



普通高等教育“十二五”规划教材  
大学本科数学类专业基础课程系列丛书

# 基础代数学选讲

郭聿琦 胡 洵 陈玉柱 编 著



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材  
大学本科数学类专业基础课程系列丛书

# 基础代数学选讲

郭聿琦 胡 洵 陈玉柱 编著



科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书定位在“抽象代数”的基础之上,对相对基础的“多项式代数”和“线性代数”作出高观点和高能力下的审视,给出必要的、自然的、适当的加宽和加深,以夯实学生的知识基础,提高学生的数学素养.本书共分8讲,内容包括:数域上的多项式,(并涉及由其定义的)多项式函数,线性相关性(线性代数的核心概念),关于线性空间和线性变换的其他基本事项(联系更一般的模和模同态概念),线性空间的直和分解(模的特殊情形),初等变换,初等矩阵与矩阵的等价标准形的应用开发,矩阵分块运算的应用开发,自然数集与数学归纳法,非 Klein 意义上的“高观点下的初等数学”.全书语言简练,逻辑严密,注重培养学生的逻辑推理和抽象思维能力.

本书可作为高等院校数学类专业师生的教材,也可供其他科研工作者参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

基础代数学选讲/郭聿琦,胡洵,陈玉柱编著. —北京:科学出版社,2016.2  
(大学本科数学类专业基础课程系列丛书)  
普通高等教育“十二五”规划教材  
ISBN 978-7-03-047122-2

I. ①基… II. ①郭… ②胡… ③陈… III. ①代数-高等学校-教材  
IV. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 012129 号

责任编辑:胡海霞/责任校对:蒋 萍  
责任印制:霍 兵/封面设计:迷底书装

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号  
邮政编码:100717  
<http://www.sciencep.com>

**大厂东文印刷有限公司** 印刷  
科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2016 年 2 月第 一 版 开本:787×1092 1/16  
2016 年 2 月第一次印刷 印张:17  
字数:390 000

定价:45.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 前 言

高校数学类专业为该专业本科生高年级开设的“代数学选讲”课程,平行于“分析学选讲”和“几何学选讲”等非传统课程.

据悉,国内各类高校中的大多数数学类专业已稳定开设此类课程二十余年.中国科学技术大学龚昇教授生前就曾开设过“微积分学选讲”和“线性代数选讲”等课程;哈尔滨工业大学吴从炘教授也多次为本科生高年级开设“分析学选讲”课程(科学出版社2011年出版的《一元微积分深化引论》就是他开设此类课程的结晶之一).海外高校数学类本科的“ $\times\times$ -学文献选读”类课程早已是本科高年级的传统课程,其内容除自编外,还有引自相关文献的,学生也承担某些内容的报告,这类课程强调课堂讨论.笔者认为,上述海内外两种课程的共性,就应该是我们本书的写作“宗旨”.

本书为“代数学选讲”课程所编著,其素材大部分来源于作者在兰州大学、云南大学和西南大学开设“代数学选讲”十余次的手稿,其中也有部分内容是在国内近五十所院校为青年教师、研究生和七个数学基地班的学生,以及五次全国性高校教学研讨班做过的系列演讲内容.该课程位于若干代数学基础课程(诸如“高等代数”“抽象代数”)之后.它的开设宗旨定位在,对相对基础的内容做出高观点和高能力下的审视,给出必要的、自然的、适当的加宽和加深,以夯实学生的知识基础,提高学生的数学修养(特别是逻辑推理能力和抽象思维能力,这两种能力是代数学尤其善于承担培养的修养侧面),这对步入社会工作,或者继续深造,都至关重要.

“基础代数学选讲”主要涉及代数学中最基础的“多项式代数”和“线性代数”(联系到上述宗旨,这里的审视是在“抽象代数学”观点下的).目前,所见到的选讲类教材多局限于习题的分类解答,仅有微观处理,并无宏观审视,有浓厚的考研应试教育色彩,不吻合于上述宗旨.这里除了紧扣我们的宗旨,在内容上也处处展示着我们几十年来在代数学教学上的研究成果,对内容的加宽和加深也本着必要、自然和适当的原则,在内容的整合过程中,“高等代数”教材里的已有事实,在需要时,也予以罗列,但一般地,不再提供证明过程.凡此种种,读者皆能从本书各讲、节的标题上见其一斑.

本书适合作高校数学类专业“代数学选讲”的教材(当然,使用时可有所取舍)、相关教师的参考书,以及数学专业本科生考研的参考书.

