清华大学出版社“十三五”规划教材

高等农林院校大学数学系列教材

应用概率论与数理统计

（第2版）

张海燕 王学会 张文辉 张振荣 编著

清华大学出版社

高等农林院校大学数学系列教材

应用概率论与数理统计

（第2版）

张海燕　王学会　张文辉　张振荣　编著

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书内容包括随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及统计量、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等，并介绍了使用MATLAB软件做统计计算的基本方法.

本书强调基本概念的阐释，语言表达简洁易懂，难度适宜. 本书是清华大学出版社"十三五"规划教材，可作为高等院校非数学专业本科生的概率论与数理统计教材，也可供具有相当数学基础(初等微积分知识)的读者自修之用.

图书在版编目(CIP)数据

应用概率论与数理统计/张海燕等编著. --2版. --北京：清华大学出版社，2016
高等农林院校大学数学系列教材
ISBN 978-7-302-42088-0

Ⅰ. ①应…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①概率论一高等学校一教材 ②数理统计一高等学校一教材　Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第264100号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：14.5　　**字　　数**：312千字
版　　次：2013年4月第1版　2016年1月第2版　　**印　　次**：2016年1月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：26.00元

产品编号：065399-01

前言

本书是在2013年出版的第1版的基础上修订的，自出版以来，我们经过两年半的教学实践，积累了一些经验，并采纳了使用本书的师生们的意见，修改了第1版中存在的不妥之处，使教材的质量得以提高.

在本版中，第2～4章增加了部分应用性更强、涉及面更广的例题；第3章新增了条件分布的简要介绍；第4章调整了部分知识的先后顺序；第5章对统计量的分布做了进一步的说明，使得该章更好地起到承上启下的作用；第9章删去MATLAB软件概述部分，仅介绍使用该软件进行统计计算的基本方法；由于新课改后，部分地区的高中文科学生没有学过排列组合的相关知识，为此，本版增加了一个附录，用尽量少的篇幅介绍有关排列组合的一些简单知识. 其余各章的部分例题也有少部分的改动，同时增删了部分习题，以使叙述更加顺畅，知识体系更趋完善，结构更加严谨，学生更加易于理解. 书中划 * 号部分为选学内容.

此次修订工作仍由天津农学院的教师完成，她们是：张海燕（第1、4章），王学会（第2、3章），张文辉（第7、8章），张振荣（第6、9章），孙丽洁（第5章、附录），张海燕完成了全书的统稿与审阅工作.

书中不妥之处，恳请读者批评指正.

编　者

2015年8月于天津

第1版前言

本教材是"科技部创新方法专项资助——科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践"的子课题"农林专业数学课程应用案例研究"(项目编号：2009IM010400-1-49)的研究成果，是清华大学出版社"十二五"规划教材.

概率论与数理统计是定量研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

概率论起源于17世纪中叶，最初是为了解答博弈问题，直到20世纪才建立起严格的学科体系.目前概率论的思想和数理统计方法越来越广泛地被人们所采用.概率论不仅在工业、农业等自然学科中有广泛的应用，在管理科学、医学及社会科学中也有广泛的应用.

概率论与数理统计的概念较为抽象、公式较为繁杂，学起来有一定难度.农科院校本科生教学计划中数学学时、特别是用于概率论与数理统计教学的学时较少，学生微积分基础参差不齐，需要根据学生程度编写一本适合农科院校教学计划的概率论与数理统计教材，以适应农科院校"扩招"后教学的需要，切实提高教学质量.为此本教材删去了较长的理论证明，尽量多作直观解释，同时增加了部分应用案例以及一些典型例题和习题讲解，努力做到有助于学生理解基本概念和基本原理.在全书最后增加一章"MATLAB软件的使用"，以引导学生尝试使用数学工具解决实际问题.

参加本教材编写工作的人员均为天津农学院的教师，她们是：张海燕(第1,4,5章)、王学会(第2,3章)、张文辉(第7,8章)和张振荣(第6,9章)，孙丽洁编录了附表，赵翠萍审阅了全书，张海燕完成了全书的统稿工作.

天津农学院基础科学学院及教材科的领导及教师在本教材的出版过程中给予了周到的服务和大力协助,在此一并致谢!

由于时间仓促,编者水平有限,不妥之处,殷切地盼望同行和读者批评指正.

