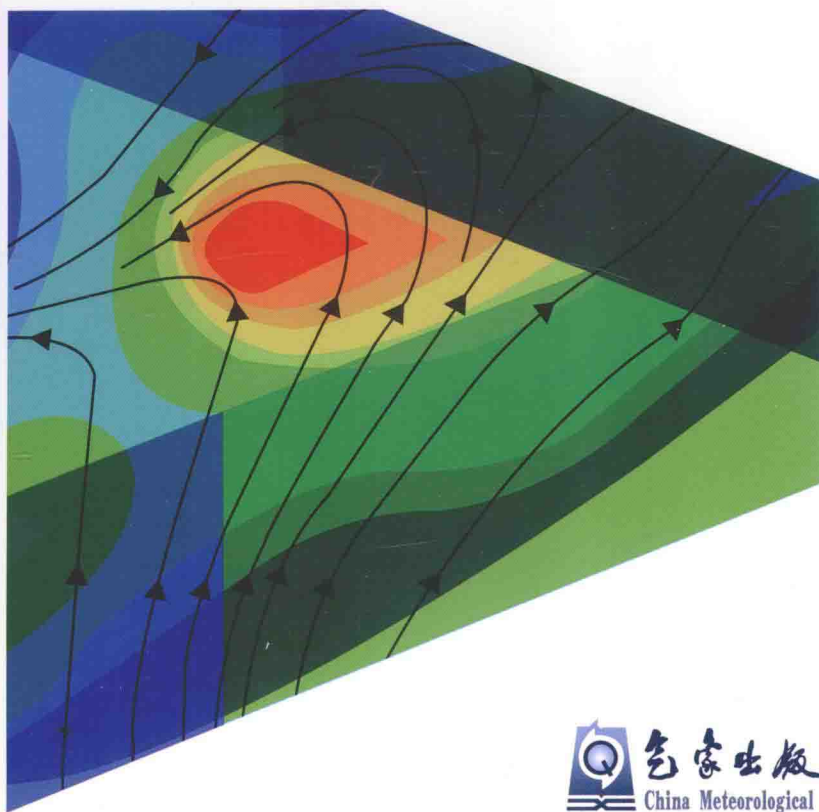


大气中尺度动力学基础 & 暴雨动力预报方法

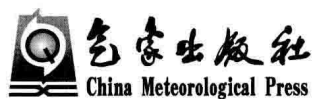
高守亭 冉令坤 李小凡 著



气象出版社
China Meteorological Press

大气中尺度动力学基础及 暴雨动力预报方法

高守亭 冉令坤 李小凡 著



内 容 简 介

本书给出了中尺度系统的运动方程组,提出了中尺度运动的动力学参数和广义锋生理论;在非均匀饱和湿空气概念的基础上,给出了广义位温,实现了干位温和饱和湿空气相当位温的无缝链接。在位涡的基础上,发展了二阶位涡理论和中尺度系统的平衡方程;在标量场理论的基础上,发展了暴雨动力预报方法;在矢量场理论的基础上,发展了对流涡度矢量预报方法、动力涡度矢量预报方法及非地转 Q 矢量动力预报方法;通过发展多个具有物理意义明确且能反映暴雨发生信息的动力因子,给出了集合暴雨动力预报方法,使理论研究与实际暴雨预报紧密结合。本书不仅为天气预报人员和大气科学领域科技人员的理论提高和业务应用提供了重要的工具和理论方法,也可作为相关院校大气科学学科研究生教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

大气中尺度动力学基础及暴雨动力预报方法/高守亭,冉令坤,李小凡著.

—北京:气象出版社,2015.9

ISBN 978-7-5029-6177-0

I. ①大… II. ①高…②冉…③李… III. ①中尺度—大气动力学—研究
②暴雨预报—研究 IV. ①P433②P457.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第186291号

