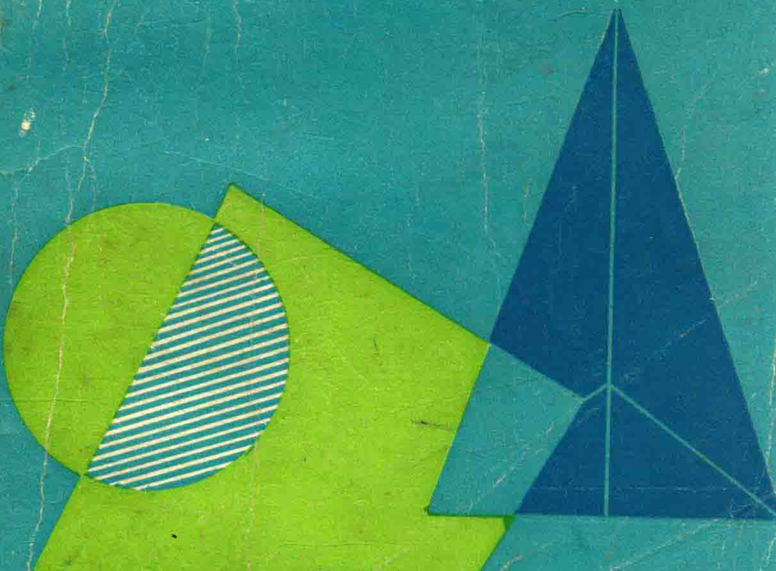
初中年级

初中数学专题讲座

林炳华 主编



气象出版社

初中数学专题讲座

主编　林炳华

气　象　出　版　社

(京)新登字 046 号

内 容 简 介

本书内容包括代数、平面几何和解三角形。共分为三十六讲，每一讲分为内容概要、范例分析和小结。通过典型范例分析，讲解基本知识、解题思路和解题方法，并且讲解如何审题、如何分析隐含条件以及一题多解等。本书以初中数学课本为主线，按知识系统性、连贯性，对初中数学课本的重要内容作了全面地、系统地论述。

本书适合初一、初二和初三师生使用，它也是社会青年巩固提高数学知识的参考书。

《初中数学专题讲座》
主编 林炳华

气象出版社出版
(北京西郊白石桥路 46 号)
北京商学院印刷厂印刷
新华书店总店北京科技发行所发行 全国各地新华书店经销
开本:787×1092 32开 印张: 8.875 字数: 180 千字
1993 年 12 月第一版 1993 年 12 月第一次印刷
印数:1—10000 定价: 4.80 元
ISBN7—5029—1478-1 / G·0353

编委会名单

前　　言

《初中数学专题讲座》一书由中国数学学会会员、福州中学数学高级教师林炳华主编。

编者自 1958 年由福建闽侯一中考入北京大学数学力学系，于 1963 年毕业。由林炳华同志主编的著作还有《递推数列与数列不等式》，此书由陕西科技出版社出版；《初中数学课堂教学专题设计》，此书由气象出版社出版；《高中数学专题讲座》，此书由气象出版社出版。

参加本书编写的还有福建、江西、浙江、上海、广东、广西、湖南、湖北、河南、江苏、安徽和甘肃等省市区县部分骨干教师。

限于编著者水平，书中难免有疏漏之处，欢迎广大读者批评指正。

编者　1993 年 3 月 15 日

于福州闽侯

目　录

第一章　代　数

第一节　实　数

一、内容概要

(一)　本节主要内容：

1. 实数的概念。

2. 实数的运算。

(二)　具体要求：

1. 了解实数的分类、掌握有关概念。

2. 掌握数轴、相反数、倒数、绝对值等概念。

3. 掌握实数大小比较法则。

4. 掌握实数运算法则，能准确、迅速地进行有理数的运算。

二、范例分析

例 1：指出下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

0，-1.5，$\sqrt{81}$，$\frac{\pi}{3}$，$0.2121121112\cdots$，$6.6\dot{3}$，$\frac{22}{7}$，$\sqrt{2}+1$，$\sqrt[3]{-27}$

