



普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

离散数学

学习指导与习题解析

(第2版)

屈婉玲 耿素云 张立昂

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

离散数学学习指导与习题解析

Lisan Shuxue Xuexi Zhidao yu Xiti Jiexi

(第2版)

屈婉玲 耿素云 张立昂

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是2015年出版的《离散数学》(第2版)(屈婉玲、耿素云、张立昂,高等教育出版社)的配套教学参考书,与主教材做了同步更新。本书分为数理逻辑、集合论、代数结构、组合数学、图论、初等数论6个部分。每部分按章对相关知识点进行了全面的总结,并对解题方法进行了系统的分析和阐述。各章都按照内容提要,基本要求,习题课,习题、解答或提示,小测验进行组织,并在最后给出了4套综合性的模拟试题,全书包含各种练习题上千道。

本书既可作为高等学校计算机及相关专业离散数学课程的教学参考书,也可作为其他学习离散数学的读者,特别是初学者提供有益的帮助。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学学习指导与习题解析 / 屈婉玲, 耿素云, 张立昂编著. --2版. --北京: 高等教育出版社, 2015. 12

ISBN 978-7-04-043992-2

I. ①离… II. ①屈… ②耿… ③张… III. ①离散数学-高等学校-教学参考资料 IV. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第245964号

策划编辑 刘 艳
插图绘制 杜晓丹

责任编辑 刘 艳
责任校对 王 雨

封面设计 于文燕
责任印制 刘思涵

版式设计 马敬茹

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 唐山市润丰印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 27.75
字 数 520千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2008年6月第1版
2015年12月第2版
印 次 2015年12月第1次印刷
定 价 40.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 43992-00

前 言

本书是《离散数学》(第2版)(屈婉玲、耿素云、张立昂,高等教育出版社,以下简称“主教材”)的教学参考书。本书主教材于2015年出版,是在2008年出版的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《离散数学》的基础上修订而成的。本书主教材在修订过程中保持了原书的基本结构和主要内容,增加了关于消解证明法和中国邮递员问题的阐述,并对文字做了进一步的加工。此外,还补充了有关加法器设计、进程代数建模、全同态加密等重要的应用实例,同时更新和补充了部分例题和习题。配合主教材,本书在保持2008年出版的《离散数学学习指导与习题解析》风格的基础上对上述内容做了相应的更新。

本书第1~5章、第14~18章由耿素云完成,第6~13章由屈婉玲完成,第19章由张立昂完成。欢迎读者批评指正!

作 者

2015年2月于燕园

目 录

第 1 部分 数 理 逻 辑

第 1 章 命题逻辑基本概念	3
1.1 内容提要	3
1.2 基本要求	4
1.3 习题课	4
1.4 习题、解答或提示	11
1.5 小测验	17
第 2 章 命题逻辑等值演算	20
2.1 内容提要	20
2.2 基本要求	22
2.3 习题课	23
2.4 习题、解答或提示	30
2.5 小测验	39
第 3 章 命题逻辑的推理理论	41
3.1 内容提要	41
3.2 基本要求	43

3.3 习题课	44
3.4 习题、解答或提示	51
3.5 小测验	63
第 4 章 一阶逻辑基本概念	67
4.1 内容提要	67
4.2 基本要求	68
4.3 习题课	68
4.4 习题、解答或提示	73
4.5 小测验	79
第 5 章 一阶逻辑等值演算与推理	81
5.1 内容提要	81
5.2 基本要求	83
5.3 习题课	84
5.4 习题、解答或提示	91
5.5 小测验	101

第2部分 集合论

第6章 集合代数	107	7.3 习题课	134
6.1 内容提要	107	7.4 习题、解答或提示	143
6.2 基本要求	109	7.5 小测验	158
6.3 习题课	109		
6.4 习题、解答或提示	115	第8章 函数	161
6.5 小测验	127	8.1 内容提要	161
		8.2 基本要求	163
第7章 二元关系	130	8.3 习题课	163
7.1 内容提要	130	8.4 习题、解答或提示	168
7.2 基本要求	134	8.5 小测验	178

第3部分 代数结构

第9章 代数系统	183	10.3 习题课	202
9.1 内容提要	183	10.4 习题、解答或提示	207
9.2 基本要求	184	10.5 小测验	217
9.3 习题课	185		
9.4 习题、解答或提示	189	第11章 格与布尔代数	220
9.5 小测验	195	11.1 内容提要	220
		11.2 基本要求	222
第10章 群与环	198	11.3 习题课	222
10.1 内容提要	198	11.4 习题、解答或提示	225
10.2 基本要求	201	11.5 小测验	230

