



普通高等教育应用技术型“十三五”规划系列教材

自动控制原理

ZIDONG KONGZHI YUANLI

◎ 主 编 张 晓 丹

◎ 主 审 吕 汉 兴

普通高等教育应用技术型“十三五”规划系列教材

自动控制原理

主 编 张晓丹

副主编 黄 晓 王珊珊 陈明显

主 审 吕汉兴

华中科技大学出版社

中国·武汉

内 容 简 介

本书依据独立学院本科自动控制理论课程的教学要求,从注重理论基础与基本概念出发,全面阐述了经典控制理论的基本内容。全书共分九章,内容包括:自动控制的基本概念、控制系统的数学模型、控制系统的时域分析、根轨迹法和频率特性法、控制系统的校正、线性离散控制系统、非线性控制系统、线性系统的状态空间分析及综合法。本书编写突出重点,注重理论与实际的结合。为了便于读者自学和更好地掌握本课程的基本理论和学习方法,每章末给出小结,并配有例题和习题。在主要章节中安排了基于 MATLAB 的系统仿真实例,以适应计算机辅助教学的要求。本书可作为高等院校自动化、电气工程及自动化、电子科学与技术、通信工程等相关专业的教材或学习参考书,也可供相关师生和专业工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理/张晓丹主编. —武汉:华中科技大学出版社,2015.7
ISBN 978-7-5609-7801-7

I. ①自… II. ①张… III. ①自动控制理论-高等学校-教材 IV. ①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 170466 号

自动控制原理

张晓丹 主编

策划编辑:范莹
责任编辑:王汉江
封面设计:原色设计
责任校对:李琴
责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)81321913

录排:武汉楚海文化传播有限公司
印刷:武汉鑫昶文化有限公司
开本:787mm×1092mm 1/16
印张:22.75
字数:563千字
版次:2015年12月第1版第1次印刷
定价:46.00元



本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

前 言

自动控制原理是研究有关自动控制系统的基本概念、基本原理和基本方法的一门课程,是高等学校电子与电气工程及自动化专业的一门核心基础理论课程。它研究的核心内容是对各种各样的控制系统建立数学模型,并进行分析计算和控制校正,使其满足所要求的性能指标。它是基础课与专业课之间的桥梁,是本科生后续课程和研究生课程的基础。

本书共分为9章,主要内容包括五大部分:第一部分介绍了自动控制的基本概念;第二部分包括控制系统的数学模型、时域响应分析、根轨迹分析、频率特性分析、系统校正,这部分内容阐明了自动控制的三个基本问题,即建模、分析和设计;第三部分重点介绍了离散系统的数学模型、稳定性分析与系统校正;第四部分阐述了非线性系统的基本理论和分析方法,包括描述函数法和相平面法;第五部分讲解了现代控制理论的基础,介绍了线性系统的状态空间分析与综合方法。另外,在各章的最后一节安排了MATLAB系统分析与设计实例,以适应现代计算机实验教学对控制系统进行辅助分析与设计的需要。

本书特色如下:

(1)注重课程体系的优化,强调基本概念、基本理论和基本工程应用,在理论综述和公式推导中,尽量精选内容,用经典例题代替一般性文字的叙述。

(2)内容精简,突出工科特点,充分考虑到教学计划的变更和考研的要求,尽量多地采用图表,以代替论述性内容,增加例题和练习题的数量,加强工程技术方法的分析和训练。

(3)详细介绍了基于MATLAB的控制系统计算机辅助分析和设计方法,并给出了大量的仿真例题,培养学生利用计算机分析和设计控制系统的 ability。

本书由张晓丹担任主编,黄晓、王珊珊、陈明显为副主编,华中科技大学吕汉兴副教授为主审。第3、4、8章由张晓丹编写,第1、2、7章由王珊珊编写,第5、6、9章由黄晓编写,全书由张晓丹、陈明显统稿。本书在编写过程中学习和参考了其他教材的部分内容,在此向这些教材的各位作者表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限,书中难免有疏漏和不妥之处,敬请广大同行与读者批评指正。