解：0，-1.5，$\sqrt{81}$，$6.6\dot{3}$，$\frac{22}{7}$，$\sqrt[3]{-27}$是有理数。

$\frac{\pi}{3}$，　$0.2121121112\cdots$，　$\sqrt{2}+1$是无理数。

说明：对于实数的分类不能单着眼于形式，要从本质上观察它的类别。如带根号的未必是无理数，不带根号的也未必都是有理数。

例 2：填空：

(1) 若 a 与 b 互为相反数，则 a+b=____。若 a 与 b 互为倒数，则 a · b=____

(2) 若$|m| = m$ 则m____0

(3) 若$|x+1| = 4$ 则$x =$____

(4) 若$x = -x$ 则$x =$____

(5) 若$x = \frac{1}{x}$ 则$x =$____

(6) 能满足$-5 < x \leqslant 5$的所有奇数是____

解：(1) 0，1 (2) $m \geqslant 0$ (3) 3或-5 (4) 0 (5) ± 1 (6) -3，-1，1，3，5

说明：灵活掌握相反数、倒数、绝对值及奇偶数的特征。

例 3：求证：

(1) 任何奇数的平方，被 8 除余 1

(2) a、b、c 为整数,求证：A=(abc−a)(abc−b)(abc−c)必为偶数

证明：(1)设奇数为（2K+1）（K 是整数）

$(2K+1)^2=4K(K+1)+1$，∵ K(K+1)必为偶数，故奇数的平方被 8 除余 1

(2)（用反证法）假设 A 为奇数，则(abc−a)，(abc−b)，(abc−c)都是奇数，由于 abc−a=a(bc−1)，所以 a 是奇数。同理 b、c 都是奇数，于是 a、b、c 的积是奇数，abc−a 是偶数矛盾，故 A 必是偶数。

例 4：化简下列各式：

(1) $\sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1}$ $(0° < \alpha < 90°)$

(2) $|x-5| + |x+3|$

解：(1) 原式 $=\sqrt{(\cos\alpha-1)^2}=|\cos\alpha-1|=1-\cos\alpha$

(2) 讨论：当 $x<-3$ 时

$|x-5|+|x+3|=-(x-5)-(x+3)=-2x+2$

当 $-3\leqslant x\leqslant 5$ 时

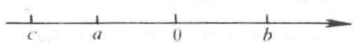
$|x-5|+|x+3|=-(x-5)+(x+3)=8$

当 $x>5$ 时

$|x-5|+|x+3|=x-5+x+3=2x-2$

说明：脱去绝对值符号时，首先要判断绝对值符号里的数是正数、负数还是零，应充分考虑题中所给的条件，有时应分情况进行讨论，其方法一般采用“数轴分段法”。即先求出使绝对值符号里的代数式的值为零的值，这些值将字母的取值范围分为若干个区间，然后把每一范围都进行讨论化简。脱去绝对值符号时，应特别注意绝对值符号里边是负数时，去掉绝对值一定在代数式的整体上加上负号，如果是差的形式，也可由大减小达到简便。

例 5：若 a、b、c 三个实数在数轴上相应点如图所示。



(1) 用不等号连接 a、b、c

(2) 化简：$b+|a-b|+|a-c|+|2a+c|$

解：(1) $c<a<b$

(2) $\because a<0,\quad c<0,\quad b>0$

$\therefore a-b<0,\quad a-c>0,\quad 2a+c<0$

$\therefore b+|a-b|+|a-c|+|2a-c|=b+b-a+a$

$-c-(2a+c)=2b-2a-2c$

说明：应用数轴来化简代数式具有很好的直观性，应注

意遵循数轴上右边点所对应的实数大于左边点所对应的实数，原点右侧的点所对应的实数是正数，原点左侧的点所对应的实数是负数，数轴上距原点较远的所对应实数绝对值较大。

例 6：已知 x、y 为实数

(1) 已知：$|x+y-2|+(2x-3y+1)^2=0$，求x、y的值

(2) 已知：$x^2+y^2-4x+6y+13=0$，求y^x的值

(3) 已知：$\sqrt{a+5}+|b+1|+(25x+2a^2-25b)^{20}=0$，求$x^{1992}$的值

解：(1) $\because |x+y-2|\geqslant 0$，　$(2x-3y+1)^2\geqslant 0$

又$\because |x+y-2|+(2x-3y+1)^2=0$

$\therefore x+y-2=0$，　$2x-3y+1=0$

由此二式解出：　$x=1, y=1$

(2) $\because x^2+y^2-4x+6y+13=x^2-4x+4+y^2+6y+9=(x-2)^2+(y+3)^2=0$

$\therefore x=2$，　$y=-3$　$\therefore y^x=(-3)^2=9$

(3) $\because \sqrt{a+5}+|b+1|+(25x+2a^2+25b)^{20}=0$

$\therefore a=-5$，　$b=-1$，　$x=-1$

$\therefore x^{1992}=(-1)^{1992}=1$

说明：绝对值、偶次方、偶次算术根都是非负数。

当若干个非负数的和为零时，这几个数同时为零，从而达到求特殊多元方程的解的目的。

例7：若x，y为实数且$y=\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}}{x+1}+4$

求：$x\cdot y$的值

解：$\because 2x-1\geqslant 0$，$1-2x\geqslant 0$

$\therefore x\geqslant \frac{1}{2}$，$x\leqslant \frac{1}{2}$　　$\therefore x=\frac{1}{2}$

