

数学辩证法

范秀山 著

数学辩证法

范秀山 著

图书在版编目(CIP)数据

数学辩证法 / 范秀山著. — 北京: 光明日报出版社, 2015. 2

ISBN 978-7-5112-7832-6

I. ①数… II. ①范… III. ①数学—辩证法 IV. ①01

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第025315号

数学辩证法

著 者: 范秀山

责任编辑: 李娟

责任校对: 谭紫实

封面设计: 韩佳佳

责任印制: 曹净

出版发行: 光明日报出版社

地 址: 北京市东城区珠市口东大街5号, 100062

电 话: 010-67022197(咨询), 67078870(发行), 67078235(邮购)

传 真: 010-67078227, 67078255

网 址: <http://book.gmw.cn>

E-mail: gmcbs@gmw.cn lijuan@gmw.cn

法律顾问: 北京德恒律师事务所龚柳方律师

印 刷: 北京华忠兴业印刷有限公司

装 订: 北京华忠兴业印刷有限公司

本书如有破损、缺页、装订错误, 请与本社联系调换

开 本: 880×1230 1/32

字 数: 238千字

印 张: 9.5

版 次: 2015年7月第1版

印 次: 2015年7月第1次印刷

书 号: ISBN 978-7-5112-7832-6

定 价: 28.00元

版权所有 翻印必究

内容提要

从辩证唯物主义的立场出发,对空间、时间、连续、无穷、自然数、有理数、无理数、实数、虚数、复数、集合、向量、矩阵等基础数学概念进行了深入分析,揭露和批判了数学中的唯心主义和形而上学,创立了马克思主义的数学理论体系——数学唯物主义。

本书可作为高等学校本科各专业数学哲学、数学史、马克思主义哲学等课程的参考资料,也适合具有专科以上学历的工程技术人员、教师、社会科学工作者阅读。

前 言

自从 16 世纪数学中出现虚数概念以来，无数人绞尽脑汁，试图在自然界找到它的对应物或对应现象，结果都徒劳无功。虚数空灵、诡异，神秘莫测。它存在，又似乎不存在。虽然许多人对它的讲解和使用出神入化，但一提到它的本质问题，立刻就闭口不言了。

虚数在自然界真的不存在吗？

如果不存在，为什么数学又离不开它呢？数不清的定理、定律建立在虚数的基础之上。如果拒绝虚数，不亚于发生一场十级地震——金碧辉煌的数学宫殿将轰然倒塌，一顶顶镶嵌着定理、定律的金冠将被打得稀烂，满地乱滚，任人践踏……那恐怖的场景完全是不可想象的。

如果虚数存在，为什么在自然界找不到它的实例呢？人们苦苦地寻找了几百年，却踪迹全无。

从哲学的角度看，人的意识不可能脱离物质而独立存在。任何一个科学概念，作为人类意识的产物，必定是物质世界的某种反映。虚数既然在人的意识中存在，在自然界必定有它的对应物。

