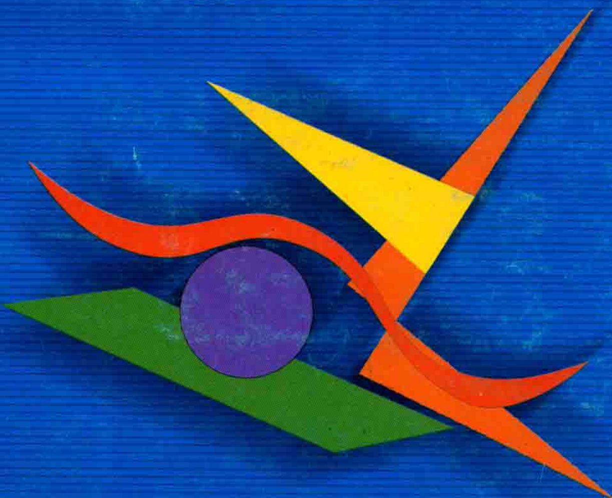
自学考试指定教材习题解答

经济高等数学
习题精选及解答

主编 李振华 伍培云



南京师范大学出版社

经济高等数学

习题精选及解答

主编　李振华　伍培云

南京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济高等数学习题精选及解答/李振华,伍培云主编.南京:南京师范大学出版社,2000.7
ISBN 7-81047-517-7/O·10

Ⅰ.经… Ⅱ.①李…②伍… Ⅲ.经济数学:高等数学-高等教育-自学考试-解题 Ⅳ.F224.0-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 33848 号

南京师范大学出版社出版发行
(江苏省南京市宁海路 122 号 邮编 210097)
江苏省新华书店经销 宜兴文化印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32 印张 8.875 字数 192 千
2000 年 6 月第 1 版 2000 年 6 月第 1 次印刷
印数 1-5000
定价:12.50 元

前　言

《经济高等数学》是江苏省自学考试指导委员会指定教材之一，也是经济类各专业自学考试者必读教材.

《经济高等数学》是自学考试中难度较大的一门课程，学习者通过听课或自学教材，求解习题仍有疑难是常见现象. 为了帮助学习者克服这一困难，编者根据自学考试大纲及多年从事自学考试辅导所积累的教学经验和资料(包括对多年考题类型分析)，从教材中精选出了 466 道习题(其中包括 67 题复习提高题). 对这些精选出的习题，一一给出了详细的解题过程. 本书力求深入浅出，通俗易懂，特别适合于参加自学考试的学生使用. 同时，也可作为各类全日制高校学生学习高等数学的参考用书.

学习高等数学，必须先打好初等数学基础. 重视基本概念和方法的理解，自己多动手练习，是学习成功的关键. 读者可以在自学教材的基础上，按精选的习题先自行练习(其中有△号的习题是提高题，如时间有限可以省略)，作出解答后，或解题遇到困难时，再与书中解法比较，一定会找到疑难所在，取得良好的学习效果. 多年来，笔者指导的学员一直使用《经济

高等数学习题精选及解答》的讲义，考试通过率较好(最高分达98分).

本书在原有讲义的基础上作了进一步修订、整理，我们希望本书的出版，能帮助读者节省时间、提高学习效果、巩固知识基础、顺利通过自学考试.

本书各章“习题”题号表示，类同教材各章节表示，由章序、节序、题序的三个数码构成，例如3.2.7是指《经济高等数学》的第三章第二节第7题.题解中所提教材，也都是指《经济高等数学》这本教材.

为了同国际接轨，本书中的数学符号 $\tan x$、$\cot x$ 即是原教材中的 $\mathrm{tg}\,x$、$\mathrm{ctg}\,x$，$\subsetneqq$、$\supsetneqq$ 即是原教材中的 $\subset$、$\supset$. 如果本书中习题的解答与原教材有不同之处，应以本书为准.

编写过程我们得到怀丽波老师许多帮助，在此深表谢意.

限于学识与水平，本书难免存在不妥之处，请广大读者指正.

编者

2000年6月

目　　录

第一章　函数与极限

第一节　实数集

基本要求

通过本节的练习，重点要掌握以下三点：

1. 实数集的概念、表示方法与它的一些基本运算（尤其是并、交、差三种运算）；

2. 绝对值概念和它的几何意义；

3. 会用绝对不等式的性质，解一些简单的不等式.

