李成章教练奥数笔记

第2卷

李成章 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

LI CHENG ZHANG JIAO LIAN AO SHU BI JI

李成章教练奥数笔记

第2卷

李成章　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书为李成章教练奥数笔记第二卷，书中内容为李成章教授担任奥数教练时的手写原稿. 书中的每一道例题后都有详细的解答过程，有的甚至有多种解答方法.

本书适合准备参加数学竞赛的学生及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

李成章教练奥数笔记. 第2卷/李成章著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.1

ISBN 978-7-5603-5565-8

Ⅰ.①李… Ⅱ.①李… Ⅲ.①数学-竞赛题-题解 Ⅳ.①O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第191112号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 16.75 字数 185 千字
版　　次 2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5565-8
定　　价 48.00元

◎

目录

一 反证法

1 在正面证明时，不能假设结论成立而用于推理论证，但在反面证明时，却可以假设结论不成立而用于论证，这相当于增加了一个条件，从而常常导致反面证明更强有力或者更便捷一些．

2 结论是"不可能…"，"不存在…"和"没有…"的命题称为否定命题．证明否定命题，绝大多数命题都使用反证法．

3 命题的结论是相当多甚至无穷多的对象都具有某种性质，不易一一验证或无法一一验证，可以考虑使用反证法，去假设有一个对象不成立，而去导出矛盾．

4 命题的结论是具有某种性质的元素或元素集合的存在性，而其存在的形式或位置很不确定或难于捉摸，可以考虑使用反证法，假设它不存在而去导出矛盾．

5 有些命题从已知条件出发，不易或不能导出结论，常常显得条件不足，短时间内无法解决，这时可以考虑反证法，试之加了一个反证假设之后能否解决问题．

6．有些题目既可以正面证明又可以反面证明，但正面证明时需要分情况讨论，反证时则可简捷一些，当然宜用反证法．

7．反证法是证题的基本方法之一，使用范围相当广阔，与正面方法同等重要．当正面证明受阻时，应及时试用反证法，看看反证的路子可否走通．

8．反证法常常与极端原理，不变量及换序求和等方法联用．

9．奇偶性分析法是常用的反证法．

1　设 a,b,c 是 3 个互异的整数而 $P(x)$ 是一个整系数多项式，求证不可能同时有 $P(a)=b$，$P(b)=c$，$P(c)=a$.

（1974年美国数学奥林匹克）

证　若不然，则有互异的整数 a,b,c 使得 $P(a)=b$，$P(b)=c$，$P(c)=a$. 由轮换对称性知可设 $a>b$，$a>c$.

若 $b>c$，则有

$$0<\left|\frac{P(c)-P(a)}{c-a}\right|=\left|\frac{a-b}{c-a}\right|<1. \quad ①$$

另一方面，设

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中诸 a_j 均为整数，于是又有

$$P(c)-P(a)=\sum_{j=0}^{n}a_j(c^j-a^j)=(c-a)\sum_{j=0}^{n}a_j\left(\sum_{k=0}^{j-1}c^ka^{j-k-1}\right). \quad ②$$

这表明比值

$$\frac{P(c)-P(a)}{c-a}$$

为整数，但(1)式又表明这个比值不可能为整数，矛盾.

若 $b<c$，则有

$$0<\left|\frac{P(a)-P(b)}{a-b}\right|=\left|\frac{b-c}{a-b}\right|<1.$$

这表明比值 $[P(a)-P(b)]/(a-b)$ 不能是整数. 而象②一样地又可证明这个比值是整数，矛盾.

2　共有27个国家参加一次国际会议，每国都是两名代表．求证不可能将这54名代表安排在一张圆桌的周围就座，使得任何一国的两位代表之间都隔着9个人．（1988年南斯拉夫数学奥林匹克）