第4部分 组合数学

第12章 基本的组合计数公式	235	第13章 递推方程与生成函数	253
12.1 内容提要	235	13.1 内容提要	253
12.2 基本要求	237	13.2 基本要求	258
12.3 习题课	237	13.3 习题课	258
12.4 习题、解答或提示	240	13.4 习题、解答或提示	264
12.5 小测验	250	13.5 小测验	281

第 5 部分 图 论

第 14 章 图的基本概念	287	16.4 习题、解答或提示	339
14.1 内容提要	287	16.5 小测验	348
14.2 基本要求	289		
14.3 习题课	289	第 17 章 平面图	351
14.4 习题、解答或提示	295	17.1 内容提要	351
14.5 小测验	309	17.2 基本要求	353
		17.3 习题课	353
第 15 章 欧拉图与哈密顿图	312	17.4 习题、解答或提示	357
15.1 内容提要	312	17.5 小测验	365
15.2 基本要求	313		
15.3 习题课	314	第 18 章 支配集、覆盖集、独立集、匹配	
15.4 习题、解答或提示	318	与着色	368
15.5 小测验	327	18.1 内容提要	368
第 16 章 树	330	18.2 基本要求	370
16.1 内容提要	330	18.3 习题课	370
16.2 基本要求	332	18.4 习题、解答或提示	374
16.3 习题课	332	18.5 小测验	381

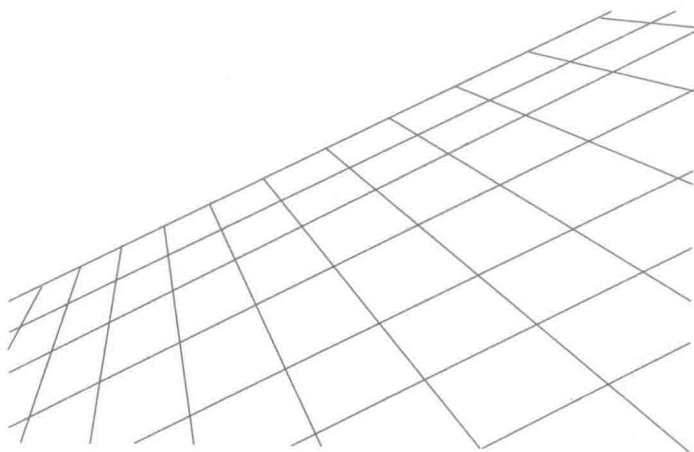
第 6 部分 初 等 数 论

第 19 章 初等数论	389	19.3 习题课	391
19.1 内容提要	389	19.4 习题、解答或提示	395
19.2 基本要求	391	19.5 小测验	410

模拟试题及解答

试题 1	413	试题 3	423
试题 1 解答	414	试题 3 解答	425
试题 2	418	试题 4	428
试题 2 解答	420	试题 4 解答	430

第 1 部分 数理逻辑



第 1 章

命题逻辑基本概念

1.1 内容提要

1. 命题与联结词

命题与真值 命题、命题的真值、真命题、假命题、简单命题(或称原子命题)、复合命题.

命题与真值的符号化 用 p, q, r 等表示命题,称为命题的符号化,用数字 1 代表真,用数字 0 代表假,称为真值的符号化.

常用联结词及其符号化

“非”(或“否定”)符号化为“ $\neg$ ”,称 $\neg$ 为否定联结词.

“并且”(或“与”)符号化为“ $\wedge$ ”,称 $\wedge$ 为合取联结词.

“或”(“相容或”)符号化为“ $\vee$ ”,称 $\vee$ 为析取联结词.

“如果,则”符号化为“ $\rightarrow$ ”,称 $\rightarrow$ 为蕴涵联结词.

“当且仅当”符号化为“ $\leftrightarrow$ ”,称 $\leftrightarrow$ 为等价联结词.

记 $S = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, 称 S 为常用联结词集.

基本复合命题 设 p, q 为命题.

否定式“ $\neg p$ ”, $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

合取式“ $p \wedge q$ ”, $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真.

析取式“ $p \vee q$ ”, $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假.

析取式“ $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ ”, $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 为真当且仅当 p 与 q 的真值相异. 这里, 表达式 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 称为 p 与 q 的排斥或.

蕴涵式“ $p \rightarrow q$ ”, $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真, q 为假. p 为 q 的充分条件, q 为 p 的必要条件.

等价式“ $p \leftrightarrow q$ ”, $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 的真值相同. p 与 q 互为充分必要条件.

复合命题 基本复合命题以及多次使用常用联结词集 S 中的联结词复合而成的命题统称为复合命题. 其实, 排斥或 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 也可以看作非基本复合命题的复合命题.

2. 命题公式及其赋值

命题常项与命题变项 命题常项(简单命题), 命题变项(取值为 1 或 0 的变量 $p, q, r, \dots$).