Daqi Zhongchidu Donglixue Jichu ji Baoyu Dongli Yubao Fangfa 大气中尺度动力学基础及暴雨动力预报方法

高守亭 冉令坤 李小凡 著

出版发行:气象出版社

地 址:北京市海淀区中关村南大街46号

总 编 室:010-68407112

网 址: <http://www.qxchs.com>

责任编辑:李太宇

封面设计:易普锐创意

印 刷:北京京科印刷有限公司

开 本:710 mm×1000 mm 1/16

字 数:430千字

版 次:2015年9月第1版

定 价:65.00元

邮政编码:100081

发 行 部:010-68409198

E-mail: qxchs@cma.gov.cn

终 审:邵俊年

责任技编:赵相宁

彩 插:2

印 张:21.5

印 次:2015年9月第1次印刷

前 言

《大气中尺度动力学基础及暴雨动力预报方法》是一部学术专著,也是一部中尺度天气动力学的研究生教材。该书在我们 2007 年出版的《大气中尺度运动的动力学基础及预报方法》的基础上,将近几年的我们作者及我的学生的部分研究新成果扩充其中,集中反映了我毕生在教学和研究中的有关中尺度动力学和暴雨预报方法上的成果,是作者们多年来有关中尺度理论追求和探索的概述。

这些成果的取得,要感谢我的导师陶诗言先生对我的指导和培养,感谢老一辈科学家叶笃正、曾庆存、周秀骥、伍荣生、丑纪范、陈联寿、李泽椿以及黄荣辉、吴国雄、李崇银、丁一汇、吕达仁、徐祥德等先生对我科研工作的支持和关心。刘式达、刘式适等先生的相关动力学理论研究成果,给予了我不少启迪。我的老同学许秦教授长期同我合作,以各种形式讨论问题,使我受益匪浅。陈秋士教授近几年来协助我带研究生,把他对物理过程分解的思想和方法带到了我的研究当中。曾与我合作过的王兴荣研究员关于非均匀饱和湿大气的观点对我也有很大启发,在此一并表示衷心的感谢。我也特别感谢寿绍文、孙淑清、洪钟祥、杨培才和万军教授对我学习和工作的支持。

本书共分 15 章。第 1 章论述了大气基本普适动力参数及其意义,着重讨论了魏萨拉频率和里查森数的物理意义。第 2 章从正压和斜压的基本方程组出发,结合中尺度的特征得到中尺度动力学基本方程组,推导了中尺度位涡方程、位涡物质方程。第 3 章主要介绍了风场的性质,包括流线和迹线、流函数和势函数以及风的显示表达。第 4 章主要介绍了涡度方程及平流涡度方程,涡度的“冻结”性质,流线涡和螺旋度。第 5 章介绍了散度、不同形式的散度方程及位势散度。第 6 章介绍了总变形及变形方程,填补了以往没有变形方程的空白;同时介绍了变形场与涡度场、散度场之间的相互作用。第 7 章介绍了表示水汽的有关物理量,特别提出了非均匀饱和大气中的广义位温,并证明了

它的守恒性,为暴雨落区预报奠定了理论基础。第8章介绍了位涡概念及位涡倾向方程,发展了二阶位涡及广义湿位涡,并论证了热力质量强迫下的湿位涡异常及其不可渗透性原理等。第9章介绍了广义标量锋生函数,非均匀饱和湿大气中的广义标量锋生以及锋生函数倾向的研究。第10章介绍了重力波的控制方程、三维惯性重力波和对称惯性重力波的波动特征、极化性质和波作用量方程,并简要地介绍了如何从资料中识别重力波的分析方法。第11章介绍了平衡方程与非平衡方程的定义,中尺度平衡方程及其非平衡方程以及相关的位涡反演技术。第12章通过对稳定性的分类和一些基本分析方法的简要介绍,论述了中尺度的静力不稳定、对称不稳定、切变不稳定等几类常见的不稳定分析方法。第13章基于标量场理论的动力预报方法,着眼于研究涡度、散度及变形和其他因素结合而成的如位涡、湿位涡以及广义湿位涡等新标量的临近预报意义,用到了大城市夏季的高温高湿天气的识别与预测、气旋移动的追踪与预报、暴雨落区预报、强降水预报等领域。第14章阐述了对流涡度矢量、动力涡度矢量、非均匀饱和湿大气中非地转 Q 矢量、 E 矢量、波作用矢量等新的矢量场理论及其动力预报方法。第15章介绍了几种动力因子,以及集合动力因子暴雨预报方法及其应用。