本书的撰写得到兰州大学教务处、兰州大学萃英学院(国家“基础学科拔尖人才培养试验计划”的兰州大学执行单位)和数学与统计学院的大力支持和鼓励,特别地,得到兰州大学教务处“兰州大学教材基金”资助和兰州大学萃英学院出版基金的资助,我们在此表示衷心的感谢.本书的另两位作者胡洵、陈玉柱(在读博士生)参加了笔者在兰州大学为2010级、2011级和2012级萃英班开设的“代数学选讲”课程的教学工作,担任助教,主持讨论课

和习题课,为本书搜集并整理大量的有关资料.本书的打印、校对,除了后两位作者胡洵、陈玉柱,张迪博士、博士生梁星亮和刘祖华等也有所参与;另外,西南大学王正攀教授和访问学者冯爱芳副教授,通读了本书,提出不少中肯的修改建议,作者在此也向他们一并致以诚挚的谢意.

关于选讲类课程的建设 and 教材的撰写,当然“仁者见仁,智者见智”,不妥之处,欢迎批评指正.

郭聿琦

2015年9月于兰州大学

# 目 录

## 前言

|       |                                   |    |
|-------|-----------------------------------|----|
| 第 1 讲 | 数域上的多项式,(并涉及由其定义的) 多项式函数          | 1  |
| 1.1   | 关于不可约多项式的一个基本事实与若干特殊的不可约多项式       | 1  |
| 1.1.1 | 基本事实                              | 1  |
| 1.1.2 | 一类特殊的不可约多项式                       | 2  |
| 1.1.3 | 另一类特殊的不可约多项式                      | 3  |
| 1.1.4 | 矩阵的最小多项式                          | 3  |
| 1.2   | 非负多项式的一个特征                        | 9  |
| 1.3   | 关于多项式的 Fermat 大定理的一个初等证明          | 11 |
| 1.3.1 | 关于整数的 Fermat 大定理                  | 11 |
| 1.3.2 | 关于多项式的 Fermat 大定理                 | 12 |
| 1.4   | 关于一元多项式的若干注记                      | 15 |
| 1.4.1 | 带余除法                              | 16 |
| 1.4.2 | 余数定理的几种证明方法                       | 16 |
| 1.4.3 | 零点-因子定理及其应用                       | 17 |
| 1.4.4 | 多项式的最大(小) 公因(倍) 式                 | 20 |
| 1.5   | 对称与初等对称多元多项式                      | 21 |
| 1.5.1 | 多元多项式                             | 21 |
| 1.5.2 | 对称和初等对称多项式                        | 24 |
| 习题 1  |                                   | 28 |
| 第 2 讲 | 线性相关性(线性代数的核心概念)                  | 29 |
| 2.1   | 涉及线性相关性的几组基本事实                    | 29 |
| 2.2   | 替换定理及其等价刻画                        | 33 |
| 2.3   | 涉及线性变换(线性映射) 的线性相关性               | 38 |
| 2.4   | 涉及内积的(即 Euclid 空间里的) 线性相关性        | 47 |
| 2.5   | 关于矩阵秩概念的开发(I)                     | 51 |
| 2.6   | 从向量组的线性相关性到子空间组的线性相关性(详见第 4 讲)    | 55 |
| 习题 2  |                                   | 55 |
| 第 3 讲 | 关于线性空间和线性变换的其他基本事项(联系更一般的模和模同态概念) | 57 |
| 3.1   | 模(线性空间) 公理间的独立性及其他                | 57 |
| 3.1.1 | 模公理间的独立性                          | 57 |

|                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1.2 模的 Abel 群 .....                                                    | 64  |
| 3.1.3 线性空间上的线性变换 .....                                                   | 65  |
| 3.2 线性空间关于线性变换的不变子空间 .....                                               | 67  |
| 3.3 $n$ 维线性空间中 $n$ - 无关无限子集的若干特征及其存在性 .....                              | 71  |
| 3.4 $n$ 变数可逆线性齐次代换的两种几何解释及其联系 .....                                      | 75  |
| 3.4.1 解释为域 $\mathbb{F}$ 上 $n$ 维线性空间上的线性变换 .....                          | 75  |
| 3.4.2 $A$ 可逆时, 式 (3.5) 又可解释为域 $\mathbb{F}$ 上 $n$ 维线性空间上的坐标变换 .....       | 76  |
| 3.4.3 $A$ 可逆时, 式 (3.5) 的上两种解释的联系 .....                                   | 76  |
| 3.5 线性映射 (函数) 与其表示矩阵 (向量) (“矩阵秩概念的开发 (II)”,<br>用线性函数给出 3.3 节的一个补充) ..... | 77  |
| 3.5.1 线性映射与其表示矩阵 .....                                                   | 77  |
| 3.5.2 矩阵秩概念的开发 (II) .....                                                | 82  |
| 3.5.3 用线性函数给出 3.3 节的一个补充 .....                                           | 82  |
| 3.6 对偶空间与 “矩阵秩概念的开发 (III)” .....                                         | 84  |
| 3.6.1 对偶空间与对偶基底 .....                                                    | 84  |
| 3.6.2 对偶线性映射与矩阵秩概念的开发 (III) .....                                        | 86  |
| 3.6.3 空间与其对偶空间的对偶性 .....                                                 | 89  |
| 3.6.4 线性空间与其对偶空间的联系 .....                                                | 93  |
| 3.7 对称双线性度量空间与线性方程组可解的几何解释 .....                                         | 97  |
| 3.8 Euclid 空间与线性方程组的最小二乘法 .....                                          | 104 |
| 3.8.1 Euclid 空间的基本概念和基本事实 .....                                          | 105 |
| 3.8.2 向量到子空间的距离与线性方程组的最小二乘法 .....                                        | 111 |
| 3.9 具有对角形表示矩阵的线性变换 .....                                                 | 116 |
| 3.10 多重线性函数和行列式的 (一种) 公理化定义 .....                                        | 125 |
| 3.10.1 $d$ -行列式的定义及性质 .....                                              | 125 |
| 3.10.2 $d$ -行列式恰为通常的行列式 .....                                            | 127 |
| 3.10.3 $d$ -行列式 (作为行列式的公理化定义) 的直接应用 .....                                | 128 |
| 3.11 多重线性函数和 Binet-Cauchy 公式 .....                                       | 130 |
| 3.12 若干例题 .....                                                          | 134 |
| 习题 3 .....                                                               | 146 |
| 第 4 讲 线性空间的直和分解 (模的特殊情形) .....                                           | 148 |
| 4.1 线性空间的 (内) 直和与外直和 .....                                               | 148 |
| 4.1.1 线性空间的 (内) 直和与外直和 .....                                             | 148 |
| 4.1.2 用直和给出 3.3 节的另外两个补充 .....                                           | 157 |
| 4.2 线性空间涉及线性变换的若干直和结构 .....                                              | 158 |