编　者

2013年2月于天津

目录

第1章

随机事件及其概率

在自然界和人类社会活动中，人们观察到的现象大体可归结为两种类型. 一类是可事先预言的，即在准确地重复某些条件下，它的结果总是肯定的；或是根据它过去的状态，在相同条件下完全可以预言将来的发展. 我们将这类现象称为必然现象. 例如，在一个标准大气压下，水加热到100℃时必然沸腾；水稻的生长从播种到收割，总是经过发芽、育秧、长叶、吐穗、扬花、结实这几个阶段. 另一类现象是事前无法预言的，即在相同条件下重复进行试验，每次结果未必相同；或是知道它过去的状态，在相同条件下，未来的发展事前却不能完全肯定，我们将这类现象称为随机现象. 例如，新生婴儿可能是男或是女；在相同海况与气象条件下，某定点海面的浪高时起时伏.

概率论与数理统计是研究随机现象及其统计规律性的一门数学学科，概率论是整个随机理论的理论基础，它不仅研究随机现象的基本规律，还通过引入随机变量来刻画和描述随机现象，并在此基础上研究随机变量的规律性. 数理统计则是通过观测试验数据，根据建立在概率论基础上的统计原理，对挑选的试验数据进行分析、整理，进而对所研究的随机现象进行推断和预测.

随着科学技术的发展和社会的进步，概率论与数理统计的理论和方法已逐步渗透到自然科学和社会科学的各个领域，在工农业生产、科学研究、经营管理、质量控制、环境监测和抗灾救险等方面都发挥着越来越重要的作用.

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

例 1.1 抛掷一枚均匀硬币，落地后可能正面向上，也可能反面向上.

例 1.2 某射手向同一目标连续射击5次，目标被击中的次数可能是0,1,2,3,4,5中的任何一个数.

例 1.3 甲、乙二人进行3次定点投篮比赛，比分也会出现多种结果.

例 1.4 某急救中心在一个工作日内收到的求助信号，可能是任何一个非负整数.

以上各例描述的都是随机现象,也是自然界中普遍存在的一种现象.它们的共同特点是试验结果的不确定性.人们经过长期观察和深入研究发现,在随机现象表现的这种不确定性背后,却隐藏着内在的规律性.虽然在一次试验之前,人们无法准确预测究竟会出现哪种结果,但在相同条件下进行重复试验时,其结果却呈现出明显的统计规律性.

我们将通过随机试验来研究随机现象.

我们把试验作为一个广泛的术语,它包括各种各样的科学试验,甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验.下面举一些例子来说明:

E_1:掷一枚硬币,观察正面H、反面T出现的情况.

E_2:掷一枚骰子,观察其出现的点数.

E_3:记录电话交换台一分钟内接到的呼唤次数.

E_4:袋中装有红、白两色的球各若干,从袋中任取一球,观察其颜色.

E_5:一射手进行射击,直到击中目标为止,观察其射击的情况.

E_6:在一批灯泡中,任意抽取一只,测试其寿命.

以上6个试验的例子,其共同的特点是:试验可能结果不止一个,例如,E_1 有两种可能的结果,E_2 有6种可能的结果,E_6 可能的结果无穷多;试验前不能确定哪一个结果会出现,并且可以在相同的条件下重复进行试验.

我们将具有以下3个特征的试验称为随机试验,简称试验,常用 E 表示.

(1) 可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现,但试验结束时能确定出现的结果.

1.1.2 随机事件与样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 Ω.样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为样本点.

下面写出了1.1.1节中试验 $E_i(i=1,2,\cdots,6)$ 的样本空间 Ω_i.

Ω_1:$\{H,T\}$.

Ω_2:$\{1,2,3,4,5,6\}$.

Ω_3:$\{0,1,2,\cdots\}$.

Ω_4:{白色,红色}.

Ω_5:$\{+,-+,--+,\cdots\}$,这里"+"表示击中,"-"表示没有击中.

Ω_6:$\{t \mid t\geqslant 0\}$.

随机试验 E 的结果称为随机事件(即样本空间 Ω 的子集),简称事件.一般用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

由一个样本点组成的单点集,称为基本事件(不能再分解的事件).由若干基本事件组合而成的事件称为复合事件.

例如 E_2 中,事件"点数1"是由一个样本点组成的,它是 E_2 的基本事件;如事件"点数2","点数3",…,"点数6"都是基本事件.而出现偶数点,出现素数点都不止含有一个样本点,是复合事件而不是基本事件.在 E_3 中,事件 $A=\{10\}$ 表示该电话交换台一分钟内接到的呼唤次数为10次,它是样本空间 Ω_3 的子集,同时,它也是一个基本事件.

