现代数学
·专著版·

三峡大学学科建设项目资助

张量分析及其应用

宋来忠 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

现代数学
·专著版·

三峡大学学科建设项目资助

张量分析及其应用

宋来忠 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

张量分析及其应用/宋来忠著. —武汉：武汉大学出版社,2016.2
ISBN 978-7-307-17623-2

Ⅰ.张… Ⅱ.宋… Ⅲ.张量分析 Ⅳ.O183.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 030101 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:李孟潇　　版式设计:韩闻锦

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷：荆州市鸿盛印务有限公司
开本：720×1000　1/16　印张:8.25　字数:132 千字　插页:1
版次：2016 年 2 月第 1 版　　2016 年 2 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-17623-2　　定价:22.00 元

前　言

张量（tensor）是几何与代数中的基本概念之一．

从代数角度讲，张量是数量、向量、矩阵的自然推广．我们知道，向量可以看成一维的“表格”（即分量按照顺序排成一排或一列），矩阵是二维的“表格”（分量按照纵横位置排列），那么N阶张量就是所谓的N维的“表格”．张量的严格定义是利用线性映射来描述的．与矢量相类似，定义由若干坐标系改变时满足一定坐标转化关系的有序数组成的集合为张量．

从几何角度讲，张量是一个真正的几何量，也就是说，它是一个不随参照系的坐标变换而变化的东西．

有时候，人们直接在一个坐标系下，由若干个数（称为分量）来表示张量，而在不同坐标系下的分量之间应满足一定的变换规则（协变规律，反变规律），如矩阵、多变量线性形式等都满足这些规律．一些物理量如弹性体的应力、应变以及运动物体的能量和动量等都需用张量来表示．

标量是零阶张量，它是关于时空点的一个数，其值不依赖于坐标系的选择．例如，向量的内积就是一个标量．

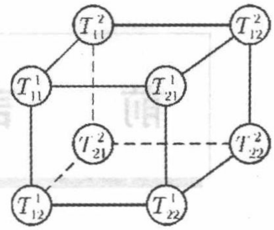
三维一阶张量是有 3 个分量的矩阵函数，满足线性变换形式不变，所以是矢量．

三维二阶张量是有 9 个分量的矩阵函数，但是并不是只要把 9 个数写成矩阵形式就可以成为张量，必须满足线性变换形式不变这个条件．

张量中有许多特殊的形式，比如对称张量、反对称张量等．

在n维空间中的N阶张量有n^N个分量，下面是$n=2$时的张量示意图：

T $\qquad$ (T_1,T_2) $\qquad$ $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$



标量(阶 $N=0$) 矢量(阶 $N=1$) 矩阵(阶 $N=2$) 张量(阶 $N=3$)

可见，零阶张量可用一个数表示，一阶张量可用一行数组表示，二阶张量可用矩阵表格表示，三阶张量可用“立体矩阵”表示，更高阶的张量不能用图形表示.

历史上，由于向量是一种平移不变量，在坐标系平移变换的时候，向量保持长度和方向不变，所以建立在向量基础上的微积分运算，也就是向量分析，为麦克斯韦的电磁理论提供了数学工具．但是，向量分析是笛卡儿空间中的分析，即三维直角坐标系中的向量微积分运算，它的局限性是很明显的，物理量中很多都有超过三个的分量，如果把分量的个数理解为维数，那就需要处理高维空间中的分析的数学方法，张量分析因此而存在发展的必要．另一方面，虽然，向量的平移不变的性质也为微分几何的研究提供了便利，微分几何需要揭示曲线和曲面的内在性质，这种性质既与坐标系的选择无关，又与参数的选择无关，向量函数恰好满足这种要求，所以微分几何离不开向量分析的方法．可是，在后来的发展中，微分几何对曲线、曲面等几何对象的研究渐渐形成了摆脱直角坐标系，而直接在曲面上寻找基向量，建立坐标系的方法，从而形成了弯曲空间的概念．自黎曼(G. F. B. Riemann，1826—1866)开始，微分几何开始向高维、弯曲空间发展．黎曼在 1854 年发表了他的演说：《关于几何基础中的假设》，提出了 n 维流形的概念，将高斯的内蕴几何思想向前推进了一步．由此也就产生了一个问题：如何对曲坐标系中的向量进行微分运算？因为此时基向量要同时参加微分运算，使得得到的结果不再是向量．这些都是推动张量概念产生的内在动力．因此，在微分几何的发展中，C.F. 高斯、B. 黎曼、E.B. 克里斯托费尔等人在 19 世纪就导入了张量的概念，随后由 G. 里奇及其学生 T. 列维齐维塔发展成张量分析，A. 爱因斯坦在其广义相对论中广泛地利用了张量.

