“十三五”应用型人才培养工程规划教材

应用高等数学

APPLIED ADVANCED MATHEMATICS

主　编　罗柳容　何闰丰

副主编　秦立春　吴　昊　庞斯棉　覃雄燕

3

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十三五"应用型人才培养工程规划教材

应用高等数学

主　编　罗柳容　何闰丰
副主编　秦立春　吴　昊　庞斯棉　覃雄燕
参　编　张　琪　石秋宇　倪艳华　程　晨
　　　　吕海燕　谢国军

机械工业出版社

本教材的内容包括基本代数知识、函数基础知识、三角函数、复数、函数的极限与连续、导数与微分及其应用、积分及其应用、线性代数初步等.

本教材结合高职高专学生特点和专业需求，重新整合了传统高等数学的内容，注意中专中职阶段到大专阶段的知识衔接，淡化理论方面的定理论证，不刻意追求过程的严密性，而是更加注重知识方法的实用性，增加实例分析. 同时还引入了数学软件（MATLAB）的辅助，使繁杂的数学运算有了强力助手.

本教材特别适合以中专中职为起点的高等职业院校的学生使用，也适合以高中为起点的少课时的工科类高职高专学生使用.

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学/罗柳容，何闰丰主编. -北京：机械工业出版社，2015.7
“十三五”应用型人才培养工程规划教材
ISBN 978-7-111-51077-2

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①罗… ②何… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 179016 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：汤 嘉 责任编辑：汤 嘉 陈崇昱 版式设计：霍永明
责任校对：刘秀芝 封面设计：张 静 责任印制：李 洋
北京振兴源印务有限公司印刷
2015 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 17印张 · 417 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-51077-2
定价：39.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649
封面无防伪标均为盗版

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden-book.com

前　　言

随着高校招生制度改革的深入，高职高专院校招生形式日趋多样化，自主招生、注册招生、订单招生、定向招生等多元化方式录取的学生所占的比例也越来越大，他们大多来源于中专、中职、技校，或者是社会青年，而且基本上都没有接受过完整的普通高中的教育，基础知识有所欠缺．而传统的高职《高等数学》教材大多是为高中毕业，并参加过全国高等院校招生考试的学生而编写的，考虑的是高中与大学教育的衔接，忽视了中专中职阶段到大专阶段教育的衔接，使得他们无法正常地进入到课程的学习中．本教材弥补了这一缺口，课程内容根据高职高专的人才培养目标和课程目标进行选择，同时围绕着学生的个体能力和知识水平进行设计．

本教材有如下特色：

1．注重数学思维的培养

数学思维方式就是：观察现象，抓住特征，抽象出概念或者数学模型；进一步探索，通过判断、猜想、分析、推理，揭示事物的内在规律，从而使纷繁复杂的现象变得井然有序．

我们在编写本教材时，每一小节大都设置有引例，然后进入概念、性质、举例、练习、综合运用、小结、升华等环节，使学生在学习知识的同时，接受数学思维方式的熏陶，从而提高学生的科学素质．

2．满足高职高专院校各类专业对数学知识的需求

内容设置为：基本代数知识、函数基础知识、三角函数、复数、函数的极限与连续、导数与微分及其应用、积分及其应用、线性代数初步等．前半部分是兼顾中专中职数学到高等数学的过渡，后半部分为各专业学科必备的高等数学知识，基本能满足高职高专院校各工科专业对数学知识的需求．

3．充分考虑学生的能力层次

本教材淡化理论方面的定理论证，不刻意追求过程的严密性，而是更加突出实用的案例分析．章节内容按层次递进，由浅入深，例题由易到难，紧扣内容，习题分为简易的 A 类和有一定难度的 B 类，这也是为了配合层次教学的需要．

4．教学内容富有弹性

对于以中专中职为起点，并且开设两个学期数学课的学生，可教授全部内容．而对于那些只开设一个学期数学课的学生，可对前四章进行扼要讲解，重点学习后四章．

5. 引入了数学软件（MATLAB）的辅助。

本教材由罗柳容、何闰丰任主编，秦立春、吴昊、庞斯棉、覃雄燕任副主编，参与编写的人员还有张琪、石秋宇、倪艳华、程晨、吕海燕、谢国军、陈溥等. 所有编者均为高职院校具有丰富教学经验的一线教师.

在编写过程中，我们虽然尽力想把工作做好。但由于水平有限，书中难免会存在缺陷和错误，敬请各位读者批评指正.