习题选解

1.1.1 设 $A=\{0\}$，$B=\{0,1\}$，下列陈述是否正确？并说明理由.

$A\neq\varnothing$，$A\subsetneqq B$，$0\in A$，$\{0\}\in A$，$0\subseteq A$，$A\cap B=0$，$A\cup B=B$，$\varnothing\subsetneqq A$，$A\subsetneqq A$，$A\subseteq A$.

解　上述正确的是：

$A\neq\varnothing$（有元素 $x=0\in A$，A 不是空集）；

$A\subsetneqq B$（$x=0\in B$，且 $A\neq B$，所以，A 是 B 的一个真子集）；

$0 \in A$（0 是 A 内的一个元素）；

$A \cup B = B$（$A \cup B = \{0,1\} = B$）；

$\varnothing \subsetneqq A$（由于 $\varnothing$ 是任何集合的子集，$A \neq \varnothing$，所以，$\varnothing \subsetneqq A$）；

$A \subseteq A$（由于 $0 \in A$，必有 $0 \in A$，自己是自己的子集）.

不正确的是：

$\{0\} \in A$（$\{0\}$ 是一个集合，不是元素，应有 $\{0\} = A$）；

$0 \subseteq A$（0 是元素，而 A 为集合，不能用 $\subseteq$ 符号）；

$A \cap B = 0$（$A \cap B = \{0\} \neq 0$）；

$A \subsetneqq A$（由于 $A = A$，即 A 不是 A 的真子集）.

1.1.2 用列举法表示下列集合：

(1) $A = \{x \mid (x+1)^2 = 9\}$；

(2) $B = \{n \in \mathbf{Z} \mid n^2 < 5\}$；

(3) $C = \{x \mid x^3 - 4x^2 + x = 0\}$；

(4) $D = \{x \mid |\arcsin x| = 30°\}$.

解 (1) 由 $(x+1)^2 = 9$，解得 $x = 2$，$x_2 = -4$，所以，$A = \{2, -4\}$.

(2) 当 n 为整数，且 $n^2 < 5$ 时，

必有 $n = 0,1,2,-1,-2$，

所以，$B = \{0, \pm 1, \pm 2\}$.

(3) 由 $x^3 - 4x^2 + x = x(x^2 - 4x + 1) = 0$，

解得 $x_1 = 0, x_2 = 2 + \sqrt{3}$，$x_3 = 2 - \sqrt{3}$，

所以，$C = \{0, 2 \pm \sqrt{3}\}$.

(4) $|\arcsin x| = 30°$，即 $\arcsin x = \pm \frac{\pi}{6}$，

解得 $x_1 = \frac{1}{2}$，$x_2 = -\frac{1}{2}$，

所以，$D = \{\pm \frac{1}{2}\}$.

1.1.3 下列集合哪些是空集？

(1) $A = \{x \mid x^2 = 0\}$；

(2) $B = \{x \mid x > 1, 且\ x < 0\}$；

(3) $C = \{x \mid |x| < 0\}$；　(4) $D = \{\varnothing\}$.

解　(1) 由 $x^2 = 0$，解得 $x = 0$，所以，A 不是空集.

(2) $x > 1$，且 $x < 0$，不可能有这样的实数，所以，B 是空集.

(3) 由于 $|x| \geqslant 0$，不可能有 $|x| < 0$，所以，C 为空集.

(4) $\{\varnothing\}$ 表示以空集为元素的集合，所以，D 不是空集.

1.1.6 解下列不等式：

(1) $|x + 4| < 1$；　(2) $|x - 2| \geqslant 5$；

(3) $|x| > |x + 1|$；　(5) $|x + 2| - |x| > 1$；

(6) $-1 < x^2 - 2x \leqslant 3$.

解　(1) $|x + 4| < 1$，即 $-1 < x + 4 < 1$，

解得 $-5 < x < -3$.

(2) $|x - 2| \geqslant 5$，有 $(x - 2)^2 \geqslant 25$，

即 $x^2 + 4x - 21 \geqslant 0$，解得 $x \leqslant -3$，或 $x \geqslant 7$.

注意：$|x - 2| \geqslant 5$ 表示 x 到 2 的距离要大于等于 5，从

数轴上可知,必有 $x \leqslant -3$,或 $x \geqslant 7$,如图 1.1-1 所示.