张量作为物理或几何的具体对象，充分反映了上述这些现象的物理

和几何属性，是这些现象的一种数学抽象，在分析力学、固体力学、流体力学、几何学、电磁场理论和相对论等方面有着广泛的应用．在发达国家，特别是美国，愈来愈重视张量分析的应用，不仅在科学界，而且在工程界都掀起了学习和应用张量的热潮．有人这样形容：“现在工程师学张量分析如同20世纪30年代学矩阵一样热烈．”

本书是根据作者长期为工科研究生讲授张量分析的教案而撰写的，力求通俗易懂、简明扼要．第1章是张量代数，主要介绍张量的定义及其基本代数运算，包括张量的加法、减法和乘法，以及张量的缩并和内积等；第2章是张量分析，主要介绍三维真欧氏空间中张量分析，包括张量的协变导数、微分，以及不变微分算子：梯度、散度、旋度和拉普拉斯算子，等等；第3章是张量在应变分析中的应用，简单介绍张量在应变分析中的应用，主要包括位移、变形与长度、角度的变化、应变张量和应变协调方程等；第4章是张量在应力分析中的应用，简单介绍张量在应力分析中的应用，主要包括外力、内力、主应力以及应力张量、平衡方程、应力函数等；第5章是张量在微分几何中的应用，介绍Christoffel符号、曲率张量、Gauss方程、Weingarten方程以及曲面的基本定理等基础数学知识；第6章是MATLAB的张量运算，主要对MATLAB的张量运算进行归纳和分析，介绍常用的函数和命令，并给出了大量的实例．

本书参照和选取了一些专家的著作内容（参考书目附后），在此表示衷心的感谢．限于作者的水平，不妥和不足之处在所难免，殷切期望同行、专家和读者批评指正．

作　者

2016年1月

目录

第1章 张量代数

张量代数是本书的核心和重点，本章主要介绍张量的定义及其基本代数运算，包括张量的加法、减法和乘法，以及张量的缩并和内积等.

1.1 指标记法

1.1.1 求和约定、哑指标

观察表达式：

$$S = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i = \sum_{j=1}^{n} a_jx_j = \sum_{k=1}^{n} a_kx_k, \quad (1.1)$$

可以发现，求和与指标 i, j, k 无关，可用任意字母代替.

因此，为简化表达式，引入 Einstein 求和约定：当项中两个量的指标（下标或上标）重复出现一次时，意味着该指标遍及所有的坐标，并对之求和. 这样重复的指标称为**哑标或跑标**. 哑标意味着求和. 于是(1.1)可表示为

$$S = a_ix_i = a_jx_j = a_kx_k. \quad (1.2)$$

(1.1)中 n 表示空间的维数，以后无特别说明，我们总取 $n = 3$.

例如，

$$a_ix_i = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$

$$b_{jj}=b_{11}+b_{22}+b_{33},$$
$$c_m e_m=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3.$$

又如，双重求和 $S=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ 可简写成

$$S=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j, \tag{1.3}$$

展开后为（9 项）

$$\begin{aligned}S=&a_{11}x_1x_1+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3\\&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2x_2+a_{23}x_2x_3\\&+a_{31}x_3x_1+a_{32}x_3x_2+a_{33}x_3x_3.\end{aligned}$$

同理，三重求和 $S=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}a_{ijk}x_ix_jx_k$（27 项）记为

$$S=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}a_{ijk}x_ix_jx_k=a_{ijk}x_ix_jx_k. \tag{1.4}$$

1.1.2 自由指标

考查代数式：

$$x_i'=a_{ij}x_j=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{1.5}$$

指标 i 在方程两边的各项中只出现一次，这种不求和的指标称为**自由指标**.

一个自由指标每次可取整数 $1,2,\cdots,n$，与哑指标的取法一样，无特别说明总取 $n=3$．于是，(1.5)表示 3 个方程的缩写：

$$x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,$$
$$x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,$$
$$x_3'=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3.$$

而代数式

$$e_i' = A_{ij}e_j, \tag{1.6}$$

其中 i 为自由指标，j 为哑标，表示

$$\begin{aligned}
e_1' &= A_{11}e_1 + A_{12}e_2 + A_{13}e_3,\\
e_2' &= A_{21}e_1 + A_{22}e_2 + A_{23}e_3,\\
e_3' &= A_{31}e_1 + A_{32}e_2 + A_{33}e_3.
\end{aligned}$$

类推，代数式

$$C_{ij}' = A_{ik}B_{jk}, \tag{1.7}$$

其中 i, j 为自由指标，k 为哑标，表示 9 个方程：

$$\begin{aligned}
C_{11}' &= A_{1k}B_{1k} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{13}B_{13},\\
C_{12}' &= A_{1k}B_{2k} = A_{11}B_{21} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{23},\\
C_{13}' &= A_{1k}B_{3k} = A_{11}B_{31} + A_{12}B_{32} + A_{13}B_{33},\\
C_{21}' &= A_{2k}B_{1k} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{12} + A_{23}B_{13},\\
&\cdots,\\
C_{33}' &= A_{3k}B_{3k} = A_{31}B_{31} + A_{32}B_{32} + A_{33}B_{33}.
\end{aligned}$$