编　者

目录

绪论

1. 数学是什么

数学是什么？这个问题看似简单，细想起来，却不好回答.

有人说：按字面意思，数学就是数的学问. 这个说法有些流于片面，难道图形不是数学研究的对象吗？

较确切的说法是：数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的科学.

对数学可进行如下分类：

（1）按年代分

1）初等数学和古代数学：这是指 17 世纪以前的数学. 主要是古希腊时期建立的欧几里得几何学，古代中国、古印度和古巴比伦时期建立的算术，以及欧洲文艺复兴时期发展起来的代数方程等.

2）变量数学：是指 17 ~ 19 世纪初建立与发展起来的数学. 从 17 世纪上半叶开始的变量数学时期，又可以分为两个阶段，即 17 世纪的创建阶段（英雄时代）与 18 世纪的发展阶段（创造时代）.

3）近代数学：是指 19 世纪的数学. 该时期是数学的全面发展与成熟阶段，数学的面貌发生了深刻的变化，数学的绝大部分分支在这一时期都已经形成，整个数学呈现出全面繁荣的景象.

4）现代数学：是指 20 世纪的数学. 1900 年德国著名数学家希尔伯特在世界数学家大会上发表了一次著名演讲，提出了 23 个影响今后数学发展的问题，由此拉开了 20 世纪现代数学的序幕.

（2）按学科分

1）基础数学：又称为理论数学或纯粹数学，是数学的核心部分，包含代数、几何、分析三大分支，分别研究数、形和数形关系.

2）计算数学：研究诸如计算方法（数值分析）、数理逻辑、符号数学、计算复杂性、程序设计等方面的问题. 该学科与计算机密切相关.

3）概率统计：分为概率论与数理统计两大块.

4）运筹学与控制论：运筹学是利用数学方法，在建立模型的基础上，解决与人力、物资、金钱等有关的复杂系统的运行、组织、管理等方面所出现的问题的一门学科.

数学的特点是：

1）抽象性，内容和表达形式，思维方式的抽象.

2）准确性，逻辑严密性，结论确定性.

3）应用广泛性，我们的生产、生活以及日常活动都离不开数学．没有数学，现代科学技术不可能取得如此巨大而又迅速的进步.

2. 数学的作用

从进入学校大门的那一刻起，我们就跟数学这门课程打上了交道，从小学到中学，再到大学，数学成为了许多人的朋友，同时也是某些人的“噩梦”．有些人对它喜爱有加，认为它生动有趣，乐在其中，也有些人觉得它特别烦，生涩难懂、枯燥乏味．有时学生就会想，我们辛辛苦苦花这么多时间来学习数学，到底有什么用?

不得不承认，在应试教育的年代，我们在学校学到的数学知识，在进入社会后能直接应用到日常生活和工作中的确实不多．因而，除计算外，作为知识的数学，通常在学生们走出校门没几年，就“还给老师”了.

然而，也许大多人并没有意识到，不管将来我们从事什么工作，那种根植于头脑中的数学思维和数学思想方法，却长期地在我们的生活和工作中发挥着重要的作用.

数学的作用在于：

1）世间万般表象的背后皆有规律．科学研究的真正目的，在于找到这些规律并能够举一反三地应用这些规律．数学是描述这些规律性最好的工具.

2）数学是一种工具学科，它是学习其他学科的基础．可以毫不夸张地说，能学好数学，就能学好任何理工科专业．数学是打开所有科学大门的钥匙.

3）数学不仅是一门科学，而且也是一种普遍适用的技术．许多实际问题都需要建立数学模型来解决，而建立模型就是把实际问题转化为数学问题．比如在计算机领域，许多地方要用到数学：初等代数和三角学是计算机图形学中最基础的知识；而要想在计算机图形学方面开展工作，更应该打下坚实的线性代数基础；有许多实际问题可以用微积分学的术语描述，并建立数学模型来求解；计算机程序需要应用推导、归纳、循环、递推等数学方法．数学差的人想编出好的计算机程序是比较困难的．也许你不知道，谷歌、百度这些搜索引擎的背后都是一群数学高手在做研发．更别说最近流行的大数据、云计算之类的了.

4）数学应用广泛，小至日常生活中买卖、利率、保险、医疗费用的计算，大至天文地理、环境生态、信息网络、质量控制、管理与预测、大型工程、农业经济、国防科学、航天事业，均大量存在着运用数学的踪影．可以说，在我们的生活和工作之中处处有数学.

