ b\cap d=B,\ B\in d,\ \therefore\ B\in\alpha$。

$b\cap a=O,\ O\in a,\ \therefore\ O\in\alpha$。

$\therefore\ OB\subset\alpha$，即 $b\subset\alpha$，同理 $c\subset\alpha$。

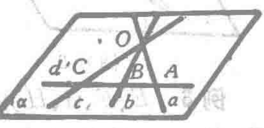


图 1-1(2)

$\therefore$ a、b、c、d 在同一平面

α 内。

评析 ① 证明几个点或几条直线共面的方法有：(i) 先根据确定平面的条件利用部分已知元素作出一个平面，再证明其余有关的点和线在这个平面内；(ii) 分别过已知元素(点线)作多个平面，再证明这些平面重合。

② 解立体几何问题，在论证时，应考虑全面，以免疏漏某些可能产生的情况，导致论证不严密。如本题不共点的四条直线两两相交，可分为两种情况，即有三条直线共点和无三条直线共点。

例 2 已知：$\triangle ABC$ 在平面 α 外，它的三边所在的直线分别交平面 α 于 P、Q、R (如图 1-2)。求证：P、Q、R 三点共线。

证明 $\because$ $AB\cap\alpha=P$，$AB\subset$面 ABC，

$\therefore$ $P\in$面ABC，　又 $P\in\alpha$。

$\therefore$ P 在平面 ABC 和平面 α 的交线上。

同理可得：Q、R 均在面 ABC 和面 α 的交线上。

$\therefore$ P、Q、R 三点共线。

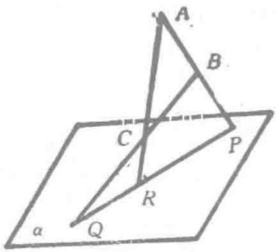


图 1-2

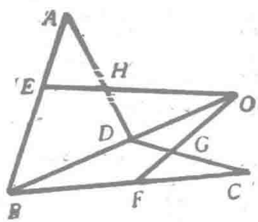


图 1-3

例 3 E、F、G、H分别是空间四边形 $ABCD$ 中 AB、BC、CD、CA边上的点，若EH和FG相交(如图 1-3)，求证：EH、FG、BD 三线共点。

证明 设 $EH\cap FG=O$。

则 $O\in EH, O\in FG$。

$\because$ $EH\subset$ 面 ABD, $FG\subset$ 面 ADC,

$\therefore$ $O\in$ 面 ABD, $O\in$ 面 ADC。

$\therefore$ O 在面 ABD 和面 ADC 的交线上，即 $O\in BD$。

$\therefore EH$、FG、BD 共点 O。

评析 根据公理二，如果两个平面相交于直线 l，且点 P 是这两个平面的公共点，则点 P 在交线 l 上。这是证明空间点共线、线共点的依据。

（三）测试题 1-1

一、选择题

1．过空间不共面的四点中每三点作一平面，共可作平面（　　）。

（A）1个　　（B）2个　　（C）4个　　（D）6个

2．空间四条直线相交于一点，过其中每两条直线作一平面，最多可作平面（　　）。

（A）1个　　（B）2个　　（C）4个　　（D）6个

3．首尾相接的四条线段 AB、BC、CD、DA 组成平面四边形的条件是（　　）。

（A）$\angle ABC+\angle CDA=180°$

（B）$AB+CD=BC+DA$

（C）$AB+CD=AC+BD$

（D）$AC\cap BD\neq\phi$

4．下列各条件中能确定一个平面是：(1) 一直线和一点；(2) 两条平行线和线外一点；(3) 和同一直线都相交的两条直线；(4) 两两相交且不共点的三条直线（　　）。

(A) (1)　(B) (2)　(C) (3)　(D) (4)

5. 根据以下所给条件：(1) 三条直线两两相交；(2) 三条直线两两平行；(3) 三条直线共点；(4) 三条直线中有两条平行。其中不能确定三条直线共面的有（　）个。

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

6. 在空间四边形 $ABCD$ 各边 AB、BC、CD、DA 上分别取 E、F、G、H 四点，如果 EF、GH 交于一点 P，则（　）。

(A) P 一定在直线 BD 上

(B) P 一定在直线 AC 上

(C) P 在直线 AC 或 BD 上

(D) P 既不在直线 BD 上，也不在直线 AC 上

7. 设 A、B、C、D 为空间四点，线段 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 P、Q、R、S，则 (1) P、Q、R、S 四点共面，(2) PR 与 QS 互相平分，(3) 当 $AC=BD$ 时，$PQRS$ 是一个菱形（　）。

(A) 仅(1)是正确的

(B) 仅(1)与(3)是正确的

(C) 仅(1)和(2)是正确的

(D) 以上结论均不对

8. 三个互不重合的平面，把空间分成 n 部分，则 n 的所有可能值为（　）。

(A) 4, 6, 7　(B) 4, 5, 6, 7

(C) 4, 7, 8　(D) 4, 6, 7, 8

二、填空

9. 三条互相平行的直线，最多可以确定____个平面；四条共点的直线最多可以确定____个平面。

10. 一条直线过平面内一点与平面外一点，它和这平面

有____个公共点。

11．平面$\alpha\cap$平面$\beta=l$，点$A\in\alpha$，点$B\in\beta$，$A\notin l$，$B\notin l$，$C\in l$，过A、B、C确定平面γ，则$\alpha\cap\gamma=$____，$\beta\cap\gamma=$____。