如果不能在自然界里找到虚数的实例，就必须否定唯物论。那样一来，数学的灾难将导致哲学的灾难，并最终导致文明的灾难。

为了挽救数学，挽救哲学，我们必须找到虚数的现实意义。

就在 2011 年 7 月 3 日晚上，虚数的实例出现了。

之后的几天时间里，复数的大量实例也出现了。

虚数和复数的现实意义问题终于解决了。

我把自己的发现写成文章，投到一家又一家数学杂志、哲学杂志去，希望得到专家们的认可，并通过他们与大家分享这些重要发现，然而得到的却是无一例外的拒绝。

“我们凭什么相信你？”专家们异口同声地质问道。

不相信是他们的权力，我无话可说。

但是，我相信自己。

为了证明自己的发现是正确的，我需要更多的证据。

于是，漫长的探索开始了。

研究虚数，也就是研究复数、复平面。

复数、复平面中最重要的关系就是 $i = \sqrt{-1}$ ，也写作 $i \cdot i = -1$ ，称为“虚虚得负”。

如果能够证明“虚虚得负”，那么虚数的问题就可得到解决。

这个证明具有历史难度。因为根据现有的数学知识，人们还没有充分掌握虚数和负数的本质。

稍后发现，数学家们不仅无法证明“虚虚得负”，甚至还无法证明另一个更简单的关系： $(-1)(-1) = +1$ ，即“负负得正”。

我意识到，“负负得正”与“虚虚得负”很可能是一对孪生兄弟，二者是“捆绑”着的——要么同时得到证明，要么同时得不到证明。

要想证明这两个等式，必须深入研究正数、负数、虚数的本质，必须首先了解它们的历史渊源。

数学家们认为：正数、负数、虚数都是从自然数、有理数“扩张”得到的。因此，必须首先研究有理数、自然数。

有理数、自然数的本质是什么？

要搞清自然数、有理数，就必须从古希腊开始，从毕达哥拉斯开始，从勾股定理、“万物皆数”开始。

为了确定毕达哥拉斯学派的理论是否正确，不能绕过毕达哥拉斯学派最致命的对手——芝诺。

为了正确破解芝诺悖论，必须深入探索无穷问题。

无穷问题的起源是空间和时间。

空间和时间是哲学问题。

而哲学有几百个流派，应该选择哪一派为基础呢？

我坚信唯物主义和辩证法是解决一切问题的根本方法。所以，马克思主义哲学就是本书的基础和出发点。

至此，证明“负负得正”与“虚虚得负”的方案基本上确定了——

马克思主义哲学→物质→空间与时间→芝诺悖论→无穷→自然数→有理数→无理数→正数、负数→虚数→复数。

搞清以上每一个环节，最终就能证明那2个关系式。

我花了4年时间，完成了以上工作。

一套崭新的数学思想体系——数学唯物主义建立起来了。

数学唯物主义是马克思主义的数学观，是马克思主义哲学的有机组成部分，是对马克思主义理论的继承、丰富和发展，它将马克思主义推上了一个新的高度。

当历经千辛万苦完成以上工作时，我发现，这已经远远不是几篇文章所能容纳的了，于是就有了这部书稿。

衷心感谢光明日报出版社的老师，他们发现了这部书稿的价值并且为它开具了准生证。没有他们的理解、欣赏和支持，这本书是不可能这么快与读者见面的。

范秀山

2015.7.18

于郑州大学

目 录

1. 绪 论	1
2. 空间和时间	20
2.1 物质与意识	20
2.2 时空的属性	22
2.3 芝诺悖论	26
2.4 实无穷与潜无穷	35
2.5 数学中的幽灵	43
2.6 时空的刻度	46
3. 自然数	52
3.1 自然数的特征	52
3.2 芝诺与普朗克	54
3.3 自然数的载体	57
3.4 “死亡之源”	60
3.5 自然数的有限性	62
3.6 自然轴	63
3.7 勾股定理与圆周率	65
3.8 自然数的运算法则	67
3.9 自然数的性质	69
3.10 自然数的进位制	72
3.11 自然数的应用	76
4. 有理数	85
4.1 有理数的产生	85
4.2 有理轴	87

4.3	有理数的数据类型	88
4.4	有理数的数量	89
4.5	有理数的应用	90
5.	无理数	92
5.1	无理数的产生	92
5.2	无理数的数据类型	96
5.3	无理数的运算	97
5.4	无理数的应用	99
6.	实 数	103
6.1	正、负数的必要性	103
6.2	实数与无理数的关系	105
6.3	实数的数据类型	106
6.4	实数的运算	106
6.5	实数的现实意义	108
6.6	实数的应用	110
7.	虚 数	112
7.1	五百年的困惑	112
7.2	虚数的产生和性质	113
7.3	虚数的现实意义	115
8.	基础数系的相互联系	117
8.1	负负得正	118
8.2	多根问题	119
8.3	杯弓蛇影	119
8.4	事物的状态	120
8.5	数系的转换	121
8.6	唯心主义的数字观	122
9.	复 数	125
9.1	复数的产生	125

9.2	狭义复数	126
9.3	广义复数	129
9.4	复数与矛盾	131
9.5	辩证法的核心	134
9.6	辩证法与形而上学	136
9.7	复数与布尔代数	138
9.8	复数与概率	148
9.9	复数与函数	157
9.10	复数与微分	158
9.11	复数与规律	167
9.12	复数与历史唯物主义	169
9.13	复数的数据类型	171
9.14	复数的运算	172
9.15	复平面与平衡	174
9.16	复数与交流电	184
10.	集合数	200
11.	向量数	208
11.1	向量数的实例	208
11.2	二阶向量数与复数的区别	211
11.3	行列式	213
11.4	向量数的性质	216
11.5	向量数的内积	220
11.6	向量数的外积	224
11.7	向量数的混合积	228
11.8	线性相关	229
11.9	齐次线性方程组	233
11.10	非齐次线性方程组	239
11.11	正交规范化	243