本书写作特色之一是,力求对中尺度动力学知识从理论上加以认识深化,使基本概念阐述清晰,在理论上尽量反映新的研究成果;同时,书中各章节也反映了作者自己的研究特色与著作风格,力求具有学术价值的创新性,经得住国际同行的比较。在内容上,书中加强了近来长时间没有受到足够重视而为中尺度动力学发展所依赖的理论,如非均匀饱和湿大气的广义湿位涡理论、对流涡度矢量理论、二阶位涡、波作用守恒、中尺度平衡方程及广义锋生理论等,旨在为湿大气过程的研究奠定理论基础并开辟新方法。书中加强了重力波的分析方法,还创造性地提出了一些在动力预报中将发挥显著作用的新矢量等等。本书的另一写作特色在于理论知识与实际预报应用相结合,特别介绍了具有理论基础的集合动力因子暴雨预报方法。该方法已在全国不少地区使用,使理论同实际紧密联系。这本书的部分内容还在中国科学院大学、浙江大学、成都信息工程大学多次讲授过。

本书的写作目的在于:把我多年来在教学和研究中的成果奉献给读者,拓宽

和深化中尺度研究领域的内容,希望与读者在学术思路方面互相启发,互相交流,促进中尺度研究的进一步发展。由于作者研究水平的局限性,书中不足之处在所难免,请读者给予指正。

本著作主要是在中国科学院重点部属项目(项目号:KZZD-EW-05-01)、973项目(项目号:2012CB417201、2013CB430105)的资助下得以完成的。在写作过程中,冉令坤、李小凡对本书部分内容的写作做出了贡献,我的学生崔晓鹏、平凡、周玉淑、杨帅、周非凡、陆慧娟、曹洁、李娜和孙石沿高工以及博士生王成鑫、刘璐、张哲、李驰钦等做了许多具体工作,在此深表感谢。同时,我也要感谢我的夫人盛蓉玉长期以来对我生活和工作的无私支持。最后,对大力支持和关心本书完稿的各有关单位和个人,特别是中国科学院、中国科学院大气物理研究所、国家自然科学基金委员会地球科学部和中国气象局,也表示衷心的感谢。

高守亭

2015年7月于北京

目 录

前 言

第 1 章 基本大气动力参数及其意义	(1)
1.1 与旋转及层结有关的参数及动力相似性	(1)
1.2 魏萨拉频率	(5)
1.3 里查森数及其重要性	(8)
参考文献	(14)
第 2 章 中尺度动力学的基本方程	(15)
2.1 中尺度运动基本方程组	(15)
2.2 中尺度系统的涡度方程、散度方程	(22)
2.3 中尺度系统的位涡方程以及位涡物质方程	(24)
参考文献	(26)
第 3 章 风及其性质	(28)
3.1 流线与迹线	(28)
3.2 风场性质	(30)
参考文献	(37)
第 4 章 涡度及其有关方程	(38)
4.1 涡度概念及其计算	(38)
4.2 平流涡度方程	(42)
4.3 流线涡方程	(49)
4.4 螺旋度及螺旋度方程	(54)
参考文献	(62)
第 5 章 散度及其有关方程	(64)
5.1 散度及散度方程	(64)
5.2 位势散度	(66)

参考文献	(71)
第6章 变形场及其有关方程	(72)
6.1 总变形及变形方程	(72)
6.2 变形场与涡度场、散度场的相互作用	(75)
6.3 涡度、散度和变形相互作用对低涡发展的作用	(78)
参考文献	(81)
第7章 非均匀饱和湿空气动力参数及有关方程	(83)
7.1 表示水汽的有关物理量	(83)
7.2 饱和水汽量	(84)
7.3 湿绝热直减率	(85)
7.4 饱和相当位温	(86)
7.5 饱和湿空气的魏萨拉频率及修正的相当位温	(87)
7.6 非均匀饱和大气中的广义位温的引入及其守恒性	(90)
参考文献	(94)
第8章 大气位涡及其特性	(96)
8.1 位涡及位涡倾向方程	(96)
8.2 二阶位涡	(98)
8.3 地形追随坐标系下的位涡及二阶位涡	(100)
8.4 广义湿位涡	(101)
8.5 热力、质量强迫下的湿位涡异常	(104)
8.6 质量强迫下的湿位涡的不可渗透性原理	(106)
8.7 二阶湿位涡	(108)
参考文献	(109)
第9章 广义锋生理论	(112)
9.1 广义标量锋生函数	(113)
9.2 非均匀饱和和湿大气中的广义标量锋生函数	(123)
9.3 锋生函数倾向	(130)
参考文献	(132)
第10章 大气重力波	(134)
10.1 大气重力波的波动特征	(134)