样本空间 Ω 包含所有的样本点,它是 Ω 自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为必然事件.在每次试验中都不发生的事件称为不可能事件,不可能事件也是 Ω 的子集,通常用 $\varnothing$ 表示.

例如 E_2 中,点数不大于6的事件是必然事件;点数大于6的事件是不可能事件.

1.1.3 事件间的关系与运算

设试验 E 的样本空间为 Ω,A,B,$A_k(k=1,2,\cdots)$是 E 的事件.

1. 包含与相等

若事件 A 发生必将导致事件 B 发生,则称事件 A 为事件 B 的子事件,记为 $A\subset B$.或称事件 B 包含事件 A.可用图1.1来直观地说明,图中矩形表示样本空间 Ω,圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B,事件 B 包含事件 A.

若事件 B 包含事件 A,且事件 A 也包含事件 B,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$.

2. 事件的和(或并)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生,这一事件称为事件 A 与事件 B 的和(或并),记为 $A\cup B$,如图1.2阴影部分所示.

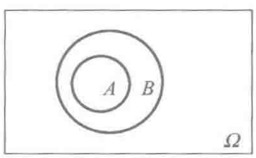

图 1.1

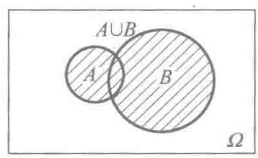

图 1.2

类似地,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$;称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的和事件.

3. 事件之差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件,记为 $A-B$.如图1.3中阴影部分所示.不难看出 $A-B=A-AB$.

4. 事件之积(或交)

事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件,记为 $A\cap B$ 或 AB.如图1.4阴影部分所示.

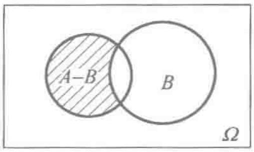

图 1.3

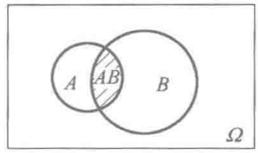

图 1.4

类似地可定义事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件：$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

5. 事件互不相容(或互斥)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 为互斥事件，也称事件 A 与事件 B 互不相容. 基本事件是互不相容的. 图 1.5 直观地表示了事件 A 与事件 B 是互不相容的.

对于互不相容事件的和 $A \cup B$，记作 $A+B$.

一般地，若一组事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中任意两个都互斥，称这组事件两两互斥.

6. 互为对立事件(或逆事件)

若事件 A 与事件 B 互斥，且其和事件为必然事件，即 $AB=\varnothing$，且 $A+B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B 是互为对立事件. 记为 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$. 即 $\overline{A}=\Omega-A$. 如图 1.6 所示.

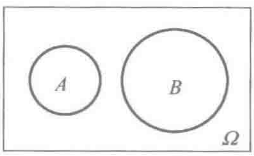

图 1.5

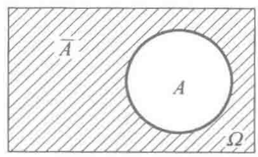

图 1.6

由以上定义可知：对立事件一定互斥，而互斥事件未必对立.

易见：$A-B=A-AB=A\overline{B}$，这在以后的概率计算中十分有用.

7. 互斥事件完备组

设 Ω 为某随机试验 E 的样本空间，如果一组事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足下列条件：

①$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，即 $A_iA_j=\varnothing (i\neq j)$；②$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$；则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个互斥事件完备组，或称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个剖分.

8. 事件之间的运算规则

与集合的运算类似，事件之间的运算满足下列规则.

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$AB=BA$；

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$；

(4) 德摩根(De Morgan)律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

(5) 包含律：$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$；$AB\subset A$，$AB\subset B$.

此外，对于多个随机事件，上述运算规则也成立.

从上面的图示中，我们还可以得到以下一些关系：$A-B\subset A$；$A\overline{B}$，$\overline{A}B$ 与 AB 两两互斥，$A=A\overline{B}\cup AB$，$A\cup B=A\overline{B}\cup B\overline{A}\cup AB=A\overline{B}\cup B=B\overline{A}\cup A=A\cup(B-A)$，…

有了上面一些表示法和事件的运算规则，给我们处理复杂事件带来很大方便.