12. 矩阵数	247
12.1 高斯消元与逆矩阵	249
12.2 特征值与特征向量——现象	250
12.3 特征值与特征向量——本质	252
12.4 特征值与特征向量——应用	261
12.5 最小二乘法	263
12.6 矩阵数的扩充	265
13. 数学唯物主义的历史进程	267
13.1 数学唯物主义的演变	267
13.2 数学辩证法	279
13.3 与数学唯心主义的 23 个对立	281
13.4 凤凰涅槃	285
参考文献	289

1. 绪论

欧洲是近代科学的发源地。自从哥白尼的《天体运行论》发表以来，自然科学逐渐摆脱了封建教会长达千年的黑暗统治，以前所未有的速度发展起来。在其后的 400 多年里，欧洲变成了世界科学技术的中心，涌现出一大批杰出的自然科学家，他们在数学、物理学、化学、天文学、生物学等方面取得了丰硕的成果，有力地推动了人类的文明进程。

然而，进入 20 世纪后，自然科学的持续发展趋势却出现了微妙的变化：曾经风光无限的物理学与数学相继出现了停滞不前的局面。

在物理学方面，至 20 世纪初，经过牛顿、法拉第、赫兹、麦克斯韦、惠更斯、安培、瓦特、焦耳等大师们的共同努力，经典物理学建立起来了。然而，两朵小小的乌云——麦克耳 - 莫雷实验以及黑体辐射现象的反常表现，严重动摇了经典物理学的基础。稍后，麦克耳 - 莫雷实验导致了相对论，黑体辐射现象导致了量子力学。普朗克、玻尔、爱因斯坦、卢瑟福、泡利、玻恩、德布罗意、海森堡、狄拉克、薛定谔、查德威克等物理明星相继登上历史舞台，一时间众说纷纭，争论不休，物理学陷入了前所未有的混乱与动荡之中。

同一时期的数学，经历了 2 个世纪的辉煌之后，几何、代数、微积分、复变函数等分支已经基本成熟，数学王国红霞满天，呈现出一派其乐融融的和平景象。数学家们只恨自己没有早生二百年，错过了那个激情燃烧的岁月。他们现在所关心的，只是前人尚未涉

足的那些新天地。他们必须及早进入，辛勤耕耘，或许还有机会将自己的名字载入数学的光荣史册。1900年8月，希尔伯特^①在巴黎第二届国际数学家代表大会作了一个专题报告，提出了23个有待解决的问题，为新世纪的数学研究确立了主要方向，赢来一阵阵喝彩。大会之后，全世界的数学家们激情满怀，信心百倍，围绕着这些象征着荣誉的难题，蜂拥而上，竭尽全力攀登这些“高峰”。

然而，在热火朝天的喧嚣之外，却没有一个人注意到长久以来一直徘徊在数学王国的两朵乌云——负数和虚数。实际上，这两个问题对于数学的重要性，比所谓的23个问题，不知道要高出多少倍。

如果将数学体系比作一栋宏伟的建筑，那么“数”就是最基本的建筑材料——砖块。在对砖块的性能缺乏充分了解的情况下，就盲目地盖起高耸入云的摩天大楼，其所带来的危害及后果可想而知。20世纪的数学家们身居摇摇欲坠的数学大厦，有的忙碌着内部装修，有的忙着加高层数以获取更多的房间，将自己的大名刻在房门上……却没有一个人愿意抽出片刻时间，检查一下大厦的基础。

数学王国的第一朵乌云是负数的本质以及“负负得正”的证明。在历史上，围绕着“负数是不是数”的问题曾经有过长时间的、激烈的争论，反对派中不乏著名的数学家。据多篇文献称：法国数学家、物理学家帕斯卡认为从0中减去4纯粹是胡闹；《大术》的作者卡尔丹给出了方程的负数根，但他认为那是不可能的解，负根是虚无的，不过是一些记号而已；“代数学之父”韦达不承认负数；解析几何的创始人笛卡儿也只是部分地接受负数。著名数学家欧拉认为负数大于无穷大；著名数理逻辑学家德莫根认为负数会导致数学中出现荒唐的结果。^[1]在很长的时间里，西方人带着怀疑的心情看待负数，并称其为“伪数”、“假想数”、“不可能数”等等。^[2]此外，无