$\therefore y=4$　　$\therefore x\cdot y=\frac{1}{2}\times 4=2$

说明：偶次根式的被开方数必须是非负数，再结合自变量的取值范围，可求得 x、y 的值。

例 8：比较下列各组数中两个实数的大小。

(1) 1.732和$\sqrt{3}$

(2) $-3\sqrt{7}$和$-|-8|$

(3) $|a+b|$和$-(m^2+1)$

(4) $\sqrt{14}-\sqrt{13}$和$\sqrt{11}-\sqrt{10}$

(5) $\frac{\pi+1}{2}$和$\frac{\pi+1}{\pi-1}$

解：(1)　$\because \sqrt{3}=1.732\cdots$

$\therefore \sqrt{3}>1.732$

(2)　$\because (3\sqrt{7})^2=63$，　$|-8|^2=8^2=64$

$\therefore 3\sqrt{7}<8=|-8|$

$\therefore -3\sqrt{7}>-|-8|$

(3)　$\because m^2+1>0$

$\therefore -(m^2+1)<0$

又$\because |a+b|\geqslant 0$

$\therefore |a+b|>-(m^2+1)$

(4)　$\because \frac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{13}}=\sqrt{14}+\sqrt{13}$

$\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}=\sqrt{11}+\sqrt{10}$

又$\because \sqrt{14}+\sqrt{13}>\sqrt{11}+\sqrt{10}$

$\therefore \sqrt{14}-\sqrt{13}<\sqrt{11}-\sqrt{10}$

(5) $\because \pi-1>2, \quad \pi+1>0$

$\therefore \frac{\pi+1}{2}>\frac{\pi+1}{\pi-1}$

说明：比较两个实数的大小，一般采用下列方法:

(1) 实数大小比较的定义（实数轴上的两个数总是右边的那个实数大于左边的那个实数）。

(2) 差值比较法即若 a-b>0，则 a>b；若 a-b<0，则 a<b；若 a-b=0，则 a=b。

(3) 商值比较法（又称商除法）即若 b>0，$\frac{a}{b}>1$，则 a>b；若 b>0，$\frac{a}{b}<1$，则 a<b；若$\frac{a}{b}=1$，则 a=b

(4) 传递比较法即若 a>b，b>c，则 a>c

例 9：已知二数 a，b 都大于 2，试比较 a+b 与 a·b 的大小。

解：（一）考虑差：ab-(a+b)=(a-1)(b-1)-1

$\because$a>2， b>2 $\therefore$a-1>1， b-1>1

$\therefore$(a-1)(b-1)>1 $\therefore$(a-1)(b-1)-1>0

$\therefore$ab-(a+b)>0， 即

ab>a+b

解：（二）考虑商 $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

$\because a>0, \quad b>2$

$\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{2}, \frac{1}{b}<\frac{1}{2}$

$\because \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

即$\frac{a+b}{ab} < 1$，$a + b < ab$

例10：计算（1） $-0.25^2 \div (-0.5)^4 \times (-1)^{-5} +$

$$(1\frac{3}{8} + 2\frac{1}{3} - 3.75) \times 24$$

(2) $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{9\times 10}$

解：(1) 原式 $= -(\frac{1}{4})^2 \div (-\frac{1}{2})^4 \times \frac{1}{(-1)^5} + (\frac{11}{8} + \frac{7}{3}$

$$-\frac{15}{4}) \times 24$$

$$= -\frac{1}{16} \div \frac{1}{16} \times (-1) + 33 + 56 - 90$$

$$= +1 - 1 = 0$$

(2) 原式 $= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{9}$

$$-\frac{1}{10})$$

$$= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

说明：对于实数的运算要熟记法则，掌握正确简捷的运算技巧，一般是把小数化成分数，带分数化成假分数，主要是在灵活运用法则和运算技巧的基础上进行。

第二节　整数的四则运算

一、内容概要

能正确、熟练地进行整式的四则运算，要牢固掌握去括

号、合并同类项、正整数指数幂的运算法则和多项式乘法公式，并能运用多项式乘法公式进行特殊形式的多项式的乘法运算。

二、范例分析

例 1：选择题

1. 含有三个字母 x、y、z 的系数为 2 的五次单项式总共有（　　）

(A) 5 个　　(B) 6 个　　(C) 7 个　　(D) 9 个

解：本题可用列举法把符合条件的单项式排出来，然后统计其数量，含有三个字母 x、y、z 的系数为 2 的五次单项式有 $2abc^3$、$2ab^3c$、$2a^3bc$、$2a^2b^2c$、$2a^2bc^2$、$2ab^2c^2$ 共 6 个，选（B)。