编 者

2015年10月

目 录

第 1 章 自动控制的基本概念	(1)
1.1 自动控制理论的发展史	(1)
1.2 自动控制的基本原理	(2)
1.3 自动控制系统的分类	(4)
1.4 对自动控制系统的基本要求及课程任务	(5)
本章小结.....	(6)
习题.....	(6)
第 2 章 控制系统的数学模型	(9)
2.1 控制系统的时域数学模型	(9)
2.2 拉普拉斯变换.....	(13)
2.3 控制系统的复域数学模型.....	(18)
2.4 控制系统的结构图及其等效变换.....	(22)
2.5 控制系统的信号流图与梅逊公式.....	(28)
2.6 闭环系统的传递函数.....	(31)
2.7 MATLAB 中数学模型表示	(33)
本章小结	(36)
习题	(37)
第 3 章 控制系统的时域分析法	(40)
3.1 控制系统的时域性能指标.....	(40)
3.2 线性系统的快速性分析.....	(43)
3.3 线性系统的稳定性分析.....	(59)
3.4 线性系统的稳态误差.....	(69)
3.5 MATLAB 在时域分析中的应用	(78)
本章小结	(82)
习题	(82)
第 4 章 根轨迹法	(86)
4.1 根轨迹的基本概念.....	(86)
4.2 绘制根轨迹的基本法则.....	(89)
4.3 广义根轨迹	(105)
4.4 控制系统的根轨迹分析	(115)
4.5 利用 MATLAB 绘制系统根轨迹图	(124)
本章小结.....	(129)

习题	(130)
第 5 章 控制系统的频率特性法	(132)
5.1 频率特性的基本概念	(132)
5.2 对数坐标图的绘制	(136)
5.3 极坐标图	(152)
5.4 奈奎斯特稳定判据	(162)
5.5 控制系统的相对稳定性	(172)
5.6 用频率特性分析系统性能	(175)
5.7 MATLAB 在频域分析中的应用	(181)
本章小结	(186)
习题	(186)
第 6 章 控制系统的校正	(189)
6.1 系统校正的基本概念	(189)
6.2 常用校正装置及其特性	(193)
6.3 频率法串联校正	(198)
6.4 频率法反馈校正	(205)
6.5 MATLAB 在系统校正中的应用	(208)
本章小结	(211)
习题	(211)
第 7 章 线性离散控制系统	(213)
7.1 信号的采样与保持	(213)
7.2 z 变换	(218)
7.3 离散系统的数学模型	(224)
7.4 离散系统的稳定性分析	(233)
7.5 离散系统的稳态误差分析	(237)
7.6 离散系统的动态性能分析	(240)
7.7 离散系统的校正	(243)
7.8 MATLAB 在离散系统中的应用	(247)
本章小结	(250)
习题	(251)
第 8 章 非线性控制系统	(255)
8.1 非线性控制系统概述	(255)
8.2 典型非线性环节及其对系统的影响	(259)
8.3 描述函数法	(263)
8.4 用描述函数法分析非线性系统	(272)
8.5 相平面法	(279)

8.6 利用 MATLAB 进行非线性控制系统分析	(295)
本章小结	(297)
习题	(298)
第 9 章 线性系统的状态空间分析与综合	(302)
9.1 线性系统的状态空间描述	(302)
9.2 线性定常系统的状态转移矩阵	(316)
9.3 线性定常系统的能控性和能观测性	(319)
9.4 线性定常系统的线性变换	(326)
9.5 线性定常系统的状态反馈和极点配置	(332)
9.6 状态估计与状态观测器	(334)
9.7 李雅普诺夫稳定性分析	(339)
9.8 利用 MATLAB 进行状态空间分析	(345)
本章小结	(351)
习题	(352)
参考文献	(355)

第 1 章 自动控制的基本概念

自动控制是指没有人直接参与的控制,例如机器设备可以按照生产的要求和目的进行自动化生产,不仅可以把人从繁重的体力劳动中解放出来,而且能够提高生产率,保证安全生产,从而取得更大的经济效益和社会效益,广泛用于工业、农业、军事、科学研究、交通运输、商业等方面。近几十年来,随着电子计算机技术的发展,自动控制技术在航天工程、导弹制导和机器人控制等高新技术领域的应用越来越多,在日常生活中也越来越多见,已成为不可缺少的重要组成部分。

1.1 自动控制理论的发展史

人类对自动控制的抽象概念早有认识。公元前 14 世纪,中国就出现了自动计时漏壶。235 年,马钧研制出用齿轮传动自动指示方向的指南车,与按扰动补偿的自控系统十分类似。1637 年,明代的《天工开物》一书中记载有程序控制思想的提花织机结构图。1788 年,英国人瓦特发明了离心式调速器,应用反馈原理自动调节进汽阀门,从而控制蒸汽机的转速。离心式调速器有时会使蒸汽机速度出现大幅度的振荡,但是由于当时还没有自动控制理论,所以不能解释这一现象。直到 1868 年,英国物理学家麦克斯韦发表了《论调速器》一文,文中分析了反馈系统的稳定性,解释了蒸汽机调速器存在的不稳定现象,这篇著名论文被公认为自控控制理论的开端。英国数学家劳斯和德国数学家赫尔维茨分别于 1877 年和 1895 年独立提出了著名的判断系统稳定性的代数判据。1892 年,俄国数学家李雅普诺夫发表了《论运动稳定性的一般问题》,提出了稳定性定义及判断系统稳定性的一般方法。自动控制理论的发展初期,主要用于工业控制。