例 1.5　设 A，B，C 为任意三个事件，试用 A，B，C 的运算关系表示下列各事件：①三个事件中至少一个发生；②没有一个事件发生；③恰有一个事件发生；④至多有两个事件发生；⑤至少有两个事件发生.

解　① $A\cup B\cup C$；

② $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$；

③ $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

④ $(A\overline{B}C+AB\overline{C}+\overline{A}BC)+(\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C})+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；

⑤ $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC=AB\cup BC\cup AC$.

1.2　随机事件的概率

研究随机现象，不仅要知道它可能出现哪些事件，更重要的是要知道各种事件出现的可能性大小，以揭示这些事件的内在统计规律. 因此，我们需要一个能够刻画事件出现可能性大小的数量指标，通常地，我们把用来刻画事件 A 出现可能性大小的数量指标称为事件 A 的概率，记为 $P(A)$.

1.2.1　古典概率

一般地，若随机试验 E 满足以下两个条件：

(1) 有限性. 试验的结果只有有限个，即试验产生有限个基本事件.

(2) 等可能性. 每个结果出现的可能性都相同，即每次试验中各个基本事件出现的可能性相同，则称随机试验 E 为古典概型.

定义 1.1　设随机试验 E 是含有 n 个基本事件的古典概型，事件 A 包含 k 个基本事件，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{样本空间中所含的基本事件总数}}=\frac{k}{n}.$$

在古典概型下定义的事件的概率为古典概率.

性质 1　对古典概率，有①$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；②$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$；③若 A 与 B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

例 1.6 盒子里有10只球,其中6只白球,4只红球.现从盒子里任取一球,问取到白球的概率是多少?

解 设 A 表示"任取一球为白色"的事件,则有 $P(A)=\frac{3}{5}$.

例 1.7 书架上有15本书,其中5本精装书,10本平装书.现随机地抽取3本,求至少抽到一本精装书的概率.

解 方法一 设 A 表示"随机抽取的3本书中至少有一本精装书"的事件,$A_i(i=1,2,3)$表示"3本书中恰有 i 本精装书"的事件$(i=1,2,3)$,则有 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$,所以

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_5^1C_{10}^2}{C_{15}^3}+\frac{C_5^2C_{10}^1}{C_{15}^3}+\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{67}{91}.$$

方法二 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{67}{91}$.

例 1.8 袋中有10只球,其中6只白球,4只红球.从袋中任取球两次,每次取一只.考虑两种情况:(1)第一次取一球观察颜色后放回袋中,第二次再取一球,这种情况叫做有放回抽样;(2)第一次取后不放回袋中,第二次再取一球,这种情况叫做不放回抽样.试分别就上述两种情况,求:取到2只球都是白球的概率;取到的2只球颜色相同的概率.

解 设 A,B 分别表示"取得的2只球都是白球","取得的2只球都是红球",于是"取得颜色相同的球"的事件为 $A+B$.

(1) 有放回抽样

试验的基本事件的总数共 $10\times10=100$ 种,事件 A 包含的基本事件数为 $6\times6=36$,事件 B 包含的基本事件数为 $4\times4=16$,于是

$$P(A)=\frac{36}{100}=\frac{9}{25},\quad P(B)=\frac{16}{100}=\frac{4}{25},\quad P(A+B)=\frac{36+16}{100}=\frac{13}{25}.$$

(2) 不放回抽样

试验的基本事件的总数共 $10\times9=90$ 种,事件 A 包含的基本事件数为 $6\times5=30$ 种,事件 B 包含的基本事件数为 $4\times3=12$ 种,故有

$$P(A)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3},\quad P(B)=\frac{12}{90}=\frac{2}{15},\quad P(A+B)=\frac{30+12}{90}=\frac{7}{15}.$$

例 1.9 将3个不同的球随机地放入4个不同的盒子中,试求每个盒子里至多有一个球的概率.

解 3个球中的每个球都可以放入4个盒子中的任何一个,共有4种不同的放法.3个不同的球放入4个盒子共有 $4\times4\times4=4^3$ 种放法,故试验的基本事件总数为64.

所求事件 A"每个盒子中至多有一个球"包含的基本事件数:第一个球有4种放法,第二个球有3种放法,第三个球有2种放法.于是,3个球放入4个盒子中去,每个盒子中至多有一个球的放法共有 $4\times3\times2=24$ 种.

故 $P(A)=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$.