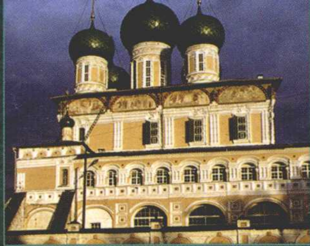
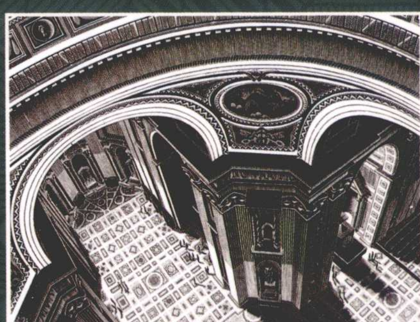


高等数学习题集
精 品 系 列

高等代数例选
通过范例学技巧

朱尧辰 编著



朱尧辰，江苏镇江人，1942年生，1964年毕业于中国科学技术大学应用数学系，1992年任中国科学院应用数学研究所研究员，主要研究数论，曾任《数学进展》常务编委。1983年至1993年期间先后在法国Henri Poincaré研究所和IHES、德国Max-Planck数学研究所和Kōln大学、美国Southern Mississippi大学、香港浸会学院等科研机构或大学从事合作研究，迄今发表论文约100篇，出版专著5本，享受国务院政府特殊津贴。

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

LECTED EXAMPLES OF ADVANCED ALGEBRA LEARNING SKILLS THROUGH EXAMPLE

高等代数例选

通过范例学技巧

● 朱尧辰　编著

HITP 哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书通过解一些特别挑选的范例和杂题(约 300 个题或题组,包含问题 500 多个)来展示高等代数习题的某些解题技巧.问题选材范围比较广泛,解法具有启发性和参考价值.

本书可作为大学数学系师生的教学参考书,或研究生入学应试备考资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数例选:通过范例学技巧/朱尧辰编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.6

ISBN 978-7-5603-5174-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①高等代数—高等学校—题解 Ⅳ.①O15-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 015440 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 李 欣
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 33.75 字数 584 千字
版　　次 2015 年 6 月第 1 版 2015 年 6 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5174-2
定　　价 88.00 元

前　言

编写本书的想法基本上与之前出版的《数学分析例选:通过范例学技巧》类似, 可以看作是一本“另类”的数学习题集.它通过解答一些经过特别挑选的例题来展示解高等代数习题的某些方法,以有助于具有一定高等代数解题基础的大学生“揣摩”和领会有关技巧,为有关师生提供一个教学辅导材料,也可作为硕士研究生入学考试的应试复习参考资料.

本书取材范围涉及通常高等代数课程中的线性代数和多项式理论两个方面, 素材主要取自多种中外数学书刊,偏重于综合性问题,有一定难度,但过于专门的问题一般不选. 因为市面上学习辅导书籍甚多,所以选题时不再刻意避免与这些书中问题重复.所选问题粗略地划分为八章,不追求面面俱到.用主要篇幅即第1~7章安排线性代数问题,第8章给出与多项式有关的问题.所有的解答都是经过重新加工整理或改写的,多数包含必要的计算或推理的细节,有的附加若干注释或少许引申材料; 有些问题或解法是作者自行设计的(但未必一定是新的).除正文外,附两组杂题.杂题I选自较早年代的某些硕士研究生入学考试试题,未给解答或提示;杂题II是供读者选用的补充题, 多数给出解答或提示.正文和杂题II中带“*”的问题是某些(国内外)研究生入学考试试题.

限于作者的水平和经验,本书在取材、编排和解题等方面难免存在不妥、疏漏甚至谬误, 欢迎读者和同行批评指正.

朱尧辰

2014年9月

北京

符号说明

（按CTex通用符号）

1° $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ (依次) 正整数集,整数集,有理数集,实数集,复数集.

$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

$\mathbb{R}_+$ 正实数集.

2° $[a]$ 实数a的整数部分,即不超过a的最大整数.

$\{a\}=a-[a]$ 实数a的分数部分.(也称小数部分)

$a\mid b\,(a\nmid b)$ 整数a整除(不整除)整数b.

$\gcd(a,b)$ 整数a,b的最大公因子,不引起混淆时可记为(a,b).

$\delta_{i,j}$ Kronecker符号,即当$i=j$时其值为1,否则为0.

3° $\log_b a$ 实数$a>0$的以b为底的对数.

$\log a$(与$\ln a$同义) 实数$a>0$的自然对数.

$\exp(x)$ 指数函数e^x.

4° $\mathbb{R}[x]$ 所有变量x的实系数多项式组成的集合($\mathbb{R}$可换成其他集合).

$\deg P$ 多项式$P(x)$的次数.

$f(x)\mid g(x)\ \big(f(x)\nmid g(x)\big)$ 多项式$f(x)$整除(不整除)多项式$g(x)$.

