夺标丛书

九年义务教育
初中版★同步

全国重点中学部分一线教师
北京海淀区重点学校
一线高级教师　编写

海淀金牌

初中三年级

几何

- 课内课后练习
- 单元章后练习
- 期中期末夺标试题
- 重点难点知识点
- 素质教育应试教育综合
- 名师名校经验浓缩

金牌题　银牌题　铜牌题

版社

夺标丛书

◆全国重点中学部分一线教师
◆北京海淀区重点学校一线高级教师 编写

海淀金牌

初中三年级

几何

吉 林 教 育 出 版 社

(吉) 新登字02号

《夺标丛书·海淀金牌》编委会

夺标丛书 **海淀金牌** 初中三年级几何

全国重点中学部分一线教师
北京海淀区重点学校一线高级教师／编写

责任编辑：阙家栋　　封面设计：曲　刚

出版：吉林教育出版社　　787×1092毫米16开本　　13印张　323千字
发行：吉林省新华书店　　1998年5月第1版　　1998年5月第1次印刷
印刷：吉林市华南彩印厂　　印数：1－15000册　　全套定价：78.50元（共六册）　定价：13.00元
ISN7-5383-3335-5/G.2994

出版说明

《海淀金牌》是一套以九年义务教育教学大纲为标准，紧密配合九年义务教育新教材，帮助中学生全面更好地掌握初中各主要学科课程的一套实用性、权威性的辅导读物。

《海淀金牌》以提高学生文化素质、测试学生综合能力为基础，找到素质教育与应试教育的契合点，使学生得到全面发展。

本套丛书由全国重点中学部分一线优秀教师和北京海淀区重点中学的部分一线优秀教师编写。全套书注重学生学习方法的指导，注重基础知识。

《海淀金牌》在内容上把课（单元、章）进行科学条块的划分。综述指明每课学习中心；通过重点、难点、典型例题分析指明思路，做到一节一过关，一章一验收；期中、期末模拟试题配合夺标试题全面训练，使学生所学知识系统完整。

《海淀金牌》本着突出重点、减轻学生负担的原则，在练习和测试结合的基础上，通过金牌题、银牌题、铜牌题等全方位题型，做到分级训练，加深理解消化知识点，紧扣重点和难点，以达到夺标取胜的目的。

希望通过本套书的出版，能使中学生在学习与训练过程中得到最有效地帮助。

编者

1998 年 5 月

目　　录

第六章　解直角三角形

一、锐角三角函数

基础知识综述

1. 锐角三角函数：

在 Rt△ABC 中，如图 6－1，

$\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$　$\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$

$\operatorname{tg} A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\dfrac{a}{b}$　$\operatorname{ctg} A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}}=\dfrac{b}{a}$

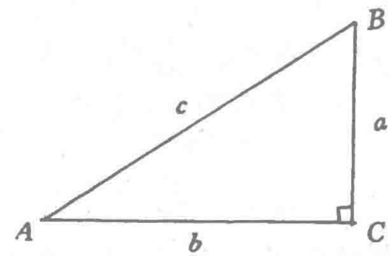

图 6－1

2. 互为余角的三角函数关系：

$\sin(90°-A)=\cos A$；　$\cos(90°-A)=\sin A$；

$\operatorname{tg}(90°-A)=\operatorname{ctg} A$；　$\operatorname{ctg} A(90°-A)=\operatorname{tg} A$.

3. 同角三角函数关系：

(1)平方关系：$\sin^2 A+\cos^2 A=1$；

(2)倒数关系：$\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{ctg} A=1$；

(3)商数关系：$\operatorname{tg} A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$，　$\operatorname{ctg} A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$.

4. 一些特殊角的三角函数值：

三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	——
$\operatorname{ctg}\alpha$	——	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5. 正确使用“正弦和余弦表”、“正切和余切表”，由已知锐角求出它的三角函数值，由已知的三角函数值求出它对应的锐角. 从表中可看出，角 α 在 0°与 90°之间变化时，$\sin\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$ 随 α 的增大而增大，$\cos\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$ 随 α 的增大而减小.

6.1 正弦和余弦

典型例题分析

铜牌题　**【例 1】**　求出图 6－2 所示的 Rt△ABC 中的 $\sin A$、$\cos A$、$\sin B$ 和 $\cos B$ 的值.

分析：求 $\sin A$ 时，要看$\angle A$ 的对边与斜边的比；求 $\cos A$ 时，要看$\angle A$ 的邻边与斜边的比.

解：(1)在 Rt△ABC 中，

$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

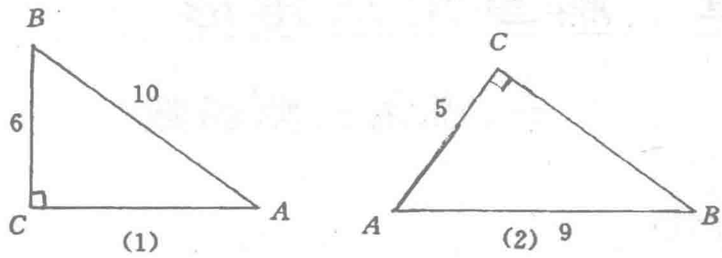

图 6—2

$\therefore \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$， $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$， $\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}$， $\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$.