例外情况：

$$\left.\begin{aligned}
R_1 &= C_1E_1,\\
R_2 &= C_2E_2,\\
R_3 &= C_3E_3,
\end{aligned}\right\}\quad R_i = C_iE_{\underline{i}}. \tag{1.8}$$

这里 $\underline{i}$ 相当于一个自由指标，$\underline{i}$ 只是在数值上等于 $\underline{i}$，并不求和. 规定：出现双重指标但不求和时，在指标下方加下画线以示区别，或用文字说明（如 i 不求和）. 又如，方程

$$\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2 = \alpha_1\beta_1\Psi_1 + \alpha_2\beta_2\Psi_2 + \alpha_3\beta_3\Psi_3$$

用指标法表示，可写成

$$\Theta_i\Theta_i = \alpha_{\underline{i}}\beta_i\Psi_i = \alpha_i\beta_{\underline{i}}\Psi_i = \alpha_i\beta_i\Psi_{\underline{i}}. \tag{1.9}$$

上述 $\underline{i}$ 不参与求和，只在数值上等于 i.

1.2 Kronecker 符号

在卡氏直角坐标系下，Kronecker 符号定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \tag{1.10}$$

其中i,j为自由指标，取遍1,2,3；因此，可确定一个单位矩阵：

$$\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

若$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$是相互垂直的单位矢量，则

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij},\\ &\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=3.\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

而$\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$，所以

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i=\delta_{ii}. \tag{1.13}$$

注意：δ_{ii}是一个数，即$\delta_{ii}=3$.

δ_{ij}的作用如下：① 换指标；② 选择求和.

例 1.1 换指标：$A_i\to A_k$，

$$\delta_{ki}A_i=\delta_{\underline{kk}}A_k=A_k. \tag{1.14}$$

注 把要被替换的指标i变成哑标. 由于哑标能用任意字母表示，因此可用变换后的字母k表示.

例 1.2 选择求和：$T_{kj}\to T_{ij}$，

$$\delta_{ik}T_{kj}=\delta_{\underline{ii}}T_{ij}=T_{ij}. \tag{1.15}$$

特别地，

$$\delta_{ik}\delta_{kj}=\delta_{ij},\quad \delta_{ik}\delta_{kj}\delta_{jm}=\delta_{im}. \tag{1.16}$$

例 1.3 $A_{mi}B_{nj}$ 有 $3^4=81$ 个数，求 $m=n$ 项的和.

解 $m=n$ 项的和为

$$\delta_{mn}A_{mi}B_{nj}=A_{ni}B_{nj}=A_{mi}B_{mj}. \tag{1.17}$$

1.3 置换符号

三维置换符号：

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & i,j,k\text{是偶排列},\\ -1, & i,j,k\text{是奇排列},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{1.18}$$

例如，

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1,$$
$$\varepsilon_{321}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{132}=-1,$$
$$\varepsilon_{111}=\varepsilon_{121}=\varepsilon_{232}=\cdots=0.$$

可见

$$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}=-\varepsilon_{jik}=-\varepsilon_{ikj}=-\varepsilon_{kji}, \tag{1.19}$$

ε_{ijk} 也称为**三维空间的排列符号**.

若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是右手卡氏直角坐标系的单位基矢量，则

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k. \tag{1.20}$$

常见的恒等式有

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}, \tag{1.21}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}, \tag{1.22}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}=2\delta_{il}, \tag{1.23}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6=3!. \tag{1.24}$$

证 对行列式 $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$ 而言，因为

$$\begin{vmatrix} A_{il} & A_{im} & A_{in} \\ A_{jl} & A_{jm} & A_{jn} \\ A_{kl} & A_{km} & A_{kn} \end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}, \tag{1.25}$$

此即，指标任意排列，经过行列调整总可用右边表示，两个置换符号分别反映行、列调换及指标重复时的正、负及零.

令 $A_{ij}=\delta_{ij}$，则

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix},$$

$$\varepsilon_{ij3}\varepsilon_{lm3}=\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{i3} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{j3} \\ \delta_{3l} & \delta_{3m} & \delta_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & 0 \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{1.26}$$

即得(1.21)．将(1.26)作相应的指标替换，展开化简，将得(1.22)～(1.24)三式.

二维置换符号 $\tau_{\alpha\beta}(\alpha,\beta=1,2)$ 从三维退化得到：

$$\tau_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta 3}, \tag{1.27}$$

其中 $\tau_{11}=\tau_{22}=0$，$\tau_{12}=-\tau_{21}=1$.

有下列恒等式：

$$\tau_{\alpha\beta}\tau_{\gamma\delta}=\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}, \tag{1.28}$$

$$\tau_{\alpha\beta}\tau_{\alpha\delta}=\delta_{\beta\delta}, \quad \tau_{\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta}=2=2!. \tag{1.29}$$

关键公式推导：

$$\tau_{\alpha\beta}\tau_{\gamma\delta}=\begin{vmatrix} \delta_{\alpha\gamma} & \delta_{\alpha\delta} \\ \delta_{\beta\gamma} & \delta_{\beta\delta} \end{vmatrix}. \tag{1.30}$$