20 世纪 20—40 年代,奈奎斯特提出了判断系统稳定性的奈氏判据,维纳提出了《控制论》,以传递函数为基础的经典控制理论体系逐渐形成。第二次世界大战的爆发进一步促进了自动控制理论的发展,飞机自动驾驶仪、火炮定位系统和雷达跟踪系统等军用装备的研究直接推动了经典控制理论的发展。

20 世纪 50—60 年代,各国开始发展空间技术,如人造卫星发射和阿波罗飞船登月等,自动控制技术发挥了重大作用,经典控制理论已逐渐不能满足需要,以系统的状态变量描述作为数学模型的现代控制理论应运而生。

20 世纪 70 年代后,计算机技术的发展和大大促进了自动控制理论的发展,产生了自适应控制、模糊控制和智能控制等理论、技术与方法,其应用也扩展到生物、医学和环境等诸多社会生活领域,自动控制在现代化社会中已经不可或缺。

1.2 自动控制的基本原理

1.2.1 自动控制的基本概念

自动控制是指在没有人的直接干预下,利用物理设备对生产设备或生产过程进行合理的控制,使被控制的物理量保持恒定或者按照一定的规律变化。自动控制系统是指能够完成自动控制的设备。下面以水温控制系统为例,说明自动控制系统的构成和基本概念。

图 1-1 所示的为一个水温控制系统,冷水在热交换器中由通入的蒸汽加热,得到一定温度的热水。冷水流量变化用流量计测量,该系统保持热水温度为期望值。系统在工作时,温度传感器不断测量交换器出口处的实际水温,并在温度控制器中与给定的温度相比较,若低于给定温度,其偏差值使蒸汽阀门开大,加大进入热交换器的蒸汽量,使热水温度升高,直至偏差为零,从而保证热交换器出口的水温不发生大的波动。图 1-2 为系统的方框图,展示了该反馈控制系统的基本组成和工作原理。

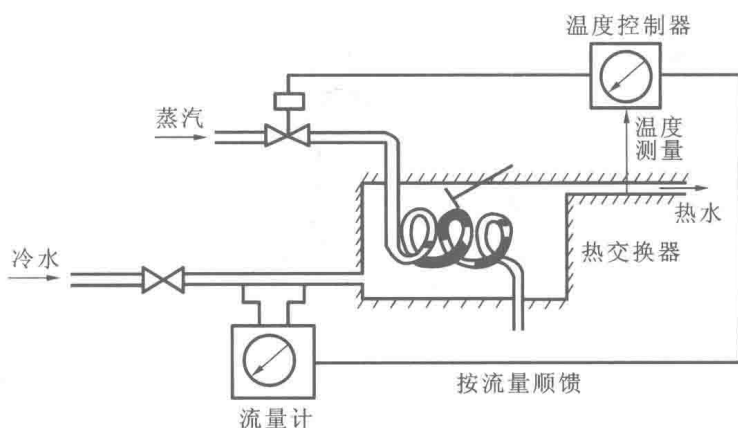


图 1-1 水温控制系统

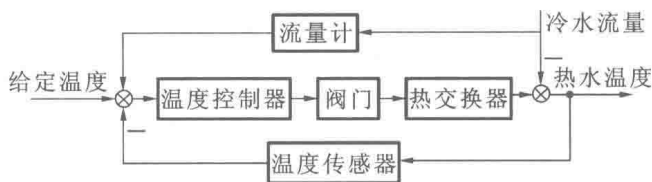


图 1-2 水温控制系统方框图

1.2.2 自动控制系统的组成

自动控制系统尽管结构形式不同,但都包含被控对象和控制装置两大部分,其中控制装置主要包含给定环节、控制器、放大环节、执行机构和反馈环节。典型的自动控制系统的组成如图 1-3 所示。