(2)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{9^2-5^2}=2\sqrt{14}$，

$\therefore \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$， $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{9}$， $\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{9}$， $\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$.

铜牌题 【例 2】 求下列各式的值.

(1)$2\cos30°-2\sin60°\cdot\cos45°$； (2)$\frac{2\sin30°}{4\cos60°-1}$； (3)$30-\sin^2 30°-\cos^2 30°$.

解：(1)$2\cos30°-2\sin60°\cdot\cos45°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}$；

(2)$\frac{2\sin30°}{4\cos60°-1}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{4\times\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{1}=1$；

(3)$30-\sin^2 30°-\cos^2 30°=30-(\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=30-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=29$.

铜牌题 【例 3】 不查表确定下列各式的符号.

(1)$\sin53°-\sin49°$； (2)$\cos49°-\cos50°$； (3)$\sin53°-\cos53°$

分析：一个锐角的正弦值随角度的增大而增大，一个锐角的余弦值随角度的增大而减小，当比较一个角的正弦值和余弦值的大小时，应统一成同一三角函数，再比较大小.

解：(1)$\because 53°>49°$，$\therefore \sin53°>\sin49°$，$\therefore \sin53°-\sin49°>0$；

(2)$\because 49°<50°$，$\therefore \cos49°>\cos50°$，$\therefore \cos49°-\cos50°>0$；

(3)$\because \cos53°=\sin37°$，又$\because \sin53°>\sin37°$，$\therefore \sin53°-\cos53°>0$.

银牌题 【例 4】 当 $0°<\alpha<90°$时，求$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}$的值.

分析：此题主要用两弦的平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 来求解.

解：$\because 0°<\alpha<90°$，又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\therefore \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，

$\because \cos\alpha>0$，$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$，$\therefore \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}=1$.

课后练习题

铜牌题 1. 判断题(对的画“√”，错的画“×”)

(1)$\sin30°+\sin60°=\sin90°$ （　　）

(2) $\sin 78° < \cos 78°$　　( )

(3) $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$　　( )

(4) $\sin 15° \cdot \cos 75° + \cos 15° \cdot \sin 75° = 1$　　( )

(5)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$a=12$，$b=5$，则 $\sin B = \frac{5}{13}$.　　( )

2. 填空题

铜牌题　(1) α 是锐角，且 $\sin\alpha = \cos 40°$，则 $\alpha =$____度.

银牌题　(2)若 $\sin\alpha = 2m-3$（α 为锐角），则 m 的取值范围是____.

铜牌题　(3)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$AB = \sqrt{5}$ cm，$BC = \sqrt{3}$ cm，则 $\sin A =$____，$\cos A =$____.

银牌题　(4)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\sin B = \frac{2}{3}$，$AB = 6$，则 $AC =$____.

铜牌题　(5) $\sin^2 35° + \cos^2 35° =$____.

铜牌题　(6)计算 $\frac{\sin 30° - \cos 45°}{\cos 30° - \sin 45°} =$____.

铜牌题　(7) $\sqrt{(\sin 20° - 1)^2} + \cos 70° =$____.

铜牌题　(8) $\cos 32°12' = 0.8462$，且 $2'$ 的修正值为 3，则 $\cos 32°14' =$____.

银牌题　(9)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，边 $a : b = 3 : 1$，则 $\sin A =$____，$\cos B =$____.

铜牌题　(10) $\cos 50° - \sin 50°$____0.

铜牌题　(11) $\frac{\sqrt{1-\sin^2 20°}}{\cos 20°} =$____.

铜牌题　(12)已知 $\alpha + \beta = 90°$，$\sin\beta = \frac{4}{5}$，则 $\cos\alpha =$____.

铜牌题　(13)已知 $\cos 19°30' = 0.9426$，则 $\sin 70°30' =$____.

银牌题　(14)若 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\sin(90° - \alpha) =$____.

银牌题　(15)已知 α 为锐角，$\cos\alpha = \frac{2}{3}$，则 $\sin\alpha =$____.

3. 选择题

铜牌题　(1)下列关系式正确的是：　　( )

A. $\sin 28° = \cos 72°$；　B. $\cos 35° = \cos 55°$；

C. $\sin 43° = \cos 47°$；　D. $\cos 64° = \sin 36°$.

银牌题　(2)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$b = \sqrt{3}$，则 a 的值为：　　( )

A. $\sqrt{3}$；　B. 1；　C. 2；　D. 3.

银牌题　(3)如果 α 为锐角，则 $\sin\alpha + \cos\alpha$ 的值为：　　( )

A. 小于 1；　B. 等于 1；　C. 大于 1；　D. 不能确定.

银牌题　(4)在 Rt$\triangle ABC$ 中，下列各式中不一定成立的是：　　( )

A. $\cos A = \sin B$；　B. $\sin A = \cos B$；

C. $\sin A = \sin B$；　D. $\sin(A+B) = \sin C$.

银牌题　(5)当锐角 $A>30°$时，$\cos A$ 的值为：　　　　(　　)

A. 小于$\frac{1}{2}$；　B. 大于$\frac{1}{2}$；　C. 小于$\frac{\sqrt{3}}{2}$；　D. 大于$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

银牌题　4. 求下列条件的角($0°\leqslant A\leqslant 90°$)：

(1)$2\cos A=\sqrt{3}$；　(2)$2\cos A=1$；　(3)$\frac{2}{\cos A}-\sqrt{8}=0$；

(4)$2\sin^2 A-\sqrt{3}\sin A=0$；　(5)$\cos A(\cos A-1)=0$.