证1　若不然，则存在一种排座次法使得每个国家的两名代表之间都隔着9个人．

将54个座位从1到54依次编号，不妨设1号与11号位的两名代表是一个国家的．于是21号的代表不能与11号代表同国，而只能与31号同国．

$\{1,11\}$，$\{21,31\}$，$\{41,51\}$，$\{7,17\}$，$\{27,37\}$，$\{47,3\}$，

$\{13,23\}$，$\{33,43\}$，$\{53,9\}$，$\{19,29\}$，$\{39,49\}$，$\{5,15\}$，

$\{25,35\}$，$\{45,x\}$．

这表明，45号代表既不能与35号同国，也不能与1号同国，矛盾．

证2　若不然，则存在一种排座次法，使得每个国家的两名代表之间都隔着9个人．

将54人按座位的顺时针顺序从1至54编号．由于每个国家的两名代表之间都隔着9个人，所以每个国家的两位代表的奇偶性均相同．将每个国家两名代表的号码算一组，54个号码分成27组，至少有一组号码奇偶性不同，矛盾．　奇偶性分析法

证3　任取27国中两个国家的4名代表来看．若甲国的两人之间有乙国1人，则乙国的两人之间所隔的9人中也有甲国1人；若甲国两人之间所隔的9人中没有乙国代表，则乙国两人之间也没有甲

国的代表．可见，甲国和乙国两人之间互夹的代表数或为2或为0，总是偶数．因此，所有国家所夹人数之总数应为偶数．

另一方面，每个国家的两人之间夹有9人，27个国家所夹人数之和应为27×9，是奇数，矛盾．

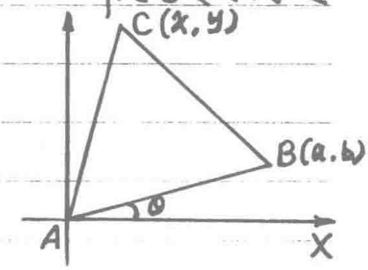
证4　若不然，设题中要求的排座次法存在．用圆上的54个等分点来代表54位代表，于是每个国家的两名代表所对应的两点之间都隔着9个点．将每个国家两名代表所对应的两点之间连一条线段．于是得到一个图，每点度数都是1，54个顶点之间恰连有27条边．

容易看出，每条线段与其他线段都恰有9个交点，共有27×9＝243个交点．交点总数为奇数．　$\boxed{\text{图论方法}}$

另一方面，每个交点都是两条线的交点，在上述计数过程中，在两条线段上各计1次，即每个交点恰被计数两次，所以总数应为偶数．矛盾．

3　坐标平面上两个坐标都是整数的点称为整点，试证平面上任何3个整点都不能是一个正三角形的3个顶点．

证1　设有3个整点A，B，C是一个正三角形的3个顶点．设△ABC边长为r，不妨设A为原点，记∠BAX＝θ，于是∠CAX＝$60°+\theta$．记B和C的坐标分别为(a,b)，(x,y)，其中a,b,x,y都是整数．于是



$$a=r\cos\theta,\quad b=r\sin\theta.$$

$$\begin{aligned}\therefore x&=r\cos(60°+\theta)\\&=r\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\\&=\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b,\end{aligned}$$

$$y=r\sin(60°+\theta)=\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

∵ a和b都是整数且至少有1个不为0，

∴ x和y至少有1个是无理数，而不能为整数．

矛盾．

证2　设有3个整点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$和$C(x_3,y_3)$使得△ABC是正三角形，其中x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3都是整数．显然，△ABC的3边中至少有两条不与y轴平行，不妨设为AB与AC．于是直线AB，AC的斜率分别为

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\qquad k_{AC}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}.$$

又由两条直线的夹角公式有

$$\tan A=\left|\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}\cdot k_{AB}}\right|=\left|\frac{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{1+\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}\cdot\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}\right|.$$

上式右端是整数的四则运算，所得结果当然是有理数．但是，左端的 $\tan A=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ 却是无理数，矛盾．

证 3　若不然，设有 3 个整点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 和 $C(x_3,y_3)$，使得 $\triangle ABC$ 为正三角形．于是

$$S_{\triangle ABC}=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|.$$

面积法

有理数与无理数的矛盾

显然，$S_{\triangle ABC}$ 为有理数．

另一方面，又有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\},$$

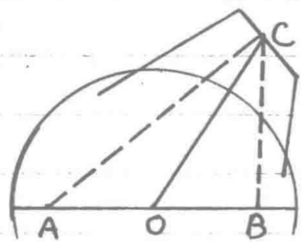
表明 $S_{\triangle ABC}$ 为无理数，矛盾．从而原命题成立．

4. 试证任何一个周长为$2a$的多边形，总可以用一个直径为a的圆纸片把它完全盖住.