5）数学给予人们的不仅是知识，更重要的是能力，这种能力包括观察实验、收集信息、归纳类比、直觉判断、逻辑推理、建立模型和精确计算．这些能力的培养，将使人终身受益.

6）数学本身充满乐趣：探索的乐趣，发现的乐趣，成长的乐趣.

3. 数学之美

数学美的表现形式是多种多样的，从数学内容看，有概念之美、公式之美、体系之美等；从数学的方法及思维看，有简约之美、类比之美、抽象之美、无限之美等；从狭义美学

意义上看，有对称之美、和谐之美、奇异之美等.

下面看一个例子：你知道著名的杨辉三角吗？它出现在我国南宋时期数学家杨辉1261年所著的《详解九章算法》一书里. 杨辉三角最本质的特征是：它的两条斜边都是由数字1组成的，而其余的数则是等于它肩上的两个数之和.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\cdots
\end{array}
$$

它的每一行，恰好依次是二项式$(a+b)^n$（$n=0$，1，2，3，…）的展开式中各项的系数，即

$$
\begin{array}{ll}
(a+b)^0= & 1 \\
(a+b)^1= & a+b \\
(a+b)^2= & a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3= & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4= & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
(a+b)^5= & a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \\
(a+b)^6= & a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6 \\
 & \cdots
\end{array}
$$

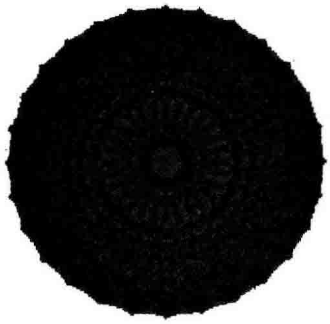
在这里，二项展开式中的系数居然能如此和谐地统一于一个三角形中.

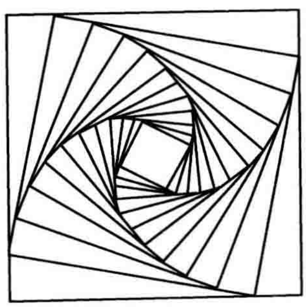
巧合的是，杨辉三角的“身影”还出现在11^n（$n=0$，1，2，3，…）的运算结果里，11^n的运算结果如下：

$$
\begin{array}{cc}
1 & (11^0) \\
1 \quad 1 & (11^1) \\
1 \quad 2 \quad 1 & (11^2) \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 & (11^3) \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 & (11^4) \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 & (11^5) \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 & (11^6) \\
\cdots &
\end{array}
$$

这个结果是如此的简洁，又是如此的出人意料！难道不令人为之惊叹，为之倾倒吗？

下面再来看几幅图：





它们看上去都像美术作品．第一幅像鸟巢，第二幅像爱心又像苹果，第三幅像漩涡，第四幅像一棵树．实际上它们都是用数学方法做出来的美丽图案．

鸟巢是把一个正 28 边形的对角线连起来形成的美丽图案，爱心（苹果）是由两个相交的圆不断旋转而形成的，第三幅是正方形的旋转漩涡，第四幅是根据勾股定理绘制出的有规律的图案．这些图案看起来复杂多变，但是其数学方法却非常简单，有三角尺和圆规的话，就可以很容易做出来．

4. 怎样学好数学

数学并不神秘，也并非只有天才才能学好数学，只要通过努力，人人都能学好数学．

作为学习的主体——学生，他们的情况不尽相同，学习方法也因人而异，但正确的学习方法应该遵循以下几个原则：循序渐进、熟读精思、自求自得、博约结合、知行统一．

“循序渐进”——就是人们按照学科的知识体系和自身的智力条件，系统而有步骤地进行学习．这就要求人们注重基础，切忌好高骛远，急于求成．循序渐进的原则体现为：一要打好基础，二要由易到难，三要量力而行．

“熟读精思”——就是要根据记忆和理解的辩证关系，把记忆与理解紧密地结合起来，两者不可偏废．我们知道记忆与理解是密切联系、相辅相成的．一方面，只有在记忆的基础上进行理解，理解才能透彻；另一方面，只有在理解的基础上进行记忆，记忆才会牢固，“熟读”，要做到“三到”：心到、眼到、口到．“精思”，要善于提出问题和解决问题，用“自我诘难法”和“众说诘难法”去质疑问题．