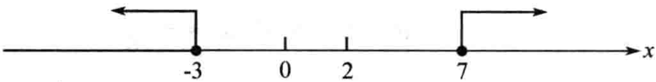


图 1.1-1

(3) $|x| > |x+1| \Rightarrow x^2 > (x+1)^2$,

解得 $2x+1<0$, 所以, $x<-\frac{1}{2}$.

注意:从数轴上可知:$|x|$ 表示 x 到原点的距离,$|x+1|$ 表示 x 到 -1 的距离,要 $|x|>|x+1|$,必有 $x<-\frac{1}{2}$,如图 1.1-2 所示.

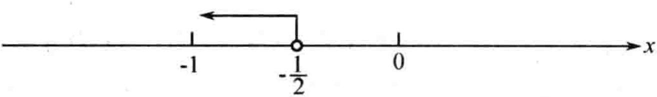


图 1.1-2

(5) 方法一 $|x+2|$ 表示 x 到 -2 的距离,$|x|$ 表示 x 到原点的距离,$|x+2|-|x|>1$,即要 x 到 -2 的距离要比 x 到原点的距离大,且大于 1,从数轴上可知,必有 $-\frac{1}{2}<x<+\infty$.

方法二 原不等式可表示为 $|x+2|>1+|x|$,

即 $(x+2)^2>(1+|x|)^2$,

$$x^2+4x+4>1+x^2+2|x|,$$

① 当 $x\geqslant 0$ 时,解得 $x>-\frac{3}{2}$,只可能 $x\geqslant 0$.

② 当 $x<0$ 时,可得 $(x+2)^2>1+x^2-2x$,

解得 $x>-\frac{1}{2}$,只可能 $-\frac{1}{2}<x<0$.

综合 ①② 的结论得 $-\frac{1}{2}<x<+\infty$.

(6) 只要同时解下列两个不等式:

① $-1<x^2-2x$, 得 $x\neq 1$;

② $x^2-2x\leqslant 3$, 得 $-1\leqslant x\leqslant 3$.

取 ①② 的交集得 $-1\leqslant x<1$, 或 $1<x\leqslant 3$.

1.1.7 设 x,y,z 为实数,求证:

(1) $x^2+y^2\geqslant 2xy$; (2) $x+\frac{1}{x}\geqslant 2\quad(x>0)$;

(3) $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$.

证 (1) 由于 $(x-y)^2\geqslant 0$,

即 $x^2+y^2-2xy\geqslant 0$, 所以, $x^2+y^2\geqslant 2xy$.

(2) 当 $x>0$ 时,有$(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2\geqslant 0$,

解得 $x+\frac{1}{x}-2\geqslant 0$, 所以, $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$.

(3) 由(1) 的结论可知:

$$x^2+y^2\geqslant 2xy \tag{①}$$

$$x^2+z^2\geqslant 2xz \tag{②}$$

$$y^2+z^2\geqslant 2zy \tag{③}$$

由 ① + ② + ③ 并除以 2 即得结论.

1.1.8 符号$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$表示$n$个元素$a_1,a_2,\cdots,a_n$之和，验证下列等式：

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$；

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$；

(5)△ $\sum\limits_{j=1}^{m}(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kj})=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{m}a_{kj})$.

证 (2)
$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\\&=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k.\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})\\&=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\\&=a_n-a_0.\end{aligned}$$

(5)△
$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n}a_{kj})\\&=\sum_{k=1}^{n}a_{k1}+\sum_{k=1}^{n}a_{k2}+\cdots+\sum_{k=1}^{n}a_{km}\\&=(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{n1})+(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{n2})+\\&\quad\cdots+(a_{1m}+a_{2m}+\cdots+a_{nm})\end{aligned}$$

$$=(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1m})+(a_{21}+a_{22}+\cdots a_{2m})+\cdots+(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nm})$$

$$=\sum_{j=1}^{m}a_{1j}+\sum_{j=1}^{m}a_{2j}+\cdots+\sum_{j=1}^{m}a_{nj}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}a_{kj}).$$

1.1.9△ 用数学归纳法证明：

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$； (3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=(\sum_{k=1}^{n}k)^2$.

证 (1) 当 $n=1$ 时，

$\sum_{k=1}^{1}k=1,\frac{1}{2}n(n+1)=1$，等式显然成立.