① 希尔伯特(David Hilbert, 1862~1943)，著名德国数学家，人称“数学界的无冕之王”。他于1900年8月8日在巴黎第二届国际数学家大会上，提出了新世纪数学家应当努力解决的23个数学问题，在世界上产生了深远的影响。

论数学家们怎样努力,始终无法从数学上证明“负负得正”这一看似极为简单的命题。^[3-7]

数学王国的第二朵乌云是虚数的现实意义。自从遭遇负数开平方以来,无数的实践证明,虚数在数学体系中是和谐的、必不可少的,人们逐渐接受了虚数概念并取得了一系列重要成果。但虚数的现实意义一直不清楚,没人能说清它代表什么,或与现实有什么联系,这在数学史上还是第一次。数学家们在谈及虚数的意义时,为了掩饰尴尬,甚至不惜借助于妖魔鬼怪。1702年,德国数学家莱布尼兹宣称:“虚数是美妙而奇异的神灵的避难所,它几乎是既存在又不存在的两栖物。”^[8]1770年,欧拉声称:“一切形如 $\sqrt{-1}$ 、 $\sqrt{-2}$ 的数学式,都是不可能有的、想象的数,因为它们所表示的是负数的平方根。对于这类数,我们只能断言……它们纯属虚幻。”^[9]

几个世纪以来,虚数以及它的孪生兄弟复数渗透到多个数学分支,已经成为数学体系中不可分割的重要组成部分。然而,虚数和复数的现实意义长期得不到明确,不仅损害了数学的严谨性,阻碍了现代科学的健康发展,同时也是对哲学的严峻挑战。

遗憾的是,作为国际数学界的领军人物,“近代最伟大的数学家”希尔伯特不仅看不到数学面临的深刻危机,对极端重要的负数与虚数问题“选择性失明”,而且公然违背人类几千年来的数学传统,大肆吹捧由康托^①一手炮制的建立在实无穷基础之上的无穷集合论,“使形式脱离空间,使关系脱离数量,把纯形式与纯关系作为研究对象”,^[10]从而使数学彻底陷入了唯心主义的烂泥坑。

很快,贸然闯进无穷集合论的数学家们就发现了许多悖论。如罗素的理发师悖论、康托的最大基数悖论等。

所谓“悖论”,就是那些从正确的观点出发,利用现有知识体

① 康托(Georg Cantor, 1845~1918),德国数学家,创立了现代集合论,还提出了集合的势和序的概念。

系推导出来的荒谬结论。一个学科中出现了悖论，意味着该学科的理论基础一定存在着缺陷。

回顾数学的发展史，虽然过去也曾出现悖论，但在两千多年的时间里也不过是零星的少数，如无理数悖论引发了第一次数学危机，无穷小悖论引发了第二次数学危机。康托的无穷集合论进入数学之后，悖论的出现如雨后春笋，令人应接不暇。而每一个新悖论的出现，都是打在数学家脸上一记清脆响亮的耳光！

鼻青脸肿、眼冒金星的数学家们终于明白：数学的基础出了问题，第三次数学危机爆发了。

围绕着如何消除无穷悖论、彻底解决“数学到底是什么”的问题，数学界的三大流派——形式派、逻辑派、直觉派以及其他各路豪杰汇集巴黎，召开了一次英雄大会。

形式派帮主希尔伯特首先发言：“数学就是一套运算符号。”

逻辑派帮主罗素^①立即表示反对：“希帮主错了！数学是逻辑。”

直觉派帮主布劳威尔^②一拳砸在桌子上：“都是康托这个家伙惹的祸，必须把实无穷彻底赶出数学！”

希尔伯特一脸的轻蔑：“做人要厚道！没有康托的大胆探索与改革，哪有数学今天的繁荣？你凭什么当院士？你带的一堆博士、硕士靠什么毕业？哼，没有人能把我们从康托为我们创造的乐园中驱逐出去！”^[11]

怀特海^③轻轻推门进来，径直走到希尔伯特和罗素面前，声音不大但屋里所有人的都听见了：“外面谣传二位帮主不穿内裤……”

① 伯特兰·罗素 (Bertrand Russell, 1872~1970)，英国哲学家、数学家、逻辑学家、历史学家，他与怀特海合著了《数学原理》，对逻辑学、数学产生了巨大影响。