证 设W是一个周长为$2a$的多边形. 在多边形W的周界上取两点A和B，使它们平分多边形的周界，即两点恰将周界分成长为a的两部分. 于是$AB<a$.

记AB的中点为O. 以O为圆心，a为直径作$\odot O$. 让我们来证明直径为a的圆纸片的边界重合于$\odot O$时，就完全盖住了W.

若不然，设有多边形W的周界上的点C在$\odot O$之外，则$OC>\frac{a}{2}$. 连结CA，CB，于是CO为$\triangle ABC$的AB边上的中线.



大于与不大于的矛盾

$$\therefore AC+CB>2CO=a.$$

另一方面，点A，C，B所在的多边形W的半周长为a，又有

$$AC+CB\le a.$$

矛盾.

5　在一个平面上给定无穷多个点，使得它们两两之间的距离都是整数，求证这些点都在一条直线上。（1958年普特南竞赛）

证　若不然，则存在3个给定点A，B，C，使这3点不共线且AB $= r$，AC $= s$ 和BC都是整数。

设点P是异于A，B，C的任一给定点，于是由三角不等式有

$$|PA-PB| \leqslant AB = r,$$

即$|PA-PB|$是整数0，1，2，…，r中的一个。当$|PA-PB| = r$时，点P位于 ~~因A,B,C不共线，所以 $|PA-PB|<r$~~

$$H_r = \text{直线}AB - [A,B]$$

上；当$|PA-PB| = 0$时，$PA = PB$，点P位于

$$H_0 = \text{线段}AB\text{的中垂线}$$

上；当$|PA-PB| = i$，$1 \leqslant i \leqslant r-1$时，点P位于双曲线

$$H_i = \{X \mid |XA-XB| = i\},\quad 1 \leqslant i \leqslant r-1$$

上。同理，点P也必落在直线及双曲线

有限与无限的矛盾

$$K_0 = \text{线段}AC\text{的中垂线},$$

$$K_s = \text{直线}AC,$$

$$K_j = \{X \mid |XC-XA| = j\},\quad j = 1,2,\cdots,s-1$$

之一上。由此可知，点P必落在集合

$$H_i \cap K_j,\quad i = 0,1,\cdots,r,\quad j = 0,1,\cdots,s$$

之一上。由于A，B，C三点不共线，所以

$$|H_i \cap K_j| \leqslant 4,\quad i = 0,1,\cdots,r,\quad j = 0,1,\cdots,s.$$

因此，集合

$$M=\bigcup_{i,j}(H_i\cap K_j)$$

的点数不超过 $4(r+1)(s+1)$，为有限集，此与给定点有无穷多个矛盾。所以过无穷多个给定点的线都在一条直线上。

6　在平面上给定$n(\geq 5)$个不同的圆，其中任何3个圆都有公共点，求证这n个圆必有公共点。

证　若不然，则这n个圆没有公共点，但其中任何3个圆都有公共点。

设点A是3个给定圆$\odot C_1$，$\odot C_2$，$\odot C_3$的公共点。因为A不是所有圆的公共点，所以必存在一个给定圆$\odot C_4$，使$\odot C_4$不过点A。

若$\odot C_1$，$\odot C_2$，$\odot C_3$中有两圆切于点A，则$\odot C_4$与此两圆共3个圆没有公共点，与已知矛盾。故知$\odot C_1$，$\odot C_2$，$\odot C_3$必两两相交。

若$\odot C_1$，$\odot C_2$，$\odot C_3$除点A之外还有一个公共点B，则因$\odot C_1$，$\odot C_2$，$\odot C_4$有公共点，所以$\odot C_4$必过点B。又因$n\geq 5$且B不是所有圆的公共点，所以存在$\odot C_5$不过点B。与前类似地可证$\odot C_5$必过点A。设$\odot C_4$与$\odot C_1$，$\odot C_2$，$\odot C_3$的另一个交点分别为P，Q，R，则P，Q，R 3点互不相同。又因$\odot C_1$，$\odot C_4$，$\odot C_5$有公共点，所以$\odot C_5$必过点P。同理，$\odot C_5$必过点Q和R，从而$\odot C_5$与$\odot C_4$重合，此不可能。所以$\odot C_1$，$\odot C_2$，$\odot C_3$只能有唯一的公共点且3个圆两两相交。记$\odot C_1\cap\odot C_2=\{A,M_3\}$，$\odot C_2\cap\odot C_3=\{A,M_1\}$，$\odot C_3\cap\odot C_1=\{A,M_2\}$。