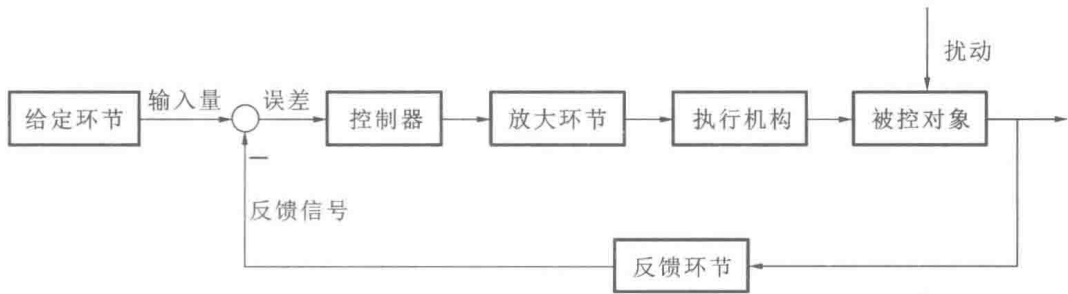


图 1-3 典型自动控制系统的基本组成

(1) 给定环节: 给出与期望的被控量相对应的系统输入量。

(2) 控制器: 根据误差信号, 按一定规律产生相应的控制信号, 是控制系统的核心部分。

(3) 放大环节: 将控制信号进行放大, 推动执行元件控制被控对象。

(4) 执行机构: 一般由传动装置和调节机构组成, 直接作用于被控对象, 改变被控量。

(5) 被控对象: 控制系统所要控制的设备或生产过程, 它的输出就是被控量。

(6) 反馈环节: 用于测量被控量, 将它转换成与给定量相同的物理量。

(7) 扰动: 除了输入量外, 使被控量偏离输入量所要求的值或按规律变化的系统外的物理量。

1.2.3 自动控制的基本方式

自动控制的基本控制方式有开环控制、闭环控制和复合控制三种。

开环控制方式是最简单的控制方式, 系统的输入量对输出量产生控制作用, 输出量对系统没有控制作用。简单的开环控制系统如图 1-4 所示, 输入量直接通过控制器作用于被控对象, 当有扰动信号出现时, 系统不能得到理想的输出量, 因此开环控制没有抗干扰能力。由于开环控制方式结构简单、成本低, 在扰动影响较小的情况下应用较广, 日常生活中常见的自动售货机、交通路口红绿灯的控制采用的都是开环控制方式。

闭环控制方式也称反馈控制方式, 是最基本、应用最广泛的一种控制方式。闭环控制是将输出量通过测量元件检测转换后, 再反馈到输入端与输入量进行比较(相减), 并将比较后的偏差经过控制器控制被控对象, 使输出量接近期望值。图 1-3 为简单的闭环控制系统结构图。闭环控制方式中, 系统内部存在反馈, 输出量也参与控制, 抗干扰能力强, 具有抑制内部或外部扰动对被控对象产生影响的能力。

复合控制方式就是开环控制方式与闭环控制方式的结合, 是在闭环控制回路的基础上, 附加一个输入信号或扰动作用的通路, 对于主要的扰动采用适当的补偿装置, 这样的控制效果更好, 如图 1-5 所示。

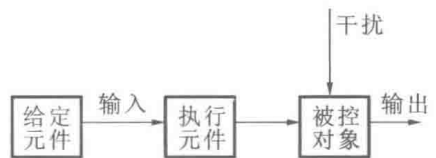


图 1-4 开环控制系统结构图

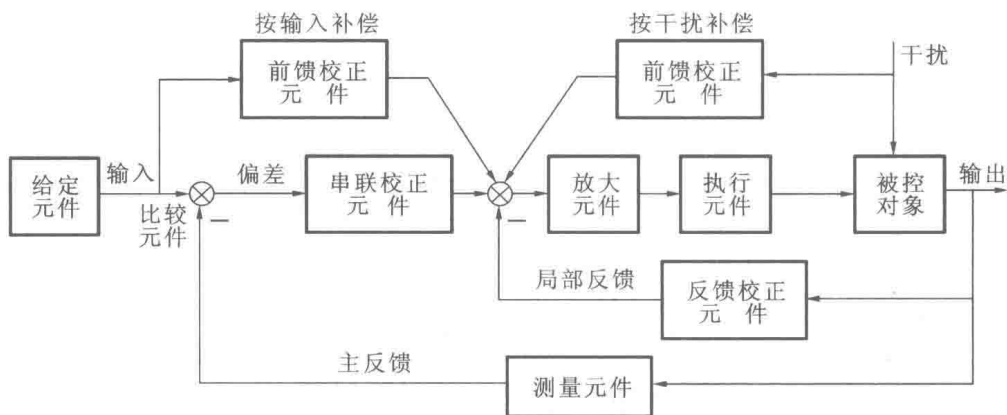


图 1-5 复合控制系统结构图

1.3 自动控制系统的分类

自动控制系统的形式多种多样,其分类方法也各有不同。自动控制系统按系统主要元件的输入/输出特性,可分为线性系统和非线性系统;按信号的性质,可分为连续系统和离散系统;按系统参数是否随时间变化,可分为定常系统和时变系统;按输入量的变化规律,可分为恒值控制系统、随动系统和程序控制系统等。