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| 4.2.1 线性空间涉及线性变换的一类直和分解 .....             | 158 |
| 4.2.2 线性空间涉及线性变换的其他直和结构 .....             | 161 |
| 习题 4 .....                                | 164 |
| 第 5 讲 初等变换, 初等矩阵与矩阵的等价标准形的应用开发 .....      | 166 |
| 5.1 基本概念和基本事实的罗列 .....                    | 166 |
| 5.2 应用 1, 初等变换的若干应用 .....                 | 168 |
| 5.2.1 初等变换在求多项式的最大公因式和最小公倍式中的应用 .....     | 168 |
| 5.2.2 初等变换在线性方程组的通解公式建立中的应用 .....         | 173 |
| 5.2.3 初等变换在求标准正交基底中的应用 .....              | 177 |
| 5.3 应用 2, 等价标准形的若干应用 .....                | 183 |
| 5.4 应用 3, 初等矩阵在行列式的 (另一种) 公理化定义中的应用 ..... | 187 |
| 5.5 应用 4, 初等矩阵在由行列式归纳法定义导出行列式性质中的应用 ..... | 190 |
| 5.6 矩阵的广义逆与线性方程组的可解性和通解表达 .....           | 196 |
| 习题 5 .....                                | 199 |
| 第 6 讲 矩阵分块运算的应用开发 .....                   | 200 |
| 6.1 矩阵的分块运算 (含分块矩阵乘法法则的一种处理) .....        | 200 |
| 6.1.1 分块矩阵的概念 .....                       | 200 |
| 6.1.2 矩阵的分块运算 .....                       | 202 |
| 6.2 应用 1, 矩阵乘法的结合律和 Cramer 法则的证明 .....    | 204 |
| 6.2.1 矩阵乘法的结合律的证明 .....                   | 204 |
| 6.2.2 Cramer 法则的证明 .....                  | 205 |
| 6.3 应用 2, Cayley-Hamilton 定理的一个简化证明 ..... | 207 |
| 6.4 应用 3, 关于矩阵秩概念的开发 (IV) .....           | 210 |
| 6.5 应用 4, 其他例题 .....                      | 211 |
| 习题 6 .....                                | 214 |
| 第 7 讲 自然数集与数学归纳法 .....                    | 216 |
| 7.1 自然数集的 Peano 公理 .....                  | 216 |
| 7.2 关于“自然数集”的一个可供使用的“朴素理论” .....          | 224 |
| 7.3 数学归纳法用于“证明” .....                     | 225 |
| 7.4 数学归纳法用于“构造” .....                     | 234 |
| 7.5 数学归纳法用于“定义”和“思考” .....                | 237 |
| 7.6 集合上的偏序关系与 Zorn 引理 .....               | 238 |
| 习题 7 .....                                | 242 |
| 第 8 讲 非 Klein 意义上的“高观点下的初等数学” .....       | 244 |
| 8.1 对数的换底公式与分数的约分公式 .....                 | 244 |

|     |                                       |     |
|-----|---------------------------------------|-----|
| 8.2 | 根在复平面“单位圆(虚轴)”上的实不可约多项式在一般域上的推广 ..... | 246 |
| 8.3 | Fibonacci 数列的通项公式 .....               | 247 |
| 8.4 | $m \cdot n = (m, n)[m, n]$ .....      | 254 |
| 8.5 | Newton 二项公式 .....                     | 254 |
| 8.6 | 关于组合数的矩阵方法 .....                      | 255 |
| 8.7 | 初等几何的若干等式和不等式 .....                   | 258 |
| 8.8 | 若干高等数学事实的证明到初等数学已知事实的归结 .....         | 258 |
|     | 习题 8 .....                            | 259 |
|     | 参考文献 .....                            | 260 |
|     | 索引 .....                              | 262 |

## 第1讲 数域上的多项式, (并涉及由其定义的)

### 多项式函数

除了个别情形, 我们这里, 原则上只涉及数域上的一元多项式.