银牌题　5. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，

(1)若 $\sin A=\frac{5}{13}$，求 $\cos A$ 的值；　(2)若 $\cos A=\frac{8}{17}$，求 $\sin A$ 的值.

6.2 正切和余切

典型例题分析

铜牌题　【例 1】 求下列各式的值.

(1)$\frac{tg60°-tg30°}{tg45°+tg60°tg30°}$；　(2)$tg44°\cdot tg45°\cdot tg46°-\sin^2 25°-\sin^2 65°$.

分析：(1)题要注意繁分式化简.

(2)题要注意应用"$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$"和"$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$"的结论.

解：(1)$\frac{tg60°-tg30°}{tg45°+tg60°tg30°}=\frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

(2)$tg44°\cdot tg45°\cdot tg46°-\sin^2 25°-\sin^2 65°=tg44°\cdot tg45°\cdot ctg44°-\sin^2 25°-\cos^2 25°$

$=tg45°\cdot tg44°\cdot ctg44°-(\sin^2 25°+\cos^2 25°)=1-1=0$.

铜牌题　【例 2】 已知：在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$tgA=\frac{1}{2}$，求$\angle B$ 的四个三角函数值.

分析：(1)将 $tgA=\frac{1}{2}$转化为三边之比，利用勾股定理，求出第三边所占的份数，见解法一.

(2)用同角三角函数关系求，见解法二.

解法一：$\because\angle C=90°$，$tgA=\frac{1}{2}$，$\therefore tgA=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$，设 $BC=K$，则 $AC=2K$，

$\therefore AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{K^2+(2K)^2}=\sqrt{5}K$.

$\therefore\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{2K}{\sqrt{5}K}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$，　$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{K}{\sqrt{5}K}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$tgB=\frac{AC}{BC}=\frac{2K}{K}=2$，　$ctgB=\frac{BC}{AC}=\frac{K}{2K}=\frac{1}{2}$.

解法二：$\because tgA=\frac{1}{2}$，$tgA=\frac{\sin A}{\cos A}$，$\therefore\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{2}$，$\therefore 2\sin A=\cos A$，

$\because\cos A>0$，　而 $\cos^2 A+\sin^2 A=1$，　$\therefore\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$，

$\therefore 2\sin A=\sqrt{1-\sin^2 A}$，　$\therefore 4\sin^2 A=1-\sin^2 A$，　$\therefore 5\sin^2 A=1$，

又$\because\sin A>0$，　$\therefore\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，　$\therefore\cos A=2\sin A=\frac{2}{5}\sqrt{5}$，

$\because\angle A+\angle B=90°$，　$\therefore\sin B=\cos A=\frac{2}{5}\sqrt{5}$，$\cos B=\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$$\mathrm{tg}B=\mathrm{ctg}A=\frac{1}{\mathrm{tg}A}=2,\quad \mathrm{ctg}B=\frac{1}{\mathrm{tg}B}=\frac{1}{2}.$$

银牌题 【例 3】 如图 6－3，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，已知$\angle BDC=30°$，$\angle A=15°$，求 75°角的四个三角函数值.

分析：要求 75°角的三角函数值，但图中并无 75°角，发现$\angle ADB=150°=2\times75°$，作 $DE\perp AB$，因$\triangle ADB$ 是等腰三角形，则$\triangle DBE$ 是直角三角形，$\angle BED=90°$，$\angle BDE=75°$，$BE=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore \sin75°=\frac{BE}{BD}$，$\cos75°=\frac{ED}{BD}$，

$\mathrm{tg}75°=\frac{BE}{ED}$，$\mathrm{ctg}75°=\frac{ED}{BE}$.

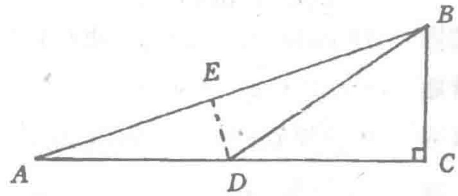

图 6－3

解：设 $BC=1$，则 $BD=2$，$AC=2+\sqrt{3}$，

$AB=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$BE=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，

$ED=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \sin75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos75°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\mathrm{tg}75°=2+\sqrt{3}$，$\mathrm{ctg}75°=2-\sqrt{3}$.

银牌题 【例 4】 已知 $\mathrm{tg}\alpha=2$，求$\frac{4\cos\alpha-\sin\alpha}{2\cos\alpha+3\sin\alpha}$的值.

分析：方法一，从已知 $\mathrm{tg}\alpha=2$ 出发，可把 $\mathrm{tg}\alpha=2$ 化成$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$，得到 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，再代入所要求的分式中，消去 $\cos\alpha$.