1. 线性系统和非线性系统

满足叠加原理的系统称为线性系统,叠加原理具有可叠加性和均匀性(齐次性)。

可叠加性是指:若系统的输入信号为 $r_1(t)$ 时输出信号为 $c_1(t)$,输入信号为 $r_2(t)$ 时输出信号为 $c_2(t)$,当系统的输入信号为 $r_1(t)+r_2(t)$ 时输出信号为 $c_1(t)+c_2(t)$ 。

均匀性是指:若系统的输入信号为 $r_1(t)$ 时输出信号为 $c_1(t)$,当系统的输入信号为 $A r_1(t)$ 时输出信号为 $A c_1(t)$ 。

线性系统由线性元部件组成,能够用线性微分(或差分)方程描述,系统的输入量、输出量及各阶导数均为线性。非线性系统存在非线性元部件,描述非线性系统的微分(或差分)方程系数与自变量有关,非线性系统不满足叠加原理。

2. 连续系统和离散系统

连续系统是指系统中所有信号都是时间变量的连续函数,这些信号在所有时间内都是已知的。如果系统中有一处或者几处信号是一串脉冲或数码,则称为离散系统。

3. 定常系统和时变系统

控制系统的参数在运行过程中不随时间变化而变化,称为定常系统;参数随时间变化而变化,称为时变系统。

一般的自动控制系统通常是上述分类方法的组合,如线性连续控制系统,通常用线性微分方程描述。其一般形式为

$$\begin{aligned}
 & a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) \\
 & = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m x(t)
 \end{aligned}$$

线性定常离散控制系统,通常用线性差分方程描述。其一般形式为

$$\begin{aligned} a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) \\ = b_0 x(k+m) + b_1 x(k+m-1) + \cdots + b_{m-1} x(k+1) + b_m x(k) \end{aligned}$$

非线性控制系统,通常用非线性微分(或差分)方程描述,其特点是方程的系数含有变量。由于其形式有多种,这里不一一列举。下面的方程即为非线性微分方程:

$$\ddot{y}(t) + y(t)\dot{y}(t) + 3y(t) + 2y^2(t) = x(t)$$

1.4 对自动控制系统的基本要求及课程任务

1.4.1 对自动控制系统的基本要求

对于各种控制系统,在已知其结构和系统参数时,我们一般研究的是在某种给定的典型输入信号下,系统被控量随时间变化的全过程,这个过程也称为动态过程或过渡过程。对这个过程的基本要求可归结为稳定性、快速性和准确性。

稳定性是控制系统的重要性能,也是系统能够正常运行的首要条件。线性控制系统的稳定性由系统本身的结构和参数决定,与外部条件和初始状态无关。一个稳定的控制系统,在扰动消失后,初始偏差能够随时间增加逐渐减小直至趋于零,最后达到平衡状态。而对于不稳定的系统,偏差信号可能会逐渐增大,系统响应过程出现振荡或者发散。如图 1-6 所示,系统的输入信号为 $r(t)$,系统 1 的输出信号 $c(t)$ 为图中的曲线①,系统 2 的输出信号 $c(t)$ 为图中的曲线②,系统 1 为稳定系统,其输出逐渐与期望一致,系统 2 为不稳定系统,其偏差越来越大。

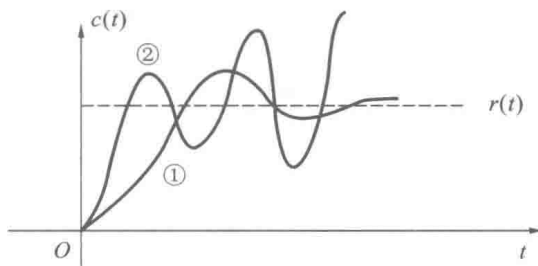


图 1-6 系统 1 和系统 2 的阶跃响应曲线

快速性是指控制系统输出响应要快,即过渡过程的时间要短。如图 1-7 所示,系统的输入信号为 $r(t)$,系统 1 的输出信号 $c(t)$ 为图中的曲线①,系统 2 的输出信号 $c(t)$ 为图中的曲线②,曲线②明显比曲线①响应快很多,故系统 2 的快速性更好。