10.2	大气重力波的极化特征	(147)
10.3	重力波的波作用量方程	(156)
10.4	重力波的 EP 通量理论	(166)
10.5	重力波识别与分析	(174)
10.6	重力波破碎参数化理论	(179)
	参考文献	(185)
第 11 章	中尺度平衡与非平衡	(189)
11.1	准地转框架下的平衡与非平衡	(189)
11.2	平衡方程与非平衡方程的定义	(191)
11.3	中尺度平衡方程	(193)
11.4	中尺度的非平衡方程	(194)
11.5	中尺度正压平衡模式以及位涡反演技术	(197)
11.6	中尺度斜压平衡模式及位涡反演技术	(200)
	参考文献	(203)
第 12 章	中尺度不稳定及分析方法	(205)
12.1	不稳定分类及其分析方法简介	(205)
12.2	静力不稳定	(209)
12.3	惯性不稳定	(211)
12.4	切变不稳定	(213)
12.5	对称不稳定	(224)
	参考文献	(230)
第 13 章	基于标量场理论的动力预报方法	(232)
13.1	城市夏季高温高湿天气过程的动力预报方法	(232)
13.2	气旋移动的动力预报方法	(240)
13.3	暴雨落区及移动的动力预报方法	(244)
13.4	强降水预报的质量散度方法	(251)
13.5	变形场预报方法	(260)
13.6	水汽位涡及其应用	(268)
13.7	二阶湿位涡应用	(270)
	参考文献	(274)

第 14 章 矢量场理论与动力预报方法	(276)
14.1 对流涡度矢量(C)	(276)
14.2 对流涡度矢量的动力预报方法	(281)
14.3 湿涡度矢量(MVV)和动力涡度矢量(DVV)	(284)
14.4 非均匀饱和湿大气中非地转 Q 矢量	(286)
14.5 Q 矢量的动力预报方法	(291)
14.6 E 矢量	(295)
14.7 波作用矢量	(298)
参考文献	(309)
第 15 章 动力因子暴雨预报方法	(312)
15.1 基于广义位温的动力因子	(314)
15.2 湿位涡及其拓展物理量	(318)
15.3 波作用密度	(323)
15.4 集合动力因子暴雨预报方法	(325)
15.5 结论	(328)
参考文献	(329)

第1章 基本大气动力参数及其意义

为了研究大气中中尺度系统发生、发展的原理及动力结构,首先要了解一些描述中尺度特征的基本动力学参数,例如表示大气旋转效应的罗斯贝(Rossby)数、表示大气层结程度的内弗劳德(Froude)数以及表示大气不稳定性度的理查森(Richardson)数等等,还要知道它们的具体内涵以及如何应用到中尺度大气运动的研究之中。因此,本书的第1章,首先介绍一些重要的中尺度动力学参数。

1.1 与旋转及层结有关的参数及动力相似性

大气是包围地球具有层结的(温度层结和湿度层结)旋转流体,地球的旋转效应在大气运动中有时起着重要的作用。因此,需要弄清楚什么时间尺度的系统旋转对它是重要的。为说明这一问题,在此首先给出旋转率,即:

$$\Omega = \frac{2\pi}{\text{地球完成一次自转的时间}} = \frac{2\pi}{1 \text{ 天}} = 7.29 \times 10^{-5} / \text{s}$$

如果大气运动的时间尺度同地球完成一次自转的时间尺度是可比较的或更长,那么这种大气运动会感受到地球自转的效应,于是通常定义无量纲数

$$\omega = \frac{\text{地球完成一次自转的时间}}{\text{大气运动的时间尺度}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T\Omega} \quad (1.1.1)$$

如果 $\omega \leq 1$, 那么要考虑旋转效应,这对应于时间尺度 T 超过 1 天的大气运动(约 24 h)。通常还可以用大气运动的位移特征尺度 L 同其特征速度 U 之比作为大气运动的时间尺度 T , 这时有如下的无量纲参数

$$\tau = \frac{\frac{2\pi}{\Omega}}{\frac{L}{U}} = \frac{2\pi U}{\Omega L} \quad (1.1.2)$$