方法二，由于 $\cos\alpha\neq0$，所以分式的分子、分母同时除以 $\cos\alpha$，所求的分式用 $\mathrm{tg}\alpha$ 来表示，再把 $\mathrm{tg}\alpha=2$ 代入分式中求值.

解法一：$\because \mathrm{tg}\alpha=2$，$\therefore \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$，$\therefore \sin\alpha=2\cos\alpha$，$\therefore$ 原式$=\frac{4\cos\alpha-2\cos\alpha}{2\cos\alpha+6\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{8\cos\alpha}=\frac{1}{4}$.

解法二：原式$=\dfrac{\frac{4\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{4-\mathrm{tg}\alpha}{2+3\mathrm{tg}\alpha}=\frac{4-2}{2+3\times2}=\frac{1}{4}$.

课后练习题

铜牌题 1. 判断题(对的画“√”，错的画“×”)

(1)$\mathrm{tg}30°\cdot\mathrm{tg}60°=1$. (　　)

(2)$\mathrm{tg}30°+\mathrm{tg}60°=\mathrm{tg}90°$. (　　)

(3)$\mathrm{tg}20°+\mathrm{ctg}20°=1$. (　　)

(4)$\mathrm{tg}48°37'<\mathrm{ctg}41°22'$. (　　)

(5)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\mathrm{tg}A\cdot\sin A=\cos A$. (　　)

2. 填空题

铜牌题 (1)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=5$，$BC=3$，则 $\mathrm{tg}A=$________，$\mathrm{ctg}A=$________，$\mathrm{tg}B=$________，$\mathrm{ctg}B=$________.

银牌题 (2)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\mathrm{tg}B=2$，$AB=\sqrt{5}$ cm，则 $AC=$________ cm.

铜牌题　(3)在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=8cm$，$BC=6cm$，则$\sin A=$________，$\cos A=$________，$\operatorname{tg}A=$________，$\operatorname{ctg}A=$________.

银牌题　(4)在直角三角形中，斜边AB等于直角边AC的三倍，则$\sin A=$________，$\cos A=$________，$\operatorname{tg}A=$________，$\operatorname{ctg}A=$________.

银牌题　(5)已知$Rt\triangle ABC$中两锐角为A、B，则$\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}=$________.

铜牌题　(6)$\dfrac{\operatorname{tg}60°+\operatorname{ctg}45°}{\sin30°+\cos30°}=$________.

银牌题　(7)$\cos50°$、$\operatorname{tg}50°$、$\operatorname{ctg}50°$由小到大的顺序是________.

银牌题　(8)$\operatorname{tg}1°\cdot\operatorname{tg}2°\cdot\operatorname{tg}3°\cdots\cdots\operatorname{tg}87°\cdot\operatorname{tg}88°\cdot\operatorname{tg}89°=$________.

银牌题　(9)已知$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$，则$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=$________.

银牌题　(10)已知$\operatorname{tg}\alpha=3$，则$\dfrac{1}{\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}$的值为________.

3. 选择题

铜牌题　(1)在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=5$，$AB=13$，则$\operatorname{tg}A$等于：（　　）

A. $\dfrac{5}{12}$；　B. $\dfrac{12}{5}$；　C. $\dfrac{5}{13}$　D. $\dfrac{13}{5}$.

铜牌题　(2)在$Rt\triangle ABC$中，如果两条直角边的长都扩大一倍，那么锐角A的各个三角函数值：（　　）

A. 都扩大一倍；　B. 都缩小一半；　C. 都不变；　D. 无法确定.

银牌题　(3)当$\angle A$为锐角，且$\operatorname{ctg}A<\sqrt{3}$时，$\angle A$：（　　）

A. 小于30°；　B. 大于30°；　C. 小于60°；　D. 大于60°.

铜牌题　(4)$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\cos A\cdot\operatorname{ctg}B$的值等于：（　　）

A. $\dfrac{a}{b}$；　B. $\dfrac{a}{c}$；　C. $\dfrac{b}{c}$；　D. $\dfrac{b}{a}$

银牌题　(5)已知$A+B=90°$，下列各式不成立的是：（　　）

A. $\operatorname{tg}(90°-B)=\operatorname{tg}A$；　B. $\cos A=\sin B$；　C. $\sin(90°-A)=\cos B$；　D. $\operatorname{ctg}B=\operatorname{tg}A$.

银牌题　(6)菱形$ABCD$的对角线$AC=10cm$，$BD=6cm$，那么$\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$等于：（　　）

A. $\dfrac{3}{5}$；　B. $\dfrac{4}{5}$；　C. $\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$；　D. $\dfrac{5\sqrt{34}}{34}$.

银牌题　(7)一个三角形三边之比为$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$，则最小角的余切值为：（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　B. $\sqrt{2}$；　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

银牌题　(8)已知$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$是$\triangle ABC$的三个内角，则$\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}$等于：（　　）

A. 90°；　B. $\operatorname{ctg}\dfrac{A+B}{2}$；　C. $\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$；　D. $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$.

4. 解答题

银牌题　(1)在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，若$AB=4AC$，求：$\angle B$的四个三角函数值.