② 布劳威尔 (Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881~1966)，荷兰数学家。1912年为阿姆斯特丹大学教授，同年当选为荷兰皇家科学院院士。他强调数学直觉，坚持数学对象必须可以构造，被视为直觉主义的创始人和代表人物。

③ 怀特海 (Alfred North Whitehead, 1861~1947) 英国数学家、哲学家和教育理论家。“过程哲学”的创始人。

希尔伯特脸色铁青，牙关紧咬，一言不发。

罗素在任何时候都不失绅士风度。他不慌不忙，把头轻轻转过来，眼睛看着怀特海，镇定地问道：“东西呢？”

怀特海从包里掏出一叠报纸，翻到第3版，默默递与罗素。

那是克罗内克^①的追悼会，当地报纸用了整整一个版面报道这位德国数学大师驾鹤西归的消息。报道提到了他在学术上的成就，尤其是以他的名字命名的矩阵乘积。报道没有提及他对无理数的质疑，没有提及他对康托的打压，也没有提及他与希尔伯特、罗素的学术恩怨——这些事地球人都知道，在这种场合，提这些显然不合时宜。

文字消息之外，还配发了两幅照片。两幅照片共用一行简短的说明：一个葫芦引发的疑案。

第一幅照片上，希尔伯特、罗素身着黑色新款燕尾服（法国时装界称其为“无穷”式或“数学”式），正对着克罗内克的遗像低头默哀。从后面看过去，二人燕尾服臀部的地方，各有一个烧饼大小的、略扁的椭圆洞，合在一起看，如同一只平放的8字形葫芦。记者们照相的镁光灯打在上面，白花花地一片，格外刺眼。

罗素非常清楚，在这样的场合，众目睽睽之下，如果自己控制不住情绪而发怒，那就等于钻进了对手的圈套。所以，虽然心中老大不快，但他努力克制着自己，脸上没有任何表情，仿佛什么也没发生一样，继续看着报纸。

第二幅照片上的人是哥德尔。^②这位数学怪才悼念克罗内克的方式也颇为奇特：左手一块硬纸板制作的横幅举过头顶，右手一把扇子平贴在前胸。引人注目的是，横幅和扇子上面都有字。

① 克罗内克（Leopold Kronecker, 1823~1891），德国数学家与逻辑学家，坚持算术与数学分析都必须以自然数为基础。

② 哥德尔（Kurt Gödel, 1906~1978），捷克数学家，1931年发表“不完全性定理”，证明任何封闭体系必定存在自身无法证明的命题，也证明了希尔伯特、罗素希望为数学建立纯粹的形式体系或逻辑体系的企图根本行不通。

横幅上面是一副挽联，但写成了数学方程组的形式：

$$\begin{cases} \text{霸王神力} + \text{提自家长发} = \text{怎离地面} \\ \text{华佗妙手} + \text{换自家心脏} = \text{岂不求人} \end{cases}$$

扇面上是一首四言挽诗，采用了矩阵的形式。细看之下，居然还是一个对称矩阵，无论横着读竖着读，意思都一样：

$$\begin{bmatrix} \text{可} & \text{欺} & \text{天} & \text{不} \\ \text{欺} & \text{天} & \text{不} & \text{可} \\ \text{天} & \text{不} & \text{可} & \text{欺} \\ \text{不} & \text{可} & \text{欺} & \text{天} \end{bmatrix}$$

罗素被彻底激怒了。他脸上的肌肉剧烈地抖动着，面色通红，说话的声音也变了。

“人品！人品到哪里去了？”他双手将报纸一合，“啪”地一声摔在面前的桌子上，气愤地吼道，“人怎么能无耻到这种地步？！”说罢把头一扬，身子靠在椅子上，闭上眼睛，喘着粗气，不说话了。

没有人再说什么。

空气仿佛凝固了。大厅里死一般地寂静。

策梅罗^①轻轻地站起身来，打破了沉默：“各位！各位请宽心，在下有个办法。”

众人的目光齐刷刷地转向了策梅罗。

策梅罗似乎胸有成竹。他看了看罗素，这才不紧不慢地说道：

“各位！定理是死的，但公理是活的。公理是什么？公理就是规则嘛！规则是谁定的？在座各位帮主定的。数学到底是什么，还不是各位帮主说了算吗？依我看，有悖论没什么可怕。再来一百个、

^① 策梅罗（Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, 1871~1953），德国数学家，公理集合论的主要开创者之一。