若 $\tau \leq 1$, 则旋转是重要的。

除了旋转之外,大气层结也是十分重要的。若对参考密度为 ρ_0 、在 H 高度内密度变化值为 $\Delta\rho$ 、基本运动速度为 U 的大气而言,相应的单位体积内有位能变化为 $(\rho_0 + \Delta\rho)gH - \rho_0 gH = \Delta\rho gH$, 基本动能为 $\frac{1}{2}\rho_0 U^2$, 则可组成无量纲数

$$\sigma_N = \frac{\frac{1}{2}\rho_0 U^2}{\Delta\rho g H} \quad (1.1.3)$$

若 $\sigma_N \sim 1$, 则认为层结是需要考虑的。因为要在这样的层结下, 大气扰动充分发展, 需消耗与基本动能相当的位能。若 $\sigma_N \ll 1$, 则说明该层结大气中远没有足够的动能使扰动充分发展, 层结起着决定性的作用; 若 $\sigma_N \gg 1$, 说明位能变化对基本动能影响很小, 即层结是不重要的, 这时层结效应可以被忽略 (Cushman-Roisin, 1994)。

在大气动力学中经常用一些无量纲参数来表示大气旋转或层结的程度。这些无量纲参数是在用尺度分析方法对大气方程组进行无量纲化的过程中得到的, 它们分别是罗斯贝数、内弗劳德数、伯格 (Burger) 数和里查森数等。

罗斯贝数 Ro 是平流惯性力同科氏力之比, 其数学表达式为

$$Ro = \frac{\frac{U^2}{L}}{fU} = \frac{U}{fL} \quad (1.1.4)$$

罗斯贝数 Ro 表示大气的旋转效应。

内弗劳德数 Fr_i 是平流惯性力对浮力的比或是动能对重力位能的比, 其数学表达式为

$$Fr_i = \left[\frac{\text{惯性力}}{\text{浮力}} \right]^{\frac{1}{2}} \propto \left[\frac{\rho_0 U^2 / L}{(\rho_2 - \rho_1) g} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{U}{\sqrt{g' L}} \quad (1.1.5)$$

其中 $g' = g(\rho_2 - \rho_1) / \rho_0$, ρ_1, ρ_2 分别是上下流体层的密度, ρ_0 是参考密度。

$$\text{由于} \quad g' = g(\rho_2 - \rho_1) / \rho_0 = -g \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz} H = N^2 H$$

则 (1.1.5) 式可表示为

$$Fr_i = \frac{U}{\sqrt{g' L}} = \frac{U}{N \sqrt{HL}} \quad (1.1.6)$$

对 $L \sim H$ 的中尺度系统则有 $Fr_i = U / NH$ 。

可见, 内弗劳德数表示了大气的层结效应。

伯格数定义为

$$B_u = \frac{f^2 L^2}{N^2 H^2} \quad (1.1.7)$$

且伯格数同罗斯贝数 Ro 及内弗劳德数 Fr_i 有如下的关系:

$$B_u = \left(\frac{f^2 L^2}{N^2 H^2} \right) = \frac{\left(\frac{U}{N \sqrt{HL}} \right)^2}{\left(\frac{U}{fL} \right)^2} = \left(\frac{Fr_i}{Ro} \right)^2 \quad (1.1.8)$$

对典型的深对流系统常有 $L \sim H$, 有

$$B_u = \frac{f^2}{N^2}$$

从以上表达式中可以看出伯格数体现了大气旋转效应和层结效应的相对大小。具体可以分为以下几种情况 (Norbury *et al.*, 2002): $B_u \ll 1$ 表示层结效应处于主要地位, 此种大气中黏性作用会使重力惯性波破碎, 例如低纬度的环流或次天气尺度现象; $B_u \gg 1$ 表示旋转效应处于主要地位, 重力惯性波维持, 地转调整过程不起作用, 副热带行星尺度波就属于此种类型; $B_u = O(1)$, 表示层结效应和旋转效应同等重要, 例如斜压不稳定情况; $B_u = 0$ 对应于没有旋转的层结流体, 此时若 $F_r \ll 1$, 则流体是近于水平无辐散的, 垂直速度很小; $B_u = \infty$, 表示只有旋转没有层结, 一般只能在中性层结下发生, 在实际大气中较为少见。另外, 由罗斯贝变形半径 $\hat{R} = NH/f$, 则伯格数又可以写为: $B_u = (L/\Lambda)^2$ 。由此可以确定层结效应和旋转效应对不同尺度系统的作用大小。