命题公式与赋值 合式公式(也称为命题公式或公式)、公式的层次、公式的赋值、成真赋值、成假赋值、真值表.

命题公式的类型 重言式(也称为永真式)、矛盾式(也称为永假式)、可满足式.

判断公式类型的方法 本章主要用真值表判断命题公式的类型, 进而求公式的成真赋值和成假赋值.

1.2 基本要求

1. 分清简单命题(即原子命题)与复合命题.

2. 深刻理解 5 种常用联结词 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 的含义, 并能够准确地应用它们将基本复合命题及复合命题符号化, 并且由所含简单命题的真值迅速求出复合命题的真值. 特别要注意以下几点:

(1) 分清“ $p \rightarrow q$ ”的逻辑关系、真值以及在自然语言中对“ $p \rightarrow q$ ”的不同的描述方法.

(2) 分清“ $p \wedge q$ ”的逻辑关系以及合取联结词在自然语言中的各种各样的描述方法.

(3) 分清“相容或”和“排斥或”.

3. 深刻理解命题的赋值、成真赋值、成假赋值、重言式、矛盾式、可满足式等概念.

4. 能够熟练地写出给定命题公式的真值表, 从而准确地判断命题公式的类型, 并求出命题公式的成真赋值和成假赋值.

1.3 习题课

题型一 命题符号化

1. 将下列命题符号化, 并求命题的真值.

(1) 蓝色和黄色可以调配成绿色.

(2) 蓝色和黄色都是常用的颜色.

(3) $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{5}$ 之和是无理数.

(4) $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{5}$ 都是有理数.

2. 将下列语句符号化,并求(1)、(5)的真值.

(1) 虽然2能整除4,但2不能整除5.

(2) 小丽一边吃苹果,一边看电视.

(3) 王大力不但是100米冠军,而且是500米冠军.

(4) 王小红虽然没上过大学,但她自学成才.

(5) 2是偶素数.

3. 将下列语句符号化,并求(1)~(4)的真值.

(1) $\sqrt{3}$ 或5是无理数.

(2) $\sqrt{3}$ 和5中有且仅有一个是无理数.

(3) $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{5}$ 中有且仅有一个是无理数.

(4) 3和5中有且仅有一个是无理数.

(5) 李和平是山西人或陕西人.

(6) 李冰只能选学英语或只能选学法语.

(7) 李冰选学英语或法语.

4. 将下列命题符号化,并求它们的真值.

(1) 只要4是偶数,5就是奇数.

(2) 如果4是偶数,则5也是偶数.

(3) 只有4是偶数,5才是偶数.

(4) 5是偶数仅当4是奇数.

(5) 除非4是奇数,否则5不是奇数.

(6) 种瓜得瓜,种豆得豆.

(7) 除非 $2+2=5$,否则地球是静止不动的.

(8) 只有地球是静止不动的,才有 $2+2=5$.

5. 将下列语句符号化,并求(3)、(4)、(5)、(6)的真值.

(1) 经一事,长一智,并且不经一事,不长一智.

(2) 经一事,长一智,并且不长一智,不经一事.

(3) $2+3=5$ 当且仅当19是素数.

(4) $2+3=5$ 当且仅当19不是素数.

(5) $2+3 \neq 5$ 当且仅当19是素数.

(6) $2+3 \neq 5$ 当且仅当19不是素数.

解答与分析

1. 本题要求分清联结词“并且”(“和”“与”等)联结的是句子成分,还是两个独立句子,从而

分清简单命题与复合命题.根据题意不难看出,(1)中的“和”联结的是两个名词(蓝色、黄色),因而是简单命题.(2)中的“和”联结的是两个句子(蓝色是常用颜色,黄色是常用颜色),因而是复合命题.通过类似分析可知,(3)是简单命题,而(4)是复合命题.(1)~(4)的符号化形式如下.

(1) p :蓝色和黄色可以调配成绿色.

(2) $p \wedge q$,其中 p :蓝色是常用颜色, q :黄色是常用颜色.

(3) p : $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{5}$ 之和是无理数.

(4) $p \wedge q$,其中 p : $\sqrt{2}$ 是有理数, q : $\sqrt{5}$ 是有理数.

(1)~(4)的真值分别为 1,1,1,0.

2. 本题要求练习合取联结词 $\wedge$ 的各种不同的描述方法,以及合取式的真值取值情况.联结词“虽然,但是”“一边,一边”“不仅,而且”,“既,又”等都是合取的意思,因而它们都符号化为“ $\wedge$ ”.(1)~(5)的符号化形式如下.

(1) $p \wedge \neg q$,其中 p :2 能整除 4, q :2 能整除 5.真值为 1(这里 q 为假).

(2) $p \wedge q$,其中 p :小丽吃苹果, q :小丽看电视.