#### 1.1 关于不可约多项式的一个基本事实与若干特殊的不可约多项式

##### 1.1.1 基本事实

**引理 1.1.1** 令  $\mathbb{F}$  为数域,  $p(x), f(x) \in \mathbb{F}[x]$ ,  $p(x)$  首 1 (本质上不需要这一假设) 不可约. 则  $p(x)$  和  $f(x)$  在  $\mathbb{C}$  上有公根  $c$ , 即

$$p(c) = 0 = f(c)$$

当且仅当

$$p(x) \mid f(x).$$

因此, 关于任意  $b \in \mathbb{C}$ ,  $p(b) = 0$  意味着  $f(b) = 0$ .

**证明** 充分性显然. 下证必要性.

由  $p(x)$  为首 1 不可约多项式, 有

$$(p(x), f(x)) = \begin{cases} 1, \\ p(x), \quad \text{即 } p(x) \mid f(x). \end{cases}$$

若  $(p(x), f(x)) = 1$ , 则存在  $u(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$ , 使得

$$u(x)p(x) + v(x)f(x) = 1.$$

从而

$$0 = u(c)p(c) + v(c)f(c) = 1,$$

矛盾. 所以  $p(x) \mid f(x)$ . □

**推论 1.1.1** (1) 当引理 1.1.1 中的  $f(x)$  也在  $\mathbb{F}$  上不可约时,  $p(x)$  与  $f(x)$   $\mathbb{F}$ -相伴.

(2) 任意数域  $\mathbb{F}$  上两个不可约多项式不相伴当且仅当它们在  $\mathbb{C}$  上无公根; 从而,  $\mathbb{F}$  上任两个多项式 (在  $\mathbb{F}$  上) 的互素性不因域的扩大而改变.

**推论 1.1.2** 任意数域  $\mathbb{F}$  上的不可约多项式在  $\mathbb{C}$  上全无重根.

## 1.1.2 一类特殊的不可约多项式

**定理 1.1.1** 令  $\mathbb{F}$  为数域,  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ ,  $p(x)$  首 1 (本质上不需要这一假设) 不可约. 则存在  $c \in \mathbb{C}$ , 使得

$$p(c) = 0 = p(1/c) \quad (1.1)$$

当且仅当关于任意  $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , 有

$$p(b) = 0 \iff p(1/b) = 0.$$

**证明** 充分性显然. 下证必要性.

令

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

显然,  $a_0 \neq 0$ .

**情形 1** 当  $n = 1$ , 即  $p(x) = x + a_0$  时, 由假设知,  $p(x) = x \pm 1$ .

**情形 2** 当  $n \geq 2$  时, 由

$$0 = p(1/c) = (1/c)^n + a_{n-1}(1/c)^{n-1} + \cdots + a_1(1/c) + a_0,$$

有

$$0 = c^n p(1/c) = 1 + a_{n-1}c + \cdots + a_1c^{n-1} + a_0c^n.$$

记

$$f(x) \stackrel{d}{=} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1.$$

则  $f(c) = p(c) = 0$ . 根据引理 1.1.1,  $p(x) \mid f(x)$ . 又  $\partial(p(x)) = \partial(f(x))$ , 因此,

$$f(x) = d \cdot p(x), \quad d \in \mathbb{F}, \quad d \neq 0.$$

若

$$0 = p(b) = b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1b + a_0,$$

则  $b \neq 0$  (因为  $a_0 \neq 0$ ), 且

$$0 = (1/b)^n p(b) = 1 + a_{n-1}(1/b) + \cdots + a_1(1/b)^{n-1} + a_0(1/b)^n = f(1/b).$$

从而,  $p(1/b) = 0$ . □

当  $\partial(p(x)) \geq 2$  时, 由  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$ , 且  $p(x)$  不可约知,  $\pm 1$  不为  $p(x)$  的根. 因此,  $p(x)$  的根成对出现, 从而  $p(x)$  为偶次, 再根据 Vieta 定理,  $a_0 = 1$ , 即  $p(x) = f(x)$ . 总之有如下结论.

**推论 1.1.3** 数域  $\mathbb{F}$  上的不可约多项式, 除了一次的  $p(x) = x + 1, x - 1$  及其  $\mathbb{F}$ -相伴多项式, 具式 (1.1) 性质的不可约多项式为偶次, 且其  $n + 1$  个系数关于其  $n/2$  次项系数是中心对称的. 反之亦然.