设当 $n=m$ 时等式成立，

有 $\sum_{k=1}^{m}k=\frac{1}{2}m(m+1)$.

当 $n=m+1$ 时，

$$\sum_{k=1}^{m+1}k=\sum_{k=1}^{m}k+(m+1)=\frac{1}{2}m(m+1)+(m+1)$$

$$=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$$

$$=\frac{1}{2}(m+1)[(m+1)+1].$$

即当 $n=m$ 成立时，必有 $n=m+1$ 亦成立.

(3) 当 $n=1$ 时，$1^3=1^2$，等式显然成立.

设当 $n=b$ 时等式成立，

有 $\sum_{k=1}^{b} k^3 = (\sum_{k=1}^{b} k)^2$

$$= \left[\frac{1}{2}b(b+1)\right]^2 = \frac{1}{4}b^2(1+b)^2.$$

当 $n = b + 1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{b+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{b} k^3 + (b+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}b^2(1+b)^2 + (b+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(b+1)^2(b+2)^2 \\ &= \left[\frac{1}{2}(b+1)(b+2)\right]^2 \\ &= \left\{\frac{1}{2}(b+1)[(b+1)+1]\right\}^2 = (\sum_{k=1}^{b+1} k)^2.\end{aligned}$$

所以，当 $n = b + 1$ 时，$\sum_{k=1}^{b+1} k^3 = (\sum_{k=1}^{b+1} k)^2$ 亦能成立.

1.1.10 证明贝努里不等式：

$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均同号且大于 -1.

证 采用数学归纳法：

当 $n = 1$ 时，有 $1 + x_1 \geqslant 1 + x_1$；

当 $n = k$ 时，有 $(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_k) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k$；

当 $n = k + 1$ 时，有 $(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geqslant (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(1 + x_{k+1}) = 1 + x_1 +$

$x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} + (x_1x_{k+1} + x_2x_{k+1} + \cdots + x_kx_{k+1})$.

因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均同号，

所以，$x_1x_{k+1} \geqslant 0$，$x_2x_{k+1} \geqslant 0$，$\cdots$，$x_kx_{k+1} \geqslant 0$.

因为上式括号内的数为非负数，

所以，$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}$.

1.1.11 利用上题证明，若 $x > -1, n \in \mathbf{N}$，则

(1) $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$；　(2) $1 + \frac{x}{n} \geqslant (1 + x)^{\frac{1}{n}}$.

证　(1) 在1.1.10题中，取 $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = x$，则有 $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$，所以，原不等式成立.

(2) 在第1.1.10题中，取 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{x}{n}$，

则有 $(1 + \frac{x}{n})^n \geqslant 1 + \frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n} = 1 + x$，

所以，$(1 + \frac{x}{n}) \geqslant (1 + x)^{\frac{1}{n}}$.

第二节　一元函数

● 基本要求

通过本节的练习，重点要掌握以下两点：

1. 初等数学一些基本知识，如函数概念、基本初等函数等，并熟知它们的图形；

2. 会正确地写出复合函数的复合步骤，会从单调性、有界性、奇偶性、周期性分析一些简单的初等函数图形的特点，能初步学会建立函数关系(包括分段函数).

● 习题选解

1.2.1 下列各题中两个函数是否相同?为什么?

(2) $y=\sqrt{x^2-2x+1}$ 与 $y=x-1$;

(3) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$.

解 (2) 因为 $y=\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}$

$$=|x-1|=\begin{cases}x-1\ (x\geqslant 1),\\1-x\ (x<1),\end{cases}$$

所以，与 $y=x-1$ 不同(值域不同，前者函数值大于等于0，后者当 $x<1$ 时，函数值为负值).

(3) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 比较，

因为前者定义域为 $x\neq 0$，而后者定义域为 $x>0$，所以，函数不同.

1.2.3 已知某直角三角形斜边长为 c，一个锐角为 x，试将该三角形面积 S 表示成 x 的函数，并讨论其定义域.

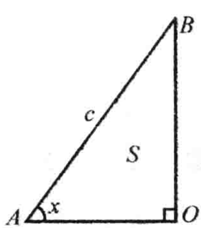


图 1.2-1

解 如图 1.2-1 所示，面积

$$S=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}$$