银牌题　(2)已知：$2+\sqrt{3}$是方程$x^2-4x+\operatorname{tg}\theta=0$的一个实根，求三角形内角$\theta$.

银牌题　(3)求锐角α的值：$\operatorname{tg}^2\alpha-(1+\sqrt{3})\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{3}=0$.

单元练习题

1. 判断题(正确的画"√",错误的画"×")

铜牌题　(1)已知 α_1、α_2 都是锐角,若 $\alpha_1 \neq \alpha_2$,那么 $\sin\alpha_1 \neq \sin\alpha_2$.　(　　)

铜牌题　(2)化简 $\sqrt{(\cos\alpha-1)^2}=\cos\alpha-1$($\alpha$ 为锐角).　(　　)

铜牌题　(3)如果 α、β 均为锐角,且 $\alpha<\beta$,那么 $\sin\alpha<\sin\beta$.　(　　)

铜牌题　(4)已知 $0°<\alpha<45°$,则 $\sin\alpha<\cos\alpha$.　(　　)

2. 填空题

铜牌题　(1)若 $\cos\alpha=\sin30°$,则 $\alpha=$________.

铜牌题　(2)设 α、β 均为锐角,且 $\sin\alpha=\cos\beta$,则 $\alpha+\beta=$________.

铜牌题　(3)查表得 $\sin46°24'=0.7242$,又查得 $2'$ 的修正值为 4,那么 $\sin46°26'=$________.

铜牌题　(4)把下列各函数用"<"号连接起来:

$\sin60°,\cos45°,\mathrm{tg}45°,\mathrm{ctg}30°$. ________ < ________ < ________ < ________.

铜牌题　(5)$\triangle ABC$ 中,$\angle A=90°$,AD 为 BC 边上的中线 $AD=5$,$AC=8$,则 $\mathrm{tg}B=$________.

铜牌题　(6)在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$a=8$,$b=4\sqrt{5}$,则 $\sin A+\sin B+\sin C=$________.

铜牌题　(7)$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{(\quad)}$,$\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{(\quad)}{\sin\alpha}$,$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=$________.

银牌题　(8)已知方程 $2x^2-2\sqrt{2}x+\mathrm{tg}^2\alpha=0$ 有两个相等的实数根,则锐角 α 的度数是____.

银牌题　(9)已知 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$($\theta$ 为锐角),那么 $\cos^2\theta+\cos^4\theta=$________.

铜牌题　(10)$\dfrac{\cos^2 60°}{1-\sin^2 60°}+5\mathrm{tg}0°+2\mathrm{ctg}30°=$________.

铜牌题　(11)$\cos90°+\dfrac{\sin30°}{1+\sin30°}+\mathrm{ctg}^2 45°-\mathrm{tg}^2 60°=$________.

3. 选择题

铜牌题　(1)下列式子成立的是:　(　　)

A. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\sin B=\dfrac{a}{c}$;　　B. $\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{ctg}A=1$;

C. $\cos90°>\cos30°$;　　D. $\mathrm{ctg}60°-\mathrm{tg}60°>0$.

铜牌题　(2)化简 $\sqrt{(\sin20°-\cos20°)^2}$ 等于　(　　)

A. 0;　B. $\sin20°-\cos20°$;　C. $\cos20°-\sin20°$;　D. $\pm(\sin20°-\cos20°)$.

银牌题　(3)在等腰三角形 ABC 中,一腰上的高为 $\sqrt{3}$,这条高与底边的夹角为 30°,则 $\triangle ABC$ 的面积为:　(　　)

A. $\sqrt{3}$;　B. $2\sqrt{3}$;　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;　D. $3\sqrt{3}$.

银牌题　(4)等腰三角形底边长为 10cm,周长为 36cm,那么底角的正弦值是　(　　)

A. $\dfrac{5}{13}$;　B. $\dfrac{12}{13}$;　C. $\dfrac{10}{13}$;　D. $\dfrac{5}{12}$.

铜牌题　(5)若 $0°<\alpha<90°$,且 $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{4}$,则角 α 值等于:　(　　)

A. $30°$；　B. $45°$；　C. $60°$；　D. $30°$或 $60°$.

银牌题　(6)设$\angle A=45°$，则$\dfrac{\cos(A+45°)+\text{tg}A}{\sin(A-15°)}$的值为：　(　　)

A. 3；　B. 2；　C. 5；　D. $\dfrac{1}{3}$.

铜牌题　(7)$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，则下面式子不成立的是：　(　　)

A. $\text{tg}A\cdot\text{ctg}A=1$；　B. $a^2=c^2-b^2$；　C. $\sin A=\dfrac{a}{c}$；　D. $c=b\cdot\cos A$.

银牌题　(8)已知锐角 A，则化简$\dfrac{\cos A\cdot\text{tg}A}{\sin A\cdot\text{ctg}A}$是：　(　　)

A. $\sin A$ ；　B. $\cos A$；　C. $\text{tg}A$；　D. $\text{ctg}A$.

铜牌题　(9)若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，则锐角 α 的值是：　(　　)

A. $30°$；　B. $45°$；　C. $60°$；　D. 不能确定.

银牌题　(10)已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=m$，则 $\sin\alpha\cos\alpha$ 的值是：　(　　)