## 1.1.3 另一类特殊的不可约多项式

**定理 1.1.2** 令  $\mathbb{F}$  为数域,  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ ,  $p(x)$  首 1 (本质上不需要这一假设) 不可约. 则存在  $c \in \mathbb{C}$ , 使得

$$p(c) = 0 = p(-c) \quad (1.2)$$

当且仅当关于任意  $b \in \mathbb{C}$ , 有

$$p(b) = 0 \iff p(-b) = 0.$$

**证明** 充分性显然. 下证必要性.

令

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = g_1(x) + g_2(x),$$

其中,  $g_1(x)$  为  $p(x)$  的偶次项之和,  $g_2(x)$  为  $p(x)$  的奇次项之和. 则

$$p(x) + p(-x) = 2g_1(x), \quad p(x) - p(-x) = 2g_2(x).$$

从而,  $g_1(c) = g_2(c) = 0$ . 根据引理 1.1.1,

$$p(x) \mid g_1(x), \quad p(x) \mid g_2(x), \quad \partial(g_1(x)), \partial(g_2(x)) \leq n.$$

(1) 若  $n = 1$ , 则  $p(x) = x + a_0$ . 由题设

$$c + a_0 = 0 = -c + a_0,$$

从而  $c = a_0 = 0$ . 于是  $p(x) = x$ , 只有零根.

(2) 若  $n \geq 2$ ,  $g_2(x) \neq 0$ , 则

$$p(x) = p_2(x), \quad a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$$

有因式  $x$ , 因此  $p(x)$  可约, 矛盾. 于是,  $g_2(x) = 0$ , 这指出  $p(x) = g_1(x)$ , 即  $p(x)$  只含偶次项. 从而, 关于任意  $b \in \mathbb{C}$ , 有

$$p(b) = 0 \iff p(-b) = 0. \quad \square$$

由定理的证明过程可得如下结论.

**推论 1.1.4** 除了一次的  $p(x) = x$  及其  $\mathbb{F}$ -相伴多项式, 具式 (1.2) 性质的不可约多项式  $p(x)$  只含偶次项. 反之亦然.

## 1.1.4 矩阵的最小多项式

**定理 1.1.3** 令  $A$  为数域  $\mathbb{F}$  上一个  $n$  阶矩阵. 若  $A$  的特征多项式为

$$\Delta_A(x) = \prod_{i=1}^l p_i^{r_i}(x),$$

其中,  $p_i(x)$  在  $\mathbb{F}$  上首 1 不可约,  $r_i \geq 1$ ,  $p_i(x) \neq p_j(x)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, l$ ,  $i \neq j$ . 则  $A$  的最小多项式为

$$m_A(x) = \prod_{i=1}^l p_i^{r'_i}(x),$$

其中,  $1 \leq r'_i \leq r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ .

**证明** 令  $\mathbb{C}$  为复数域. 首先证明  $m_A(x)$  与  $\Delta_A(x)$  在域  $\mathbb{C}$  中有相同的根. 显然,  $m_A(x)$  的根均为  $\Delta_A(x)$  的根. 若  $x_0$  为  $\Delta_A(x)$  在域  $\mathbb{C}$  中的根, 则由  $A$  也为域  $\mathbb{C}$  上的矩阵知,  $x_0$  为  $A$  在  $\mathbb{C}$  上的一个特征值, 即存在  $\alpha \in \mathbb{C}^n \setminus \{\theta\}$  ( $\theta$  表示零向量), 使得  $A\alpha = x_0\alpha$ . 令

$$m_A(x) = x^r + \dots + c_1x + c_0.$$

则

$$\begin{aligned}\theta &= m_A(A)\alpha = (A^r + \dots + c_1A + c_0E)\alpha \\ &= x_0^r\alpha + \dots + c_1x_0\alpha + c_0\alpha = m_A(x_0)\alpha.\end{aligned}$$

因此,  $m_A(x_0) = 0$ , 即  $x_0$  为  $m_A(x)$  在  $\mathbb{C}$  中的一个根.

从而,  $\mathbb{F}$  上  $\Delta_A(x)$  的任意不可约因子  $p_i(x)$  与  $m_A(x)$  在  $\mathbb{C}$  上有公根,  $i = 1, 2, \dots, l$ . 根据引理 1.1.1,  $p_i(x)$  均为  $m_A(x)$  的因子,  $i = 1, 2, \dots, l$ . 再由  $m_A(x) \mid \Delta_A(x)$  知,

$$m_A(x) = \prod_{i=1}^l p_i^{r'_i}(x),$$

其中,  $1 \leq r'_i \leq r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ . □

下面将证明域  $\mathbb{F}$  上矩阵  $A$  在  $\mathbb{F}$  上的最小多项式  $m_A(x)$  不随域的扩大而改变.