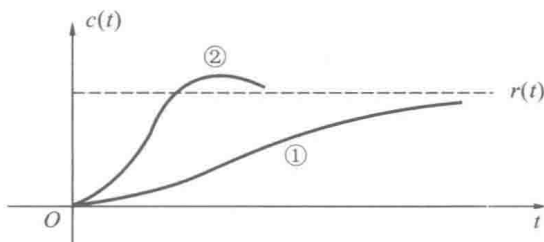


图 1-7 系统 1 和系统 2 的阶跃响应曲线

准确性是指系统动态过程结束后,被控量的稳态值应与给定值一致。被控量的稳态值与给

定值之间的偏差称为稳态误差。稳态误差是衡量控制系统精度的指标,反映了系统的稳态性能。

对于同一个系统,稳定性、快速性和准确性的要求往往是相互制约的,例如,改善了系统的稳定性,其快速性可能变差,改善了系统的快速性,系统可能发生剧烈振荡。根据被控对象的具体情况,各个性能指标的要求各有侧重。

控制系统的设计原则是在已知被控对象和其性能指标的要求下,设计一个满足预定性能指标要求的系统,设计时还要考虑经济性、可靠性和使用环境等相关因素。

1.4.2 本课程的主要任务

尽管自动控制系统有不同的类型,每个系统的要求也不一样,但研究的内容和方法类似。本课程的主要任务分三个部分,即系统建模、分析与校正。

本书第2章主要讲述了控制系统的数学模型的建立。第3章、第4章、第5章、第7章和第8章是对建立的数学模型进行分析,第6章是对建立的数学模型进行校正,使其达到预期的性能指标的要求。

本章小结

(1)自动控制是指在没有人的直接干预下,利用物理设备对生产设备或生产过程进行合理的控制,使被控制的物理量保持恒定或者按照一定的规律变化。

(2)自动控制系统包含被控对象和控制装置两大部分,其中控制装置主要包含给定元件、测量元件、比较元件、放大元件、执行元件和校正元件。

(3)自动控制系统的基本控制方式有开环控制方式、闭环控制方式和复合控制方式。

(4)自动控制系统的分类方法多种多样。自动控制系统按系统主要元件的输入/输出特性,可分为线性系统和非线性系统;按信号的性质,可分为连续系统和离散系统;按系统参数是否随时间变化,可分为定常系统和时变系统;按输入量的变化规律,可分为恒值控制系统、随动系统和程序控制系统等。