里查森数通常分为整体里查森数 $Ri = \frac{N^2 H^2}{U^2}$ 及梯度里查森数 $Ri(z) = \frac{N^2(z)}{(\partial U / \partial z)^2}$ ($Ri(z)$ 的物理意义见 1.3 节)。因为 $Ri = \frac{N^2 H^2}{U^2} = \frac{1}{Fr_i^2}$, 所以整体里查森数同弗劳德数平方的倒数 $1/Fr_i^2$ 具有动力相似性。

不同的中尺度系统, 涡度和散度具有不同的量级, 因此, 其旋转或层结的重要性程度也就不一样。对典型的中尺度运动系统, 涡度和散度具有同一量级, 即都可以用 U/L 的大小来表征。不妨这里改变传统的大尺度研究中常以涡度为主要保留对象, 而忽略散度效应的做法 (因为大尺度运动中散度的大小通常比涡度的大小至少小一个量级, 所以涡度为主要保留对象是合理的), 对中尺度系统, 可以用散度为主要参考对象来考证以上无量纲参数的作用 (Cushman-Roisin, 1994)。

因为 $\Delta\rho = \left| \frac{d\rho}{dz} \right| \Delta z$, 而 $\Delta z = WT = WL/U$, $\frac{d\rho}{dz} = \frac{\rho_0 N^2}{g}$, 故静力平衡下的气压扰动特征尺度为 $\Delta P = gH\Delta\rho = \frac{\rho_0 N^2 HLW}{U}$, 或写为 $\frac{\Delta P}{\rho_0} = \frac{N^2 HLW}{U}$ 。

又因为在典型的中尺度运动系统中气压梯度力、科氏力和平流惯性力三力平衡, 有 $\Delta P/L \sim \rho_0 U^2/L$, 则可得到 U^2 的特征大小为

$$U^2 = \frac{\Delta P}{\rho_0} = \frac{N^2 HLW}{U} \quad (1.1.9)$$

对中尺度运动系统特征垂直伸长和水平辐散的比为

$$\frac{\frac{W}{H}}{\frac{U}{L}} = \frac{U^2}{N^2 H^2} = Fr_i^2 \quad (1.1.10)$$

可见在水平散度同涡度具有同量级的典型中尺度运动系统中,特征垂直伸长同水平辐散的比完全由内弗劳德数 Fr_i 所表征,这说明在典型的中尺度运动系统中层结起着比旋转更为关键的作用。

若对散度仍比涡度小一个量级的中尺度系统,则有水平散度的特征大小为 $\delta = R_0 \frac{U}{L}$ 。而垂直伸长 $\frac{\partial w}{\partial z}$ 是由水平辐合来实现的,即 $R_0 \frac{U}{L} \sim \frac{W}{H}$ 。因此有

$$R_0 = \frac{\frac{W}{H}}{\frac{U}{L}} \quad (1.1.11)$$

这说明在这种中尺度运动系统中旋转比层结相对重要。

当旋转很强时 $R_0 \rightarrow 0$, 则由 (1.1.11) 即可导出 $W \rightarrow 0$, 垂直运动就基本消失了。通常泰勒(Taylor)柱就是发生在迅速旋转的流体中,因为这时由于 $\delta \sim R_0 \frac{U}{L}$ 。当 $R_0 \rightarrow 0$ 时, $\delta \rightarrow 0$ 则流动为水平无辐散的,故由不可压流体的连续性方程而知 $\frac{\partial W}{\partial z} = 0$ 。若 W 在某一高处为零,如在地表,则在所有高度处有 $W = 0$, 则运动完全变成二维的,即使在有地形的情况下也是如此。空气质点既不能沿地形上爬,同时地形坡度上的质点也不能沿地形下滑。于是遇到地形的质点必须偏转绕着地形走。在这种情况下,对正压流体,质点流动必须保持垂直方向上的刚性,结果使得在所有层次上的流体质点也必须同样的绕流,而在地形以上的质点就不能离开地形,被保留在那里而形成泰勒柱。