**定理 1.1.4** 令  $\mathbb{F}$  为数域,  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $\mathbb{F}_1$  为  $\mathbb{F}$  的扩域, 则

$$m_A^{\mathbb{F}}(x) = m_A^{\mathbb{F}_1}(x),$$

其中,  $m_A^{\mathbb{F}_1}(x)$  表示  $A$  在  $\mathbb{F}_1$  上的最小多项式.

为此, 我们要回顾  $\lambda$ -矩阵 (即域  $\mathbb{F}$  上的多项式矩阵) 及其标准形的有关概念和事实.

令  $\mathbb{F}$  为数域. 则  $\mathbb{F}$  上的  $\lambda$ -矩阵指的是  $\mathbb{F}$  上多项式环  $\mathbb{F}[x]$  上的多项式矩阵.  $\mathbb{F}$  上关于  $x$  的  $m \times n$  多项式矩阵的全体所构成的集合记为  $\mathbb{F}[x]^{m \times n}$ .

$\mathbb{F}$  上矩阵的许多概念和结果都可以推广到  $\mathbb{F}$  上的多项式矩阵中.

**定义 1.1.1** 称数域  $\mathbb{F}$  上  $m \times n$  多项式矩阵的下述变换为多项式矩阵的初等变换:

- (1)  $k$  乘以矩阵的第  $l$  行 (列), 记为  $[l(k)]$  ( $\{l(k)\}$ ),  $k \in \mathbb{F}$ ,  $k \neq 0$ ,  $l = 1, 2, \dots, m$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ );
- (2) 将矩阵的第  $s$  行 (列) 的  $\varphi(x)$  倍加到第  $t$  行 (列) 上, 记为  $[t+s(\varphi(x))]$  ( $\{t+s(\varphi(x))\}$ ),  $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ,  $s, t = 1, 2, \dots, m$  ( $s, t = 1, 2, \dots, n$ ),  $s \neq t$ ;
- (3) 交换矩阵的第  $s, t$  行 (列), 记为  $[s, t]$  ( $\{s, t\}$ ),  $s, t = 1, 2, \dots, m$  ( $s, t = 1, 2, \dots, n$ ).

**注 1.1**  $\mathbb{F}$  上多项式矩阵的初等变换与  $\mathbb{F}$  上矩阵的初等变换仅在第二种变换上有所不同.

**定义 1.1.2** 令  $A(x), B(x) \in \mathbb{F}[x]^{m \times n}$ . 称  $A(x)$  与  $B(x)$  等价, 如果  $A(x)$  可经由有限次行和列的初等变换得到  $B(x)$ .

$\mathbb{F}$  上多项式矩阵的等价关系, 具有自反性、对称性和传递性. 因此,  $A(x)$  与  $B(x)$  等价, 可以说成  $A(x), B(x)$  两者等价.

**定义 1.1.3** 令  $A(x) \in \mathbb{F}[x]^{m \times n}$ . 若  $A(x)$  等价于  $\mathbb{F}[x]^{m \times n}$  上的如下形式的多项式矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1(x) & & & & & \\ & d_2(x) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r(x) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

其中,  $r = r_{A(x)}$ ,  $d_k(x)$  为  $\mathbb{F}$  上的首 1 多项式,  $k = 1, 2, \dots, r$ , 且  $d_k(x) \mid d_{k+1}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, r-1$ , 则称式 (1.3) 为  $A(x)$  的一个等价标准形.

**定义 1.1.4** 令  $A(x) \in \mathbb{F}[x]^{m \times n}$ ,  $r_{A(x)} = r$ ,  $r \geq 1$ . 关于正整数  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ ,  $A(x)$  中有非零的  $k$  阶子式 (根据秩的定义), 称  $A(x)$  中所有  $k$  阶子式的首 1 的最大公因式  $D_k(x)$  为  $A(x)$  的  $k$  阶行列式因子.

**引理 1.1.2** 等价的非零多项式矩阵有相同的各阶行列式因子, 从而有相同的秩.

根据引理 1.1.2, 容易验证如下推论.

**推论 1.1.5** 令  $A(x) \in \mathbb{F}[x]^{m \times n}$ ,  $r_{A(x)} = r$ ,  $r \geq 1$ . 若  $D_1(x), D_2(x), \dots, D_r(x)$  为  $A(x)$  的各阶行列式因子, 式 (1.3) 是  $A(x)$  的一个等价标准形, 则

$$\begin{aligned} d_1(x) &= D_1(x), \\ d_k(x) &= \frac{D_k(x)}{D_{k-1}(x)}, \quad k = 2, 3, \dots, r. \end{aligned}$$

**推论 1.1.6** 数域  $\mathbb{F}$  上的多项式矩阵的等价标准形存在且唯一.

**定义 1.1.5** 令  $A(x) \in \mathbb{F}[x]^{m \times n}$ ,  $r_{A(x)} = r$ ,  $r \geq 1$ . 称  $A(x)$  的等价标准形 (1.3) 的  $r$  个非零元素  $d_1(x), d_2(x), \dots, d_r(x)$  为  $A(x)$  的不变因子.