“自求自得”——就是要充分发挥学习的主动性和积极性，尽可能挖掘自己内在的学习潜力，从而培养和提高自学能力．自求自得的原则要求不要为读书而读书，应当把所学的知识加以消化吸收，变成自己的东西．

“博约结合”——就是要根据广博和精研的辩证关系，把广博和精研结合起来，众所周

知，博与约的关系是在博的基础上去约，在约的指导下去博，博约结合，相互促进．坚持博约结合，一是要广泛阅读，二是要精读．

“知行统一”——就是要根据认识与实践的辩证关系，把学习和实践结合起来，切忌学而不用．古人云“知者行之始，行者知之成”，以知为指导的行才能行之有效，脱离知的行则是盲目的．同样，以行验证的知才是真知灼见，脱离行的知则是空知．因此，知行统一要注重实践：一是要善于在实践中学习，边实践、边学习、边积累．二是躬行实践，即把学习得来的知识运用在实际工作中，解决实际问题．

数学是高等院校一门重要的基础课，学好它对每一个大学生都是极为重要的．对于大学生本人来说，应该积极观察、思考，掌握适合自己的学习方法，这里仅结合一般学习方法，介绍一些学习高等数学的方法，供同学们参考：

（1）把握三个环节，提高学习效率

1）课前预习：了解老师即将讲什么内容，相应地预习与之相关内容．

2）认真上课：注意老师的讲解方法和思路，以及分析问题和解决问题的过程，做好课堂笔记，听课是一个全身心投入——听、记、思相结合的过程．

3）课后复习：当天必须回忆一下老师所讲的内容，看看自己记住了多少；然后翻开笔记和教材，完善笔记，融会贯通；最后完成作业．

（2）在记忆的基础上理解，在完成作业中深化，在比较中构筑知识结构的框架．

（3）按“新＝陈＋差异”的思路理解并深化学习到的知识．

（4）“三人行，必有我师”，参加老师的辅导，向同学们请教并相互讨论．

（5）掌握处理数学问题的基本方法：

1）分割求和法；

2）以直求曲法；

3）恒等变形法：

①等量加减法；②乘除因子法；③积分求导法；④三角代换法；

⑤数形结合法；⑥关系迭代法；⑦递推公式法；⑧相互沟通法；

⑨前后夹击法；⑩反思求证法；⑪构造函数法；⑫逐步分解法．

（6）阶段复习与全面巩固相结合

最后总结一下：我们不但要走近数学，更要走进数学，数学培养的是我们的思维，是分析问题、解决问题的思维方式．在此过程中，你会不断地获得惊喜；你会感到自己变得越来越聪明；你会发现它是我们学习、生活及工作中的助推利器．让数学成为我们的朋友，而不是敌人．

第 1 章

基础代数知识

1.1 实数的概念与运算

1.1.1 实数的产生

数是由于人类在实践活动中的需要而产生的，并随着实践活动的发展而发展. 最初由于计数的需要而产生了自然数和零. 以后由于土地测量、商品交换、工作分配等的需要而产生了分数. 我们称这些数为**算术数**.

随着人类社会的发展，收入与支出、前进与后退、上升与下降等成对具有相反方向或相反意义的量的大量出现，如果仍然只用算术数来表示就会含糊不清、很不方便，因此就必须引进新的数，从而又产生了负数、无理数等，就这样数的范围不断扩大.

实数的分类

方法 1

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

方法 2

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{正无理数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负实数}\begin{cases}\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

注意：有限小数、无限循环小数是有理数，它们可化为分数；无限不循环小数是无理数.

1.1.2 实数的有关概念

1. 数轴和区间

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫作**数轴**. 它是表示实数的有力工具，数轴上的

点与实数是一一对应的关系（见图 1-1-1）.

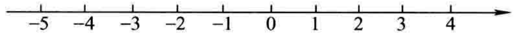


图 1-1-1

画数轴时，要注意：

（1）三要素（原点、正方向、单位长度）缺一不可；

（2）实数与数轴上的点是一一对应的；

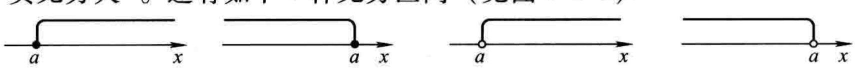
（3）数轴上任一点对应的数总大于该点左边的点对应的数.