泰勒柱是发生在强旋转的流体中,但对层结很强而旋转相对很弱的流体 ($Fr_i \ll 1$), 由于层结强,空气质点的垂直位移在很大程度上被限制了,这就意味着当强层结空气遇到障碍物时,也必须水平的偏转,而在障碍物以上的空气流照旧可以流过障碍物而不受下层的影响,如果障碍物挡住了整个流域,那么空气就没法绕流,这时空气流就被阻塞在障碍物的上游,在层结流中这种水平的阻塞实质上就类似于旋转流中的泰勒柱。

以上是对旋转及层结的一些无量纲参数的表示及其物理意义的描述,那么它们有何重要性呢? 我们知道,在实际物理实验(如转盘或转槽实验)以及数值实验中,依据无量纲设置变数是非常有用的,如一个球形雨滴在一个具有黏性的湿空气内运动,则其受到的拖曳力可写成函数关系:

$$\tilde{D} = f(d, u, \rho_l, \mu) \quad (1.1.12)$$

其中 d 是球形雨滴的直径, u 是雨滴的运动速度,密度为 ρ_l , 黏性为 μ , 如果不进行无量纲化,构成无量纲群,我们必须作一系列的实验来决定 $\tilde{D}$, 如固定 ρ_l, u 和 μ 来做 $\tilde{D}$ 与 d 的关系,然后又固定 d, ρ_l, μ 来做 $\tilde{D}$ 与 u 的关系等等,这

显然是一个愚笨的做法。如果进行无量纲化,进行无量纲分析,则拖曳函数可写为

$$C_D = \frac{\tilde{D}}{\rho_m u^2 d^2} = f\left(\frac{\rho_l u d}{\mu}\right) = f(Re) \quad (1.1.13)$$

这里 Re 是雷诺数。这样方程变数由(1.1.12)式中的 5 个变成了(1.1.13)中的两个,即拖曳数 C_D 与雷诺数 Re , 因此就可以通过函数关系画出一条 C_D 同 Re 的关系曲线。这样,任给一个 Re , 便可从曲线上找到一个对应的拖曳系数 C_D 。完全不必关心雨滴密度、黏性等,我们就可以得到所有的有关 C_D 的信息。

若雷诺数 Re 很小时,显然惯性力是不重要的,即在关系式(1.1.12)中可去掉 ρ_l , 则变为 $\tilde{D} = f(d, u, \mu)$, 这时只有一个无量纲积 $\tilde{D}/\mu u d$, 因这个无量纲参数没有其他参数依赖,所以 $\tilde{D} \propto \mu u d$, 这就等价于 $C_D \sim 1/Re$ 。这时拖曳力线性的比例于速度 u , 即为 Stokes(斯托克斯)阻力定律。

动力相似性的概念同无量纲积的思想紧密相联系,显然如上面的雨滴在湿空气中运动的问题,只要构成的无量纲数 $Re = \rho_l u d / \mu$ 是一样的,那么流动就是动力相似的。

同样的在中尺度冷空气遇山受阻的研究中可以无量纲化,得出冷空气遇山受阻的无量纲长度 L 同弗劳德数的关系 $L = f(Fr_i)$, 并通过这种函数关系画出关于 L 对 Fr_i 的依赖关系曲线。利用这种曲线还可以预报冷空气遇山受阻时 Fr_i 对受阻长度 L 的影响(Xu and Gao, 1995)。

如对一个过山无黏气流在布西内斯克(Boussinesq)近似下,当具有不变的稳定度 N 及初始入流速度 U 时,运动满足伯努利方程(Smith, 1988)

$$u^2 = \frac{2}{\rho_0} \left[-p^* - \frac{1}{2} \rho_0 N^2 h^2 \right] + U^2 \quad (1.1.14)$$

当气流移近山脉时,在近山处会出现流动的驻点,这时 u 为零,则知驻点扰动气压 P^* 为 ρ_0, N, h 和 U 的函数,由无量纲分析可给出局地气压系数为

$$\frac{P^*}{\rho U^2} = f\left(\frac{Nh}{U}\right) = f\left(\frac{1}{Fr_i}\right) \quad (1.1.15)$$