12．如图1-4，平面ABC和平面DEF的交点有____个。

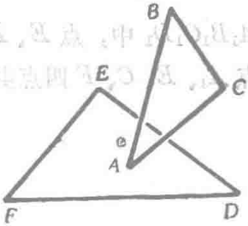


图 1-4

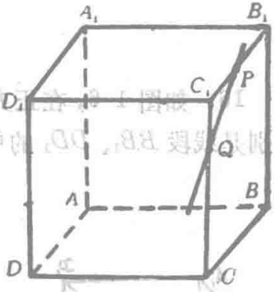


图 1-5

13．如图1-5，P、Q分别为正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的棱C_1B_1、CC_1上的点(P、Q异于C_1、B_1、C点)，则直线PQ除与棱C_1B_1、CC_1相交外，还必与棱__所在直线相交。

14．四个平面至少可以将空间分成____个部分，最多可以将空间分成____个部分。

三、解答题

15．证明：若一直线与三条平行直线相交，则此四条直线共面(要求先画图形，然后按图中字母写出已知和求证)。

16．如图 1-6，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E、F 分别是线段 BB_1、DD_1 的中点，求证：点 A_1、E、C、F 四点共面。

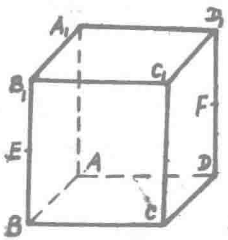
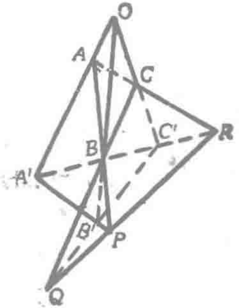


图 1-6

17．如图，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 不在同一平面内，直线 AA'、BB'、CC' 两两相交，求证：(1) 它们相交于同一点；(2) 直线 AB 与 $A'B'$，BC 与 $B'C'$，CA 与 $C'A'$ 分别交于 P、Q、R，求证：P、Q、R 三点共线。



四、选做题

18. 已知：三个平面 α、β、γ 两两相交，有三条交线 a、b、c。

(1) 若 $a \cap b = P$，求证：a、b、c 三线共点。

(2) 若 $a \parallel b$，试用(1)的结论及反证法证明 a、b、c 三条直线互相平行。

19．两个不全等的三角形不在同一平面内，它们的边两两对应平行，证明：(1) 三条对应顶点的连线相交于一点；(2) 这两个三角形相似．

(二) 空间两条直线

(一) 知识要点

1．两条直线的位置关系．

2．平行于同一条直线的两条直线平行．(平行直线的传递性)

3．等角定理。

4．异面直线所成的角，两条异面直线互相垂直的概念，异面直线的公垂线及距离。

（二）学习指导

1．学习要求

（1）掌握空间两条不重合直线的位置关系及异面直线的概念，能利用异面直线的定义和定理："平面内一点与平面外一点的连线，和平面内不经过该点的直线是异面直线"，证明空间两直线是异面直线。

（2）掌握平行公理和等角定理："对应边平行且方向相同的两个角相等"，并注意上述两定理在证明两直线平行和两个角相等中的应用。

（3）掌握两异面直线所成角的定义和两异面直线之间距离的定义，并能利用定义求出两异面直线所成角的大小和两异面直线之间的距离（对两异面直线的距离，只要求会计算已给出公垂线时的距离）。

2．异面直线是指"不同在任何一个平面内的两条直线"，"不同在任何一个平面内"应理解为"经过两条直线不可能作出一个平面"，而不能误解为"分别位于两个不同平面内的两

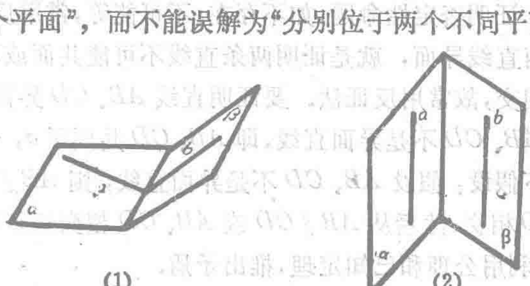
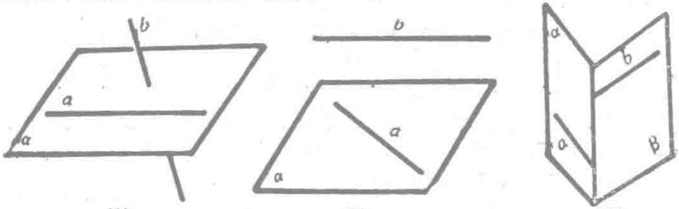


图 1-7

条直线”，分别在某两个平面内的两条直线，不一定是异面直线，它们可能是相交直线，如图 1-7(1)，也可能是平行直线，如图1-7(2)。

3. 画异面直线时，以辅助平面作衬托，可使两直线不共面的特点显示得更清楚，如图1-8(1)、(2)、(3)，否则就会分不清是不是异面直线了，如图 1-9。



(1)　　(2)　　(3)

图 1-8

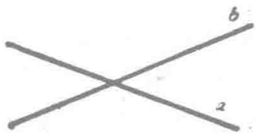


图 1-9

4. 证明两条直线为异面直线主要有以下两种方法：

(1) 证明否定性命题，如不存在、不可能等，常用反证法。而证明两直线异面，就是证明两条直线不可能共面或不可能平行和相交，故常用反证法。要证明直线 AB、CD 异面，首先可假设 AB、CD 不是异面直线，即 AB、CD 共面于 α，……也可作如下假设：假设 AB、CD 不是异面直线，则 $AB \parallel CD$ 或 AB 与 CD 相交，然后从 $AB \parallel CD$ 或 AB、CD 相交这些临时假设出发，利用公理和已知定理，推出矛盾。

(2) 用“过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不