A. $1-m^2$；　B. $1+m^2$；　C. $\dfrac{1-m^2}{2}$；　D. $\dfrac{1+m^2}{2}$.

铜牌题　(11)$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 40°}}{\sin 50°}$的值为：　(　　)

A. 1；　B. $\text{tg}40°$；　C. $\text{ctg}40°$；　D. $\text{tg}50°$.

铜牌题　(12)已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\alpha$ 为锐角，则 $\text{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\text{tg}^2\alpha}$的值为：　(　　)

A. $\sqrt{2}$；　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　C. 2；　D. $\dfrac{3}{2}$.

铜牌题　(13)若 $\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}35°=1$，则锐角 α 的度数等于：　(　　)

A. $35°$；　B. $(\dfrac{1}{35})°$；　C. $55°$；　D. $(\dfrac{1}{55})°$.

铜牌题　(14)下列结论中正确的是：　(　　)

A. $\sin 10°+\sin 20°=\sin 30°$；

B. 对锐角 α 必有 $\sin\alpha>\cos\alpha$；

C. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\text{tg}A\cdot\sin A=\cos A$；

D. 所有的锐角三角函数值都是正数.

银牌题　(15)直角三角形中锐角 A 的对边长 y 与邻边长 x 恰好是方程$|x-3|+|y-4|=0$的一个解，那么 $\sin A:\cos A$ 的值是：　(　　)

A. $\dfrac{3}{5}$；　B. $\dfrac{4}{5}$；　C. $\dfrac{4}{3}$；　D. $\dfrac{3}{4}$.

银牌题　(16)设 $0°<x<30°$，则下列不等式成立的是：　(　　)

A. $\sin(x+30°)<\sin x$；

B. $\cos(-x+30°)<\cos 30°$；

C. $\sin(-x+30°)>\sin 30°$；

D. $\cos(x+30°)<\cos x$.

银牌题　(17)在下列命题中，错误的是：　(　　)

A. 对于任意锐角都有 $0<\sin A<1$；　B. 锐角 $A>30°$时，$\cos A$ 的值大于$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

C. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，若 $\sin A>\sin B$，则 $A>B$；

D. 若 α 是锐角且 $\text{tg}\alpha=\text{tg}40°$，则 $\alpha=50°$.

铜牌题　(18)在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=105°$，$\angle B=45°$，$\text{tg}c=$　(　　)

A. $\frac{1}{2}$；　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$；　C. 1；　D. $\sqrt{3}$.

银牌题　(19)已知 α、β 都是锐角，且 $\cos\alpha>\cos\beta$，那么：　(　)

A. $\sin\alpha<\sin\beta$；　B. $\sin\alpha>\sin\beta$；　C. $tg\alpha>tg\beta$；　D. $ctg\alpha<ctg\beta$.

银牌题　(20)已知 α 为锐角，且 $\frac{1}{2}<\cos\alpha<\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 α 的取值范围是：　(　)

A. $0°<\alpha<30°$；　B. $60°<\alpha<90°$；　C. $45°<\alpha<60°$；　D. $30°<\alpha<45°$.

铜牌题　(21)若 $\frac{\sin x}{\cos 27°}=1$，那么锐角 x 是：　(　)

A. 27°；　B. 63°；　C. 27°或 63°；　D. 不能确定.

银牌题　(22)在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$ 于 D，已知 $BC=a$，$\angle B=\alpha$，那么 AD 等于：　(　)

A. $a\sin\alpha\cdot tg\alpha$；　B. $a\sin\alpha\cdot\cos\alpha$；　C. $a\sin^2\alpha$；　D. $a\cdot\cos^2\alpha$.

4. 解答题

银牌题　(1)在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，用锐角三角函数定义验证 $tg^2A+1=\frac{1}{\cos^2A}$成立.

银牌题　(2)计算：$(1+\sin45°-\cos30°)(1-\sin45°-\cos30°)$.

银牌题　(3)计算：$\sqrt{(\cos45°-1)^2}+|1-ctg30°|$的值.

银牌题　(4)解关于 x 的方程：$x^2+\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin60°\cdot x+\sqrt{3}\cdot ctg60°=0$.

银牌题　(5)求值：$(2\cdot ctg60°)^{101}\cdot(\frac{1}{2}ctg60°)^{100}$.

银牌题　(6)已知：$2-\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-5x\cdot\sin\alpha+1=0$ 的一个根，且 α 为锐角，求 $\cos\alpha$、$ctg\alpha$ 的值.

银牌题　(7)已知方程 $2x^2+(4\sin\theta)x+1=0$ 有两个相等的实数根，求 θ 的度数$(0<\theta<90°)$.

银牌题　(8)已知：$\cos\theta=\sqrt{\sin30°}$，求 $tg\theta$(θ 为锐角).

银牌题　(9)已知：$ctg\theta=2$，求$\frac{3\sin\theta+\cos\theta}{4\cos\theta-5\sin\theta}$的值(其中 θ 为锐角).

银牌题　(10)在 $\triangle ABC$ 中，已知$(\sin A-1)^2+(\frac{1}{2}-\cos B)^2=0$，求$\angle C$ 的度数.