考察$\odot C_1$，$\odot C_2$，$\odot C_4$。3个圆有公共点但$\odot C_4$不过点A，所以$\odot C_4$必过点M_3。同理$\odot C_4$必过点M_1和M_2。因为$n\geq 5$，故还有$\odot C_5$。这时由于$\odot C_i$，$\odot C_j$，$\odot C_5$ $(1\leq i<j\leq 4)$必有公共点，所以$\odot C_5$必过$\{A,M_1,M_2,M_3\}$中任何一对点中之一点，从而必过4点中的至少3点。而这4点中的任何3点恰好确定$\odot C_1$，$\odot C_2$，$\odot C_3$，$\odot C_4$之一。这导致$\odot C_5$与前4个圆之一重合，矛盾。

7 能否将一个凸多边形划分成若干个非凸的四边形？

（1975年莫斯科数学奥林匹克）

解 设凸多边形M被划分成n个非凸四边形．这时，n个四边形的内角和为$2n\pi$．

如果四边形的某个顶点处的内角大于π，则称该顶点为四边形的凹点．显然，凹点不会位于凸多边形M的边界上，并且任何两个四边形的凹点都不重合．由此可知，n个非凸四边形的至少n个凹点互不相同且全部位于多边形M的内部．因此，这n个非凸四边形的内角和将大于$2n\pi$，矛盾．

可见，不可能将一个凸多边形划分成若干个非凸多边形．

8　设 $f(x)$ 为整系数多项式，a、b、c 是 3 个互异的整数且使 $|f(a)|=|f(b)|=|f(c)|=1$，求证 $f(x)$ 没有整数根．

（1967年波兰数学奥林匹克）

证　若不然，设 $f(x)$ 有整数根 x_0，于是可写成

$$f(x)=(x-x_0)\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 为整系数多项式．由已知有

$$1=|f(a)|=|(a-x_0)\varphi(a)|.$$

因为 $|\varphi(a)|$ 为整数，所以 $|a-x_0|$ 为正整数且为 1 的约数，所以

$$|a-x_0|=1.$$

3个根互异与其中两根相同的矛盾

同理有

$$|b-x_0|=1,\quad |c-x_0|=1.$$

因而有

$$a,b,c\in\{x_0-1,\ x_0+1\}.$$

由抽屉原理知，a，b，c 这 3 个数中至有两个相等．此与已知这 3 个数互不相同矛盾．所以 $f(x)$ 没有整数根．

9．若在两个相邻的完全平方数之间有若干个互不相同的自然数，则它们之中两两之积互不相等．（1983年全苏数学奥林匹克）

证　若不然，则有自然数 n，a，b，c，d 满足

$$n^2<a<b<c<d<(n+1)^2,\quad ad=bc.$$

于是可写

$$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}=\frac{p}{q},\quad p>q\text{ 且 }(p,q)=1. \qquad ①$$

因而有

$$p\geqslant q+1,\quad \frac{p}{q}\geqslant 1+\frac{1}{q}. \qquad ②$$

由①知 a 和 b 都是 q 的倍数且 $b>a$，所以有 $b\geqslant a+q$．于是由此及①、②两式有

$$1+\frac{1}{q}\leqslant\frac{p}{q}=\frac{d}{b}\leqslant\frac{d}{a+q}<\frac{(n+1)^2}{n^2+q},$$

$$(q+1)(n^2+q)<q(n+1)^2,$$

$$qn^2+n^2+q^2+q<qn^2+2nq+q$$

$$n^2+q^2<2nq$$

$$(n-q)^2<0,$$

$\boxed{\text{小于0与不小于0的矛盾}}$

矛盾．