**注 1.2** 由引理 1.1.1 知, 多项式的首 1 的最大公因式不因域的扩大而改变. 因此, 多项式矩阵的行列式因子与不变因子也不因域的扩大而改变.

令  $\mathbb{F}$  为一数域,  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . 我们特别考察  $\mathbb{F}$  上一特殊的多项式矩阵, 即  $A$  的特征矩阵  $x\mathbf{E} - A$ .

**定义 1.1.6** 令  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . 则  $x\mathbf{E} - A$  的 ( $n$  个) 不变因子、( $n$  个) 行列式因子 (因为  $x\mathbf{E} - A$  的秩为  $n$ ) 也分别称为  $A$  的不变因子和行列式因子.

**推论 1.1.7** 令  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . 则

$$\Delta_A(x) = D_n(x) = d_1(x)d_2(x) \cdots d_n(x),$$

其中,  $D_n(x)$  为  $A$  的第  $n$  个行列式因子,  $d_1(x), d_2(x), \cdots, d_n(x)$  为  $A$  的所有不变因子. 因此,

$$\sum_{i=1}^n \partial(d_i(x)) = n.$$

**定理 1.1.5** 令  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . 则  $A$  与  $B$  相似当且仅当它们的特征矩阵  $x\mathbf{E} - A$  与  $x\mathbf{E} - B$  等价.

于是, 我们有如下结论.

**推论 1.1.8** 令  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . 则  $A$  与  $B$  相似当且仅当它们有完全相同的行列式因子, 也当且仅当它们有完全相同的不变因子.

任一矩阵  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  的特征多项式  $|x\mathbf{E} - A|$  为  $\mathbb{F}$  上一首 1 多项式. 反过来,  $\mathbb{F}$  上任一首 1 多项式

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{F}[x], \quad (1.4)$$

总是  $\mathbb{F}$  上如下  $n$  阶方阵的特征多项式 (容易计算):

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

**定义 1.1.7** 式 (1.5) 中的  $C$  称为式 (1.4) 的友阵.

**推论 1.1.9**  $\mathbb{F}$  上任意首 1 多项式是其友阵的特征多项式.

**定理 1.1.6**  $\mathbb{F}$  上首 1 多项式  $f(x)$  的友阵  $C$  的最小多项式也为  $f(x)(= \Delta_C(x))$ .

**证明** 见注 3.27. □

由友阵  $C$  的行列式因子的计算可知, 下面推论成立.

**推论 1.1.10**  $\mathbb{F}$  上首 1 多项式  $f(x)$  的友阵  $C$  的全部不变因子为

$$1, \cdots, 1, d_n(x)(= \Delta_C(x) = m_C(x) = f(x)).$$

令  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $A$  的不变因子为

$$1, \cdots, 1, d_{k+1}(x), d_{k+2}(x), \cdots, d_n(x),$$

其中,  $d_i(x)$  首 1,  $\partial(d_i(x)) \geq 1, i = k+1, \cdots, n, d_i(x) \mid d_{i+1}(x), i = k+1, \cdots, n-1$ . 又令  $C_i$  为  $d_i(x)$  的  $\partial(d_i(x))$  阶友阵,  $i = k+1, \cdots, n$ .

由推论 1.1.8, 有如下定理.

**定理 1.1.7** 令  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . 则  $A$  相似于分块对角阵

$$F = \begin{pmatrix} C_{k+1} & & & \\ & C_{k+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_n \end{pmatrix}.$$

**定义 1.1.8** 令  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . 用  $A$  的非常数不变因子构造出来的与  $A$  相似的矩阵  $F$  称为  $A$  的 Frobenius 标准形,  $d_i(x)$  的友阵  $C_i$  称为相应于不变因子  $d_i(x)$  的 Frobenius 块,  $i = k+1, \dots, n$ .

Frobenius 标准形  $F$  也称为  $A$  的有理标准形, 这是因为  $F$  的元素是由  $A$  的元素经有理合成 (加、减、乘、除) 而得到的.

由于  $F$  的最小多项式是所有  $C_i$  的最小多项式的最小公倍式,  $C_i$  的最小多项式为  $d_i(x)$ ,  $i = k+1, k+2, \dots, n$ , 又

$$d_i(x) \mid d_{i+1}(x), \quad i = k+1, \dots, n-1,$$

从而

$$m_F(x) = [d_{k+1}(x), d_{k+2}(x), \dots, d_n(x)] = d_n(x).$$

由相似矩阵有相同的最小多项式, 易知如下推论.

**推论 1.1.11** 令  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . 则

$$m_A(x) = d_n(x),$$

其中,  $d_n(x)$  为  $A$  的第  $n$  个不变因子.

由注 1.2 和推论 1.1.11, 定理 1.1.4 得证.

下面给出定理 1.1.4 的第二种证明.