说明：利用列举法应注意按照一定的规则顺序排列，才易做到不重复、不遗漏。

2. $(x^2-1)^5$ 与 $(x^3+1)^4$ 积的次数是(　　)

(A) 14　　(B) 120　　(C) 20　　(D) 22

解：多项式的次数是最高次项的次数，因此本题只要计算 $(x^2)^5(x^3)^4$ 的次数，是 22 次，选（D)。

说明：m 次多项式与 n 次多项式相乘，所得结果是一个 m+n 次多项式，多项式在加减运算中，和（或差）的次数不大于每一个加式的次数。

例 2：计算

(1) $3a^2(2a-b)^3(b-2a)^4 \div [(2a-b)^2(b-2a)^3]$

(2) $\frac{1}{2}x^n \div x^{n-1} - (x^3-1) \div (x^2+x+1)$

(3) $(x+y)^2-(x-y)^2+(x-2y)(x+3y)-(x-2y)^2$

解：(1) 原式 $= 3a^2(2a-b)^4[-(2a-b)]^4 \div \{(2a$

$-b)^2[-(2a-b)]^3\}$

$= 3a^2(2a-b)^3(2a-b)^4 \div [-(2a-b)^2(2a-b)^3]$

$= -3a^2(2a-b)^2 = -12a^4 + 12a^3b - 3a^2b^2$

(2) 原式 $= \frac{1}{2}x - (x-1)(x^2+x+1) \div (x^2+x+1)$

$= \frac{1}{2}x - (x-1) = -\frac{1}{2}x + 1$

(3) 原式 $= [(x+y)+(x-y)][(x+y)-(x-y)] + (x-2y)[(x+3y)-(x-2y)]$

$= 2x \cdot 2y + (x-2y) \times 5y$

$= 4xy + 5xy - 10y^2 = 9xy - 10y^2$

说明：（1）本题把多项式看成一个因式，化为同底数幂的乘除法。在计算过程中要特别注意互为相反数的因式的符号处理。

（2）多项式除以多项式运算，可以根据多项式的特点，把被除式因式分解，然后再计算，比较简便。

（3）在多项式乘法中，可以根据多项式的特点，进行因式分解后，再计算，比较简便。

例3：化简求值 $15a^2 - \{-4a + 5[a - \frac{1}{2}(2a^2 - a)]\}$

其中：$a = -\frac{1}{5}$

解：原式 $= 15a^2 - \{-4a + 5[a - a^2 + \frac{1}{2}a]\}$

$$= 15a^2 - \{-4a + 5[-a^2 + \frac{3}{2}a]\}$$

$$= 15a^2 - \{-4a - 5a^2 + \frac{15}{2}a\}$$

$$= 15a^2 - \{-5a^2 + \frac{7}{2}a\}$$

$$= 15a^2 + 5a^2 - \frac{7}{2}a = 20a^2 - \frac{7}{2}a$$

当$a = -\frac{1}{5}$时 原式$= 20 \times (-\frac{1}{5})^2 - \frac{7}{2} \times (-\frac{1}{5}) = 1\frac{1}{2}$

说明：求代数式值时，能化简的要先化简，在一些较复杂的问题中，有含有几层括号，一般地，应从里向外逐层去括号，并且每去一层括号如能合并同类项就合并同类项，也可以从外向里逐步去括号，特别要注意括号前面是“-”号的情况，在运用乘法分配律时，要分配到括号里每一项。

代数式的值是由代数式里字母所取的值确定的，因此，不要漏写“当…时”前提，并且用数值代替字母时不能改变原来字母在原式中所处的地位，有时需加括号。

例 4：计算

(1) $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)$

(2) $(a+b-c+d)(-b-a+c-d)$

(3) $(x+y)^2(x-y)^2(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

解：(1) 原式

$= [a+(b-c)][a-(b-c)][(b+c)-a][(b+c)+a]$

$= [a^2-(b-c)^2][(b+c)^2-a^2]$

$= [2bc+(a^2-b^2-c^2)][2bc-(a^2-b^2-c^2)]$

$= (2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2 = -a^4-b^4-c^4+$
$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$