这就要求无量纲局地变数在相应点具有动力相似性。

1.2 魏萨拉频率

若只考虑大气的热力性质,而不考虑大气的运动情况,我们可以用魏萨拉频率(Brunt-Vaisala frequency)来判断大气的层结稳定度。然而,不同的大气干湿湿度对应的魏萨拉频率的表示也是不一样的。

在斜压大气中空气密度 ρ 为 T 和 p 的函数即

$$\rho = \rho(T, p) \quad (1.2.1)$$

由状态方程

$$p = \rho RT \quad (1.2.2)$$

这里

$$R = c_p - c_v$$

在绝热条件下可写成

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (1.2.3)$$

这里 $\gamma = c_p / c_v$ 。 p_0 , ρ_0 是参考气压和密度, 对应有参考温度为 T_0 , 同样应满足 $T_0 = p_0 / R\rho_0$ 。

由此又可得

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.2.4)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (1.2.5)$$

对中尺度仍可用静力平衡近似, 即

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (1.2.6)$$

由于浮力效应主要是在垂直方向上, 所以考察浮力不稳定时, 只需认为 p , ρ , T 为 $p(z)$, $\rho(z)$, $T(z)$ 就够了(虽然可以写成 $p(x, y, z)$, $\rho(x, y, z)$, $T(x, y, z)$ 但不必要)。

若位于 z 处的空气质点向上位移了 δz , 则引起气压变化为 $\delta P = -\rho g \delta z$, 这也引起密度和温度的改变, 依据(1.2.3)式、(1.2.4)式可知

$$\delta \rho = -\frac{\rho g \delta z}{\gamma R T}, \quad \delta T = -(\gamma - 1) g \delta \frac{z}{\gamma R T} \quad (1.2.7)$$

质点在新位置上的密度为

$$\rho_1 = \rho + \delta \rho = \rho - \rho g \delta \frac{z}{\gamma R T} \quad (1.2.8)$$

但在这个新位置, 环境密度已变为

$$\rho_2(z + \delta z) = \rho(z) + \frac{d\rho}{dz} \delta z \quad (1.2.9)$$

则向上的浮力为

$$\begin{aligned} F &= g(\rho_2 - \rho_1) \\ &= g\left(\rho(z) + \frac{d\rho}{dz} \delta z - \rho + \rho g \delta \frac{z}{\gamma R T}\right) \\ &= g\left(\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{\gamma R T}\right) \delta z \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

由于在等熵条件下定义声速为

$$C = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{或写为} \quad C^2 = \gamma R T$$

$$\text{所以} \quad \mathbf{F} = g \left(\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{C^2} \right) \delta z \quad (1.2.11)$$

则浮力加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{C^2} \right) \delta z \quad (1.2.12)$$

$$\text{记} \quad N^2 = - \frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{C^2} \right) \quad (1.2.13)$$

则 N 为魏萨拉频率。

代(1.2.13)式进入(1.2.12)式有

$$\mathbf{a} = -N^2 \delta z \quad (1.2.14)$$

若用温度表示,则浮力可写为

$$\mathbf{F} = - \frac{\rho g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{g}{c_p} \right) \delta z \quad (1.2.15)$$

所以 N^2 可表示为

$$N^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{g}{c_p} \right) \quad (1.2.16)$$

为了避免每次系统的减去 g/c_p , 所以通常使用位温代替温度。由位温定义

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa}{\gamma}} = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.2.17)$$

则 N^2 可被表示为

$$N^2 = g \frac{d \ln \theta}{dz} \quad (1.2.18)$$

(1.2.18)式同(1.2.16)式是等价的。

同位温相应的密度被称为势密度(或中位密度)即

$$\rho^* = \rho \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma} \quad (1.2.19)$$

这时 N^2 还可以定义为

$$N^2 = - \frac{g}{\rho^*} \frac{d\rho^*}{dz} \quad (1.2.20)$$

这样就可以把可压流体用不可压流体方式来表示。

再讨论用魏萨拉频率判断大气层结稳定度的问题。

由(1.2.14)知 $N^2 > 0$ 稳定, $N^2 < 0$ 不稳定。要满足 $N^2 > 0, \frac{\rho g}{C^2} > 0$, 又由