(5)自动控制系统的基本要求可归结为稳定性、快速性和准确性。

习 题

1-1 水箱水位控制系统如图1-8所示,试分析它的控制过程,指出它是开环控制系统还是闭环控制系统?它的被控量、输入量和扰动量是什么?画出该控制系统的方框图。

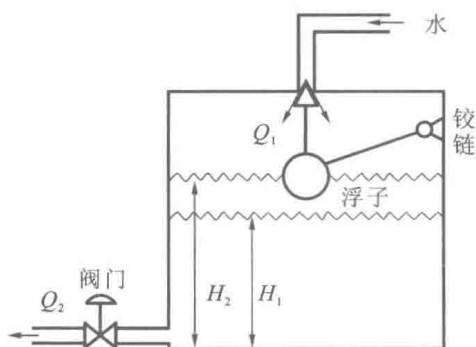


图 1-8 水箱水位控制系统

1-2 炉温自动控制系统如图 1-9 所示,简述该系统的工作原理并画出系统的方框图。

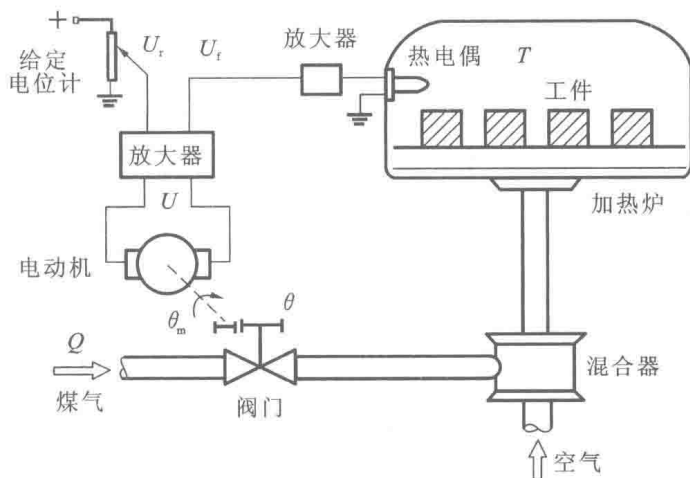


图 1-9 炉温自动控制系统

1-3 仓库大门自动控制系统如图 1-10 所示,简述该系统的工作原理并画出系统的方框图。

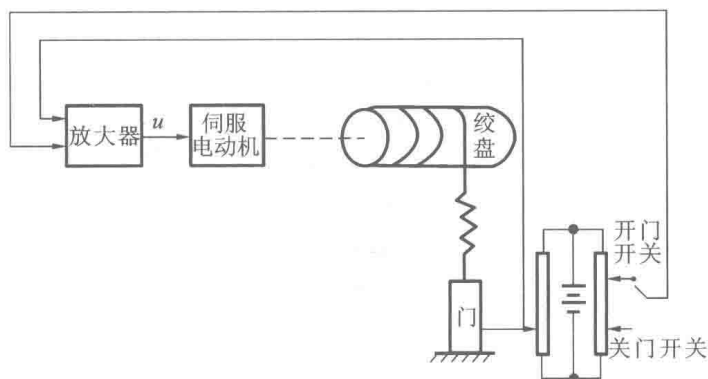


图 1-10 仓库大门自动控制系统

1-4 液位自动控制系统如图 1-11 所示,在任意情况下,希望液面高度 \$c\$ 维持不变,试说明系统的工作原理并画出系统的方框图。

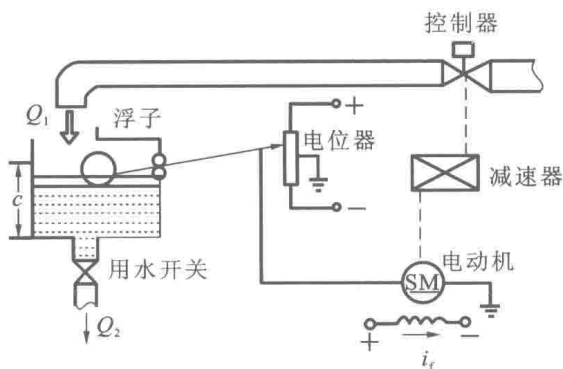


图 1-11 液位自动控制系统

1-5 自动调压系统如图 1-12 所示,设图 1-12 (a)与图 1-12 (b)的发电机端电压均为 110 V。试问带上负载后,图 1-12 (a)与图 1-12 (b)中哪个系统能保持 110 V 电压不变? 哪个系统的电压会稍低于 110 V? 为什么?

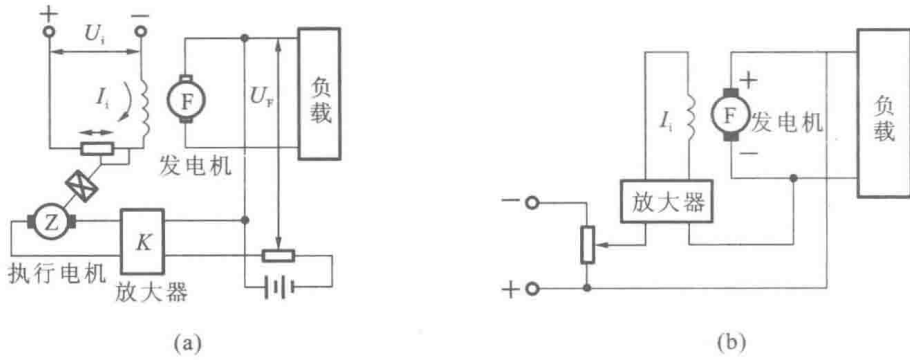


图 1-12 自动调压系统

第 2 章 控制系统的数学模型

自动控制理论研究两个主要问题是控制系统的分析和设计,其前提是建立控制系统的数学模型,即描述系统内部变量之间关系的数学表达式。利用数学模型可以定量地表示出控制系统内在的运动规律和各个环节的动态特性。建立控制系统数学模型的方法有两种:解析法和实验法。解析法是根据系统各变量之间所遵循的物理规律或者化学规律写出相应的数学方程。实验法是对系统施加某个测试输入信号,得到系统的输出响应,经过数据处理而辨识出系统的数学模型。在经典控制理论中,常用的数学模型有微分方程(或差分方程)、传递函数、频率特性等。本章关注于采用微分方程、传递函数、结构图和信号流图建立控制系统的数学模型。