$\gcd\big(f(x),g(x)\big)$ 多项式$f(x),g(x)$的最大公因式,不引起混淆时可记为(f,g).

$\operatorname{res}(f,g)$ 多项式$f(x),g(x)$的结式.

5° $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 线性空间V中向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的内积.

$\mathbf{x}'\mathbf{y}$ 向量$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)',\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_n)'\in\mathbb{R}^n$的(标准)内积(也称数量积)的传统记号, 即$x_1y_1+\cdots+x_ny_n$.

$(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$及$(a_{ij})_{m\times n}$ 第i行、第j列元素为a_{ij}的$m\times n$矩阵.

$(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$及$(a_{ij})_n$ 第i行、第j列元素为a_{ij}的n阶方阵,不引起混淆时可记为(a_{ij}).

I_n　n阶单位方阵,不引起混淆时可记为I.

$O_{m\times n}$, $O_{m,n}$　$m \times n$零矩阵,不引起混淆时可记为O.

O_n　n阶零方阵,不引起混淆时可记为O.

A'　矩阵A的转置矩阵.

$\overline{A}$　矩阵A的共轭矩阵.

A^*　矩阵A的共轭转置矩阵,即$\overline{A'} = (\overline{A})'$.

$\mathrm{adj}(A)$　方阵A的伴随方阵.

$\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$　主对角线元素为$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$的$n$阶对角方阵.

$\mathrm{circ}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$　n阶巡回方阵,其第1行是$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

$P(i,j), P\big(i(c)\big), P\big(i,j(c)\big)$　三种初等矩阵(分别表示: 左乘方阵A时,交换A的第i和第j行,用c乘A的第i行,将A的第j行的c倍加到第i行. 右乘A时,则相应地变换列).

$\mathrm{tr}\, A, \mathrm{tr}\,(A)$　矩阵A的迹.

$r(A)$　矩阵A的秩.

$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_s \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$　矩阵$A = (a_{ij})$的s阶子阵$(a_{i_k,j_l})_{1\leqslant k,l\leqslant s}$, 其中$i_1 < i_2 < \cdots < i_s, j_1 < j_2 < \cdots < j_s$.

$\det(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \det(a_{ij})_n, |(a_{ij})|_n$　第i行、第j 列元素为a_{ij}的n阶行列式,不引起混淆时可记为$\det(a_{ij})$和$|(a_{ij})|$.

$\det(A), \det A, |A|$　方阵A的行列式.

6° $\oplus$　直和.

$\dim \mathscr{M}$　空间$\mathscr{M}$的维数.

$\mathrm{Im}(A)$　矩阵(或线性变换)A的象空间(也称值域).

$\mathrm{Ker}(B)$　矩阵(或线性变换)A的核空间(也称零空间).

$V^{\perp}$　子空间V的正交补.

$M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^{n\times n}$　所有n阶实矩阵组成的线性空间($\mathbb{R}$可换成其他数域).

7° $\square$　表示问题解答完毕.

目　录

第1章 行列式

1.1 与Vandermonde行列式有关的计算

1.1.1 (Vandermonde行列式) 若$x_1, x_2, \cdots, x_n$是任意复数,则

$$V_n = V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

证 这里给出4种证法,涉及多种行列式计算的基本技巧,如多项式的因式分解(证法1和2), 数学归纳法(基于递推关系)(证法3和4),加边技巧(证法2).证法4比较特殊,不为人熟知.

证法1 行列式的展开式共含$n!$项,每项都是形式为$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$的乘积, 其中$\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$是$\{0, 1, \cdots, n-1\}$的一个排列.因为

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2} n(n-1)$$

所以展开式是变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的$n(n-1)/2$次齐式.如果我们将V_n看作x_1的多项式,那么当x_1分别等于$x_2, x_3, \cdots, x_n$时, 行列式都有两行相等,所以等于0,因此$V_n(x_1, \cdots, x_n)$有因式$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)$,也就是

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)$$

(这种改写至多可能相差一个符号,只影响下文中的常数c的符号).类似地, 将V_n看作x_2的多项式,可知$V_n(x_1, \cdots, x_n)$有因式

$$(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \cdots (x_n - x_2)$$

等等.一般地,$V_n(x_1, \cdots, x_n)$有因式

$$\prod_{u=v}^{n} (x_u - x_{v-1}) \quad (v = 2, 3, \cdots, n)$$

这些表达式都是1次因式之积,这些1次因式两两互异,总数等于

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

所以它们的乘积是变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的$n(n-1)/2$次齐式. 于是我们得知$V_n(x_1, \cdots, x_n)$有因式分解

$$V_n(x_1, \cdots, x_n) = c\prod_{v=2}^{n}\prod_{u=v}^{n}(x_u - x_{v-1})$$

其中c是一个常数.因为行列式V_n的主对角线元之积等于

$$x_2x_3^2x_4^3\cdots x_n^{n-1}$$

而将前式展开后可知,含有

$$cx_2x_3^2x_4^3\cdots x_n^{n-1}$$

因此$c=1$,于是

$$V_n(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{v=2}^{n}\prod_{u=v}^{n}(x_u - x_{v-1}) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$$