银牌题　(11)已知 $9\sin^2\theta=4$，求 $\cos\theta$、$tg\theta$ 的值(θ 为锐角).

银牌题　(12)已知 $\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$，求：

①$(tg\alpha-1)^2$ 的值(α 为锐角)；　②若 $tg\beta=tg\alpha-1$，证明：$\beta=60°$(β 的锐角).

银牌题　(13)已知 $ctg\alpha=2$，求$\frac{4\cos\alpha-\sin\alpha}{2\cos\alpha+3\sin\alpha}$的值.

银牌题　(14)已知 $tg\beta$ 是 $\sqrt{2}$ 和$\frac{\sqrt{2}}{2}$的比例中项，求锐角 β 的度数.

银牌题　(15)已知 α、β 为锐角，且 $tg\alpha=0.4579$，$ctg\beta=0.5497$，不查表，求证 $\alpha+\beta<90°$.

银牌题　(16)已知方程 $4x^2-2(m+1)x+m=0$ 的两根是一直角三角形的一个锐角的正弦和余弦，求 m 的值.

银牌题　(17)已知：$\sin A$ 和 $\sin B$ 是方程 $4x^2-2mx+m-1=0$ 的两个实根，且$\angle A$、$\angle B$ 是直角三角形的锐角，求：①m 的值；②$\angle A$ 与$\angle B$ 的度数.

(银)牌题　(18)设△ABC中，a、b、c分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边，且一元二次方程$2ax^2+2bx+c=0$有不等实根x_1、x_2，又满足$|x_1-x_2|=1$，$2a=c$，求$\angle B$的度数和$\sin C$的值.

二、解直角三角形

基础知识综述

1. 解直角三角形的依据：

在直角三角形ABC中，如果$\angle C=90°$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c，那么

(1)三边之间的关系：$a^2+b^2=c^2$(勾股定理)；

(2)锐角之间的关系：$\angle A+\angle B=90°$；

(3)边角之间的关系：$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，

$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}$，$\operatorname{ctg}A=\frac{b}{a}$，$\sin B=\frac{b}{c}$，$\cos B=\frac{a}{c}$，$\operatorname{tg}B=\frac{b}{a}$，$\operatorname{ctg}B=\frac{a}{b}$；

(4)面积：$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab$.

2. 直角三角形ABC的解法可归纳为四种类型(如表，设$\angle C=90°$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c).

类　型	已知条件	解　　法
两边	两直角边a、b	$c=\sqrt{a^2+b^2}$，$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}$，$B=90°-A$
	一直角边a，斜边c	$b=\sqrt{c^2-a^2}$，$\sin A=\frac{a}{c}$，$B=90°-A$
一边一角	一直角边a，锐角A	$B=90°-A$，$b=a\operatorname{ctg}A$，$c=\frac{a}{\sin A}$
	斜边C，锐角A	$B=90°-A$，$a=c\cdot\sin A$，$b=c\cdot\cos A$

3. 在测量题中，要注意下列一些概念：

(1)仰角和俯角：在同一铅垂面内视线和水平线间的夹角在水平线之上的叫做仰角，在水平线之下的叫做俯角.

(2)坡度：坡面铅直高度与水平宽度之比叫做坡度(或叫做坡比)，常用字母i表示.

4. 常用辅助线：

(1)作高线，将斜三角形中的边角计算问题转化为解直角三角形问题.

(2)连结对角线或作垂线，将四边形中有关边角的计算问题转化为解直角三角形的问题.

6.3 解直角三角形

典型例题分析

【例1】 如图6－4，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A=60°$，$a+b=14$，解这个直角三角形.

分析：利用$\angle A+\angle B=90°$，求$\angle B=30°$，再利用$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}$和$a+b=14$，解方程组求$a$、$b$的

值.

解：$\because \angle A=60°, \angle C=90°, \therefore \angle B=30°$，又$\because \operatorname{tg}A=\frac{a}{b}$，$\therefore \frac{a}{b}=\sqrt{3}$，

$\therefore a=\sqrt{3}b$ (1)，$\because a+b=14$ (2)，

把(1)代入(2)解得：$b=7(\sqrt{3}-1)=7\sqrt{3}-7$，$\therefore a=\sqrt{3}b=21-7\sqrt{3}$.

又$\because \angle B=30°$，$\therefore c=2b=14\sqrt{3}-14$.

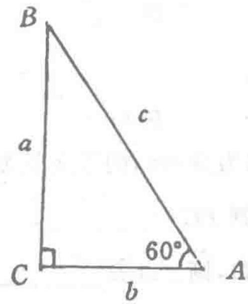

图 6—4

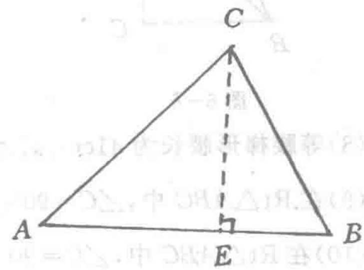

图 6—5

【例 2】 如图 6—5，在$\triangle ABC$中，已知$AB=\sqrt{3}$，$\angle A=45°$，$\angle B=60°$，求BC边的长(计算过程中不得直接用75°角的三角函数值，结果可保留根号).