2.1 控制系统的时域数学模型

2.1.1 线性系统微分方程的建立

建立线性系统微分方程的一般步骤为:

- (1) 根据系统中各元部件的工作原理,确定系统与各元部件的输入量和输出量。
- (2) 根据各元部件在工作中所遵循的物理或化学规律,依次列出微分方程。
- (3) 对已建立的方程进行数学处理,消去中间变量,得到描述系统输入与输出关系的微分方程。

(4) 标准化微分方程,将输入量有关项写在方程的右边,输出量有关项写在方程的左边,方程两边的输入/输出变量的导数项均按降幂排列。

【例 2-1】 电阻 R 和电容 C 组成的无源网络如图 2-1 所示, $u_i(t)$ 为输入量, $u_o(t)$ 为输出量, R 为电阻, C 为电容,求该系统的微分方程。

解 设回路电流为 $i(t)$,由基尔霍夫定理列写回路方程

$$\frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) = u_i(t)$$

$$u_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

消去中间变量 $i(t)$,可得系统的微分方程

$$RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

【例 2-2】 RLC 无源网络如图 2-2 所示, $u_i(t)$ 为输入量, $u_o(t)$ 为输出量, R 为电阻, L 为电感, C 为电容,求该系统的微分方程。

解 设回路电流为 $i(t)$,由基尔霍夫定理可列写回路方程

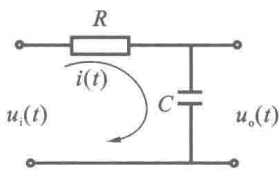


图 2-1 RC 无源网络

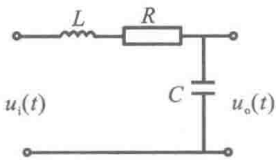


图 2-2 RLC 无源网络

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) = u_i(t)$$

$$u_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

消去中间变量 $i(t)$, 可得系统的微分方程

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

【例 2-3】 齿轮运动如图 2-3 所示, 齿轮 1 和齿轮 2 的角速度分别为 ω_1 和 ω_2 , 半径分别为 r_1 和 r_2 , 齿数分别为 Z_1 和 Z_2 , 其黏性摩擦系数和总转动惯量分别为 f_1, J_1 和 f_2, J_2 , 转动力矩和负载力矩分别为 M_0, M_2 和 M_1, M_3 , 试建立该系统的微分方程。

解 系统输入量为转动力矩 M_0 , 输出量为齿轮 1 的速度 ω_1 。

在齿轮运动过程中, 两个齿轮表面移动的距离相等, 即线速度相同, 则

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

每个齿轮完成等量的工作, 则

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2$$

齿数与半径成正比, 与角速度成反比, 可得

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{M_1}{M_2} \quad (2-1)$$

根据力学中定轴转动原理可得齿轮 1 和齿轮 2 的运动方程为

$$M_0 = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + f_1 \omega_1 + M_1 \quad (2-2)$$

$$M_2 = J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + f_2 \omega_2 + M_3 \quad (2-3)$$

将式(2-1)和式(2-3)代入式(2-2)可得

$$M_0 = \left[J_1 + \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 J_2 \right] \frac{d\omega_1}{dt} + \left[f_1 + \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 f_2 \right] \omega_1 + M_3 \frac{Z_1}{Z_2}$$

式中: 令 $J = J_1 + \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 J_2$, 为等效转动惯量; $f = f_1 + \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 f_2$, 为等效黏性摩擦系数; $M = M_3 \frac{Z_1}{Z_2}$, 为等效负载力矩, 可得系统的微分方程

$$J \frac{d\omega_1}{dt} + f \omega_1 + M = M_0$$

【例 2-4】 弹簧-阻尼器机械位移系统如图 2-4 所示, 系统中有两个阻尼器, 阻尼系数分别为 f_1 和 f_2 , 两个弹簧的弹性系数分别为 k_1 和 k_2 , x_1 是输入位移, x_0 是输出位移, 试建立该系统的微分方程。

解 设 x_0 的引出位置为 A 点, 弹簧 1 和阻尼器 1 之间的位置为 B 点, 弹簧 1 的位移为 x , 如图 2-4 所示。

在 A 点处列平衡方程

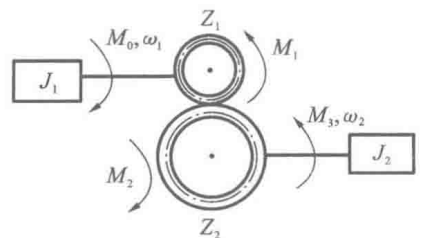


图 2-3 齿轮运动图