数轴上 a、b（$a<b$）两点间的实数的全体，叫作**区间**，a、b 叫作区间的端点. 在数轴上表示一个区间时，若区间包括端点，则端点用实心点表示；若区间不包括端点，则端点用空心点表示，具体情况如图 1-1-2 所示.

$a\leqslant x\leqslant b$	$a<x<b$	$a<x\leqslant b$	$a\leqslant x<b$
$\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$	$\{x\|a<x<b\}$	$\{x\|a<x\leqslant b\}$	$\{x\|a\leqslant x<b\}$
$[a,b]$	(a,b)	$(a,b]$	$[a,b)$
闭区间	开区间	半开半闭区间	半开半闭区间

图 1-1-2

全体实数也可以用区间表示为（$-\infty$，$+\infty$），符号“$+\infty$”读作“正无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”。还有如下 4 种无穷区间（见图 1-1-3）.



$x\geqslant a$	$x\leqslant a$	$x>a$	$x<a$
$\{x\|x\geqslant a\}$	$\{x\|x\leqslant a\}$	$\{x\|x>a\}$	$\{x\|x<a\}$
$[a,+\infty)$	$(-\infty,a]$	$[a,+\infty)$	$(-\infty,a]$

图 1-1-3

2. 相反数与倒数

从数轴上看，互为相反数是关于原点对称的两个点所对应的两个数.

比如：3 与 -3，$-\dfrac{5}{7}$与$\dfrac{5}{7}$等.

注意：零的相反数是零.

乘积为 1 的两个数，叫作互为倒数. 实数 a（$a\neq0$）的倒数是$\dfrac{1}{a}$.

注意：零没有倒数.

3. 绝对值

$|a|=\begin{cases}a,\ a>0,\\0,\ a=0,\\-a,\ a<0.\end{cases}$ 从数轴上看，一个数的绝对值就是表示这个数代表的点与原点的距离.

1.1.3　实数的运算法则

1. 加法

同号两数相加，取原来的符号，并把它们的绝对值相加.

异号两数相加．取绝对值较大的数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值．

任何数与零相加等于原数．

2. 减法

减去一个数，等于加上这个数的相反数，即 $a-b=a+(-b)$．

3. 乘法

两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘；零乘以任何数都得零，即

$$ab=\begin{cases}|a||b|, & a\text{、}b\text{ 同号},\\ -|a||b|, & a\text{、}b\text{ 异号},\\ 0, & a\text{ 或 }b\text{ 为零}.\end{cases}$$

4. 除法

除以一个数，等于乘以这个数的倒数，即 $a\div b=\dfrac{a}{b}=a\times\dfrac{1}{b}$ $(b\neq0)$．

注意：在同一个式子里，先乘、除，后加、减，有括号时，先算括号里面的．

实数的运算律：

(1) 加法交换律　$a+b=b+a$；

(2) 加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$；

(3) 乘法交换律　$ab=ba$；

(4) 乘法结合律　$(ab)c=a(bc)$；

(5) 分配律　$a(b+c)=ab+ac$．

其中 a、b、c 表示任意实数．运用运算律有时可使运算简便．

例 1　计算 (1) $\left|\dfrac{1}{1001}-\dfrac{1}{1000}\right|+\left|\dfrac{1}{1002}-\dfrac{1}{1001}\right|-\left|\dfrac{1}{1002}-\dfrac{1}{1000}\right|$；

(2) $\left(\dfrac{7}{9}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{18}\right)\times18-1.45\times6+3.95\div\dfrac{1}{6}$；

(3) $2\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{3}{11}\div1\dfrac{1}{3}$．

解　(1) 原式 $=-\left(\dfrac{1}{1001}-\dfrac{1}{1000}\right)-\left(\dfrac{1}{1002}-\dfrac{1}{1001}\right)+\left(\dfrac{1}{1002}-\dfrac{1}{1000}\right)$

$$=-\frac{1}{1001}+\frac{1}{1000}-\frac{1}{1002}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}-\frac{1}{1000}$$

$$=0;$$

(2) 原式 $=\left(\dfrac{7}{9}\times18-\dfrac{5}{6}\times18+\dfrac{7}{18}\times18\right)-1.45\times6+3.95\times6$

$$=14-15+7-8.7+23.7$$

$$=21;$$

(3) 原式 $=\dfrac{11}{5}\times\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{3}{11}\div\dfrac{4}{3}$

$$=\frac{11}{5}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{9}{20}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$