分析：图中没有直角三角形，过C点作$CE\perp AB$于E，得两个直角三角形，分别解这两个直角三角形，通过列方程求得BC.

解：作$CE\perp AB$，垂足为E，设$BE=x$，则由$\angle B=60°$，知$CE=\sqrt{3}x$，$BC=2x$，又由$\angle A=45°$，有$AE=CE=\sqrt{3}x$，而$AE+EB=AB=\sqrt{3}$.

$\therefore \sqrt{3}x+x=\sqrt{3}$，$\therefore x=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$，$\therefore BC=2x=3-\sqrt{3}$.

课后练习题

1. 填空题

铜牌题 (1)在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，则______$=a^2+b^2$，$A+B=$______，$\sin A=$______，$\cos A=$______，$\operatorname{tg}A=$______，$\operatorname{ctg}A=$______.

铜牌题 (2)在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，已知c、A，则$a=$________，$b=$________；已知b、A，则$a=$________，$c=$________，已知a、b，则$\operatorname{tg}A=$________，$\operatorname{ctg}A=$________.

铜牌题 (3)如图 6—6，$AD=DC=BC=1$，$\angle C=90°$，则$\sin\alpha=$______，$\cos\alpha=$______，$\operatorname{tg}\alpha=$______，$\operatorname{ctg}\alpha=$______；$\sin\beta=$______，$\cos\beta$______，$\operatorname{tg}\beta=$______，$\operatorname{ctg}\beta=$______.

铜牌题 (4)已知在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=b$，$BC=6$，$\operatorname{tg}B=\frac{4}{3}$，则$b=$________.

铜牌题 (5)在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$a=8\sqrt{2}-8$，$b=8\sqrt{2}-8$，则$\angle A=$________，$a+c=$________.

银牌题 (6)$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，一锐角的正切为0.75，其周长为24，则三边长分别为________.

银牌题 (7)如图 6—7，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$于D，已知$AC=3$，$AB=5$，则$\operatorname{tg}\angle BCD=$________.

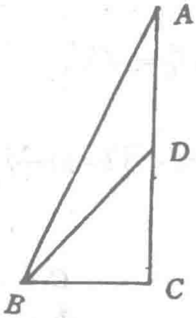

图 6—6

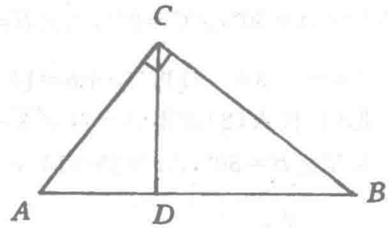

图 6—7

银牌题　(8)等腰梯形腰长为 41cm，高为 40cm，上下底之和为 90cm，则下底长为________.

铜牌题　(9)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=5$，$\sin A=\frac{4}{5}$，则 $BC=$________.

铜牌题　(10)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\cos(90°-B)$，则$\angle A$ 是________度.

铜牌题　(11)等腰三角形底边为 2，面积为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，则它的三个内角分别为________.

铜牌题　(12)在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$c=2$，$\mathrm{tg}A=\frac{1}{2}$，则 $b=$________.

铜牌题　(13)梯形 $ABCD$ 中，腰长 $AB=4$，底角$\angle B=60°$，$\angle C=45°$，则梯形的腰 $CD=$____.

银牌题　(14)在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=60°$，且 $a+b=3+\sqrt{3}$，则 $a=$________，$b=$________.

铜牌题　(15)若一斜坡的坡度 $i=1:1.5$，坡角为 α，则 $\sin\alpha=$________.

铜牌题　(16)等腰$\triangle ABC$ 中，AD 是底边 BC 上的高，且顶角 $A=120°$，高 $AD=8$，则$\angle B=$________，$AB=$________，$BC=$________.

银牌题　(17)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$b=6$，若角 A 的平分线长为 $4\sqrt{3}$，则 $a=$________，$c=$________，$\angle A=$________.

铜牌题　(18)已知在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$a=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}$，则$\angle A=$________，$b=$________.

铜牌题　(19)若等腰三角形的腰长为 6，底边长为 4，则它的底角的正弦值为________，它的顶角的一半的正弦值等于________.

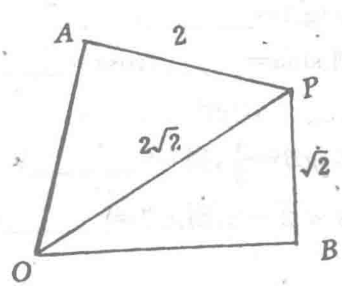

图 6—8

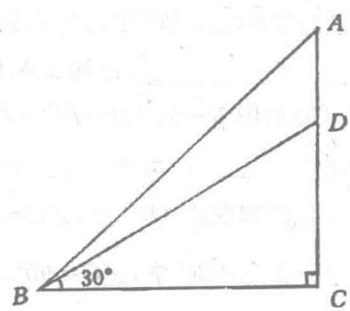

图 6—9

铜牌题　(20)已知一等腰三角形的三边长依次为 1、1、$\sqrt{3}$，则它的一个底角等于______度.