证法2　令

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

那么$P(x)$是x的$n-1$次多项式,并且当$x = x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$时,总有两行相等,因而$P(x)$有根$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$,从而

$$P(x) = c\prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)$$

其中c是x^{n-1}的系数.按最后一行展开行列式得$c = V_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1})$,因此

$$P(x) = V_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)$$

在其中令$x=x_n$,那么$P(x_n)=V_n(x_1,\cdots,x_n)$,因此得到递推关系式

$$V_n(x_1,\cdots,x_n)=V_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(x_n-x_i)$$

由此可推出所要的公式.

证法3　将行列式V_n的第n列减去其前一列(第$n-1$列) 的x_n倍,得到

$$\begin{aligned}V_n &= \begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1}-x_nx_1^{n-2}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1}-x_nx_2^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1}-x_nx_{n-1}^{n-2}\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & 0\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-2}(x_1-x_n)\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-2}(x_2-x_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n)\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & 0\end{vmatrix}\end{aligned}$$

类似地,将上面行列式的第$n-1$列减去其前一列(第$n-2$列)的x_n倍,可得

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-3}(x_1-x_n) & x_1^{n-2}(x_1-x_n)\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-3}(x_2-x_n) & x_2^{n-2}(x_2-x_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1}-x_n) & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n)\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

一般地,逐次将所得行列式的第j列减去其前一列(第$j-1$列)的x_n倍($j=$

$n, n-1, n-2, \cdots, 3, 2)$,我们推出

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \cdots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ 1 & x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

按最后一行展开,可知

$$V_n = (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \cdots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \end{vmatrix}$$

由各行提取公因式得到

$$\begin{aligned} & V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ = \ & (-1)^{n+1} \prod_{u=1}^{n-1} (x_u - x_n) \cdot V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \\ = \ & (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \prod_{u=1}^{n-1} (x_n - x_u) \cdot V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \\ = \ & \prod_{u=1}^{n-1} (x_n - x_u) \cdot V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

在上式中将n换为$n-1$,对$V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$,我们有

$$V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = \prod_{u=1}^{n-2} (x_{n-1} - x_u) \cdot V_{n-2}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-2})$$

重复这个过程$n-1$次,注意$V_1(x_1) = 1$,最终得到

$$V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{v=2}^{n} \prod_{u=1}^{v-1} (x_v - x_u) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

证法 4　我们引进下列n阶方阵,其行列式之值等于1, 并且它的第k

$(k \geqslant 2)$行的元素由$(1-x_1)^{n-1}$的展开式的各项(降幂排列)确定

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (-x_1)^2 & \binom{2}{1}(-x_1) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ (-x_1)^3 & \binom{3}{2}(-x_1)^2 & \binom{3}{1}(-x_1) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-x_1)^{n-1} & \binom{n-1}{n-2}(-x_1)^{n-2} & \binom{n-1}{n-3}(-x_1)^{n-3} & \binom{n-1}{n-4}(-x_1)^{n-4} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

容易验证用它左乘$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$所对应的矩阵的转置矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

所得之积等于

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & (x_2-x_1)^2 & (x_3-x_1)^2 & \cdots & (x_n-x_1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (x_2-x_1)^{n-1} & (x_3-x_1)^{n-1} & \cdots & (x_n-x_1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

所以我们有

$$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & (x_2-x_1)^2 & (x_3-x_1)^2 & \cdots & (x_n-x_1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (x_2-x_1)^{n-1} & (x_3-x_1)^{n-1} & \cdots & (x_n-x_1)^{n-1} \end{vmatrix}$$

由此得到递推关系式

$$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{u=2}^{n}(x_u-x_1)\cdot V_{n-1}(x_2-x_1,x_3-x_1,\cdots,x_n-x_1)$$

对$V_{n-1}(x_2-x_1,x_3-x_1,\cdots,x_n-x_1)$应用这个递推关系式(视$x_2-x_1,x_3-x_1,\cdots,x_n-x_1$为参数,并注意$(x_3-x_1)-(x_2-x_1)=x_3-x_2$,等等),可知

$$\begin{aligned}&V_{n-1}(x_2-x_1,x_3-x_1,\cdots,x_n-x_1)\\=&\prod_{u=3}^{n}(x_u-x_2)\cdot V_{n-2}(x_3-x_2,x_4-x_2,\cdots,x_n-x_2)\end{aligned}$$

继续这个过程有限步,最终得到

$$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{v=1}^{n-1}\prod_{u=v+1}^{n}(x_u-x_v)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\qquad\square$$

1.1.2 (1) 设$n\geqslant 2$.证明

$$\begin{aligned}J_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)&=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-2}&a_2^{n-2}&\cdots&a_n^{n-2}\\a_2a_3\cdots a_n&a_1a_3\cdots a_n&\cdots&a_1a_2\cdots a_{n-1}\end{vmatrix}\\&=(-1)^{n-1}V_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)\end{aligned}$$

其中$V_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是Vandermonde行列式.