**证明** 由于  $m_A^{\mathbb{F}}(x) \in \mathbb{F}[x] \subseteq \mathbb{F}_1[x]$ , 当然有

$$m_A^{\mathbb{F}_1}(x) \mid m_A^{\mathbb{F}}(x).$$

令

$$\partial(m_A^{\mathbb{F}_1}(x)) = l, \quad \partial(m_A^{\mathbb{F}}(x)) = m.$$

则  $l \leq m$ . 又  $m_A^{\mathbb{F}}(x), m_A^{\mathbb{F}_1}(x)$  均为  $\mathbb{F}_1$  上首 1 多项式, 因此, 要证明  $m_A^{\mathbb{F}_1}(x) = m_A^{\mathbb{F}}(x)$ , 只需证明  $l = m$ . 于是, 由  $l \leq m$  知, 只需证明  $l \geq m$ .

为此, 先做如下准备.

关于任意  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , 若

$$f(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}[x],$$

则

$$f(\mathbf{A}) \triangleq a_r \mathbf{A}^r + a_{r-1} \mathbf{A}^{r-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{A}^0 \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

令  $D = (d_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . 又记  $\mathbf{A}^k$  的  $(i, j)$  元素为  $a_{ij}^{(k)} (\in \mathbb{F})$ ,  $i, j = 1, 2, \cdots, n$ ,  $k = 0, 1, \cdots, r$ , 则

$$D = f(\mathbf{A}) \iff d_{ij} = a_r a_{ij}^{(r)} + a_{r-1} a_{ij}^{(r-1)} + \cdots + a_1 a_{ij}^{(1)} + a_0 a_{ij}^{(0)}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

下面证明  $l \geq m$ . 令

$$m_{\mathbf{A}}^{\mathbb{F}_1}(x) = x^l + c_{l-1}x^{l-1} + \cdots + c_1x + c_0 \in \mathbb{F}_1[x].$$

则

$$O = m_{\mathbf{A}}^{\mathbb{F}_1}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^l + c_{l-1}\mathbf{A}^{l-1} + \cdots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{A}^0.$$

上式等价于

$$a_{ij}^{(l)} + c_{l-1}a_{ij}^{(l-1)} + \cdots + c_1a_{ij}^{(1)} + c_0a_{ij}^{(0)} = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \quad (1.6)$$

视  $\mathbb{F}$  为  $\mathbb{F}$  上的一个一维线性空间, (1) 为其自然基底,  $\mathbb{F}_1$  为  $\mathbb{F}$  上一线性空间. 考察  $\mathbb{F}_1$  的子空间

$$G[\alpha_l, \alpha_{l-1}, \alpha_{l-2}, \cdots, \alpha_1, \alpha_0],$$

其中,  $\alpha_l = 1, \alpha_i = c_i, i = 0, 1, \cdots, l-1$ . 取  $G[\alpha_l, \alpha_{l-1}, \alpha_{l-2}, \cdots, \alpha_1, \alpha_0]$  的一个基底  $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , 其中  $\beta_1 = 1$ , 则

$$1 = 1\beta_1 + 0\beta_2 + \cdots + 0\beta_k,$$

$$c_{l-1} = b_{l-1,1}\beta_1 + b_{l-1,2}\beta_2 + \cdots + b_{l-1,k}\beta_k,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$c_1 = b_{11}\beta_1 + b_{12}\beta_2 + \cdots + b_{1k}\beta_k,$$

$$c_0 = b_{01}\beta_1 + b_{02}\beta_2 + \cdots + b_{0k}\beta_k,$$

其中,  $b_{ij} \in \mathbb{F}$ ,  $i = 0, 1, \cdots, l-1$ ,  $j = 1, 2, \cdots, k$ .

将上述  $l+1$  个等式代入式 (1.6), 并整理成关于  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$  的表达式, 有

$$\begin{aligned} & \left( a_{ij}^{(l)} + b_{l-1,1}a_{ij}^{(l-1)} + \cdots + b_{11}a_{ij}^{(1)} + b_{01}a_{ij}^{(0)} \right) \beta_1 \\ & + \left( b_{l-1,2}a_{ij}^{(l-1)} + \cdots + b_{12}a_{ij}^{(1)} + b_{02}a_{ij}^{(0)} \right) \beta_2 + \cdots \\ & + \left( b_{l-1,k}a_{ij}^{(l-1)} + \cdots + b_{1k}a_{ij}^{(1)} + b_{0k}a_{ij}^{(0)} \right) \beta_k = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

由  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$  线性无关知,  $\beta_i$  的系数均为零,  $i = 1, 2, \cdots, k$ . 特别地,  $\beta_1$  的系数为零, 即

$$a_{ij}^{(l)} + b_{l-1,1}a_{ij}^{(l-1)} + \cdots + b_{11}a_{ij}^{(1)} + b_{01}a_{ij}^{(0)} = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \quad (1.7)$$