(2) 设$a_{ij}=(t+x_i)^j\,(i,j=1,2,\cdots,n)$.令$F(t)=\det(a_{ij})_n$.证明

$$x_1x_2\cdots x_nF(t)=F(0)(t+x_1)(t+x_2)\cdots(t+x_n)$$

证 (1) 首先设某些$a_i=0$,例如,设$a_1=0$,那么

$$J_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a_2^{n-2}&\cdots&a_n^{n-2}\\a_2a_3\cdots a_n&0&\cdots&0\end{vmatrix}$$

按第n行展开得到

$$
\begin{aligned}
& J_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\
= \ & (-1)^{n+1} a_2 a_3 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
= \ & (-1)^{n+1} a_2 a_3 \cdots a_n V_{n-1}(a_2, a_3, \cdots, a_n)
\end{aligned}
$$

因为$a_1 = 0$,所以

$$
a_2 a_3 \cdots a_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1)
$$

因而

$$
a_2 a_3 \cdots a_n V_{n-1}(a_2, a_3, \cdots, a_n) = V_n(a_1, a_2, \cdots, a_n)
$$

于是

$$
J_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (-1)^{n+1} V_n(a_1, a_2, \cdots, a_n)
$$

下面设所有$a_i \neq 0$.用$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{-1}$乘$J_n(a_1, a_2, \cdots, a_n)$的第$n$行,可知

$$
\begin{aligned}
& J_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\
= \ & a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ 1/a_1 & 1/a_2 & \cdots & 1/a_n \end{vmatrix} \\
= \ & (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1/a_1 & 1/a_2 & \cdots & 1/a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

然后分别用$a_1, a_2, \cdots, a_n$乘上面行列式的第$1, 2, \cdots, n$列,即得

$$J_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (-1)^{n-1} V_n(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

于是此时结论也成立.

(2) 我们有

$$\begin{aligned} F(t) &= \prod_{i=1}^{n}(t+x_i) \begin{vmatrix} 1 & t+x_1 & \cdots & (t+x_1)^{n-1} \\ 1 & t+x_2 & \cdots & (t+x_2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t+x_n & \cdots & (t+x_n)^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n}(t+x_i) \cdot V_n(t+x_1, t+x_2, \cdots, t+x_n) \end{aligned}$$

又由问题1.1.1得

$$\begin{aligned} & V_n(t+x_1, t+x_2, \cdots, t+x_n) \\ = & \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left((t+x_j) - (t+x_i)\right) \\ = & \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \\ = & V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

于是$x_1 x_2 \cdots x_n F(t) = x_1 x_2 \cdots x_n V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \prod\limits_{i=1}^{n}(t+x_i)$. 最后,注意

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 \cdots x_n V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ = & x_1 x_2 \cdots x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ = & F(0) \end{aligned}$$

即得

$$x_1x_2\cdots x_nF(t)=F(0)(t+x_1)(t+x_2)\cdots(t+x_n)\qquad\square$$

1.1.3 设$n\geqslant 2, V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是$n$阶Vandermonde行列式.

(1) 令$V_n^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示删去$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的第$i$行$(x_1^{i-1}, x_2^{i-1},\cdots,x_n^{i-1})$, 然后增添(新的)第$n$行$(x_1^n,x_2^n,\cdots,x_n^n)$所得到的$n$阶行列式$(i=1,2,\cdots,n,)$.证明

$$V_n^{(i)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sigma_{n-i+1}V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

其中$\sigma_1,\cdots,\sigma_n$是由$x_1,\cdots,x_n$形成的初等对称多项式,即

$$\sigma_j=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_j\leqslant n}x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_j}\quad(1\leqslant j\leqslant n)$$

(2) 设$\Delta_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是将$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的第$n$行换为$(x_1^{n+1}, x_2^{n+1},\cdots,x_n^{n+1})$所得到的行列式.证明

$$\Delta_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\sum_{k=1}^n x_k^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\right)V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

证 (1) 我们给出3种证法.

证法1 定义变量x的n次多项式(其系数与x_j有关)

$$D_n(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -x & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ (-x)^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ (-x)^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$$

由行列式的性质可知它有n个根$-x_1,-x_2,\cdots,-x_n$,因此

$$D_n(x)=c(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n)$$