(3) $p \wedge q$,其中 p :王大力是 100 米冠军, q :王大力是 500 米冠军.

(4) $\neg p \wedge q$,其中 p :王小红上过大学, q :王小红自学成才.

(5) $p \wedge q$,其中 p :2 是素数, q :2 是偶数.其真值为 1.

3. 着重讨论相容或与排斥或的区别与联系.相容或 $p \vee q$ 与排斥或 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 的区别在于,当 p 与 q 同为真时, $p \vee q$ 为真,而 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 为假.因而,当命题 p 与 q 不能同时为真时, $p \vee q$ 与 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 真值相同.在本题中(1)与(7)为相容或.在(5)中,李和平不能既是山西人、又是陕西人,因而(5)可以符号化成排斥或.但由于“李和平是山西人”与“李和平是陕西人”实际上不可能同时为真,因而(5)也可以符号化成相容或.(2)、(3)、(4)、(6)均为排斥或.各语句的符号化形式如下.

(1) $p \vee q$,其中 p : $\sqrt{3}$ 是无理数, q :5 是无理数,真值为 1.

(2) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$,其中 p 与 q 同(1),真值为 1.

(3) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$,其中 p : $\sqrt{3}$ 是无理数, q : $\sqrt{5}$ 是无理数,真值为 0(因为 p 与 q 同时为真).

(4) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$,其中 p :3 是无理数, q :5 是无理数,真值为 0(因为 p 与 q 同时为假).

(5) $p \vee q$,其中 p :李和平为山西人, q :李和平为陕西人.也可以符号化为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

(6) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$,其中 p :李冰选学英语, q :李冰选学法语.

(7) $p \vee q$,其中 p 与 q 同(6).

4. 本题着重练习蕴涵式的逻辑关系及真值,特别是从蕴涵式的不同描述中,准确地找出蕴涵式的前件与后件.蕴涵关系可以有多种不同的叙述方式,如“如果 p ,则 q ”“只要 p ,就 q ”“只有

p ,才 q ”“除非 p ,否则 q ”“ p 仅当 q ”等.符号化时一定要分清前、后件,即分清谁是必要条件,谁是充分条件(后件是前件的必要条件,前件是后件的充分条件).在“如果 p ,则 q ”“只要 p ,就 q ”“ p 仅当 q ”中, p 是充分条件, q 是必要条件,即 p 是蕴涵式的前件, q 是蕴涵式的后件,符号化为 $p \rightarrow q$;在“只有 p ,才 q ”中, p 是必要条件, q 是充分条件,即 q 是蕴涵式的前件, p 是蕴涵式的后件,符号化为 $q \rightarrow p$;而“除非 p ,否则 q ”符号化时比较容易出错,可以考虑它的另一种叙述方式“如果 $\neg p$,则 q ”或“只有 p ,才有 $\neg q$ ”,应符号化为 $\neg p \rightarrow q$ 或 $\neg q \rightarrow p$.下面给出各复合命题的符号化表示及其真值.

在(1)~(5)中,令 p :4是偶数, q :5是偶数,则 $\neg p$:4是奇数, $\neg q$:5为奇数.

(1) 符号化为: $p \rightarrow \neg q$,真值为1(前件、后件均为真).

(2) 符号化为: $p \rightarrow q$,真值为0(前件为真,后件为假).

(3) 符号化为: $q \rightarrow p$ (或 $(\neg p \rightarrow \neg q)$,真值为1(前件为假).

(4) 符号化为: $q \rightarrow \neg p$,真值为1(前件为假).

(5) 的另外叙述方法为“若4不是奇数,则5也不是奇数”,所以应符号化为 $\neg(\neg p) \rightarrow \neg(\neg q)$,即 $p \rightarrow q$ (或者 $\neg q \rightarrow \neg p$),真值为0(前件为真,后件为假).

(6) 是两个因果关系(蕴涵式)构成的合取式,符号化为: $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$,其中, p :种瓜, q :得瓜, r :种豆, s :得豆.真值为1.

在(7)、(8)中,令 p : $2+2=5$, q :地球是静止不动的,则 p 为假, q 为假.

(7) 符号化为: $\neg p \rightarrow q$ (或 $(\neg q \rightarrow p)$,真值为0(前件为真,后件为假).

(8) 符号化为: $p \rightarrow q$,真值为1(前件为假).

(7)、(8)中,蕴涵式的前件、后件无内在联系,只能由逻辑关系确定真值.

5. 本题主要练习等价式及其真值.在(1)、(2)中,令 p :经一事, q :长一智.

(1) 可以符号化为: $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$,也可以符号化为 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$,又可以符号化为: $p \leftrightarrow q$.

(2) 可以符号化为: $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$,也可以符号化为 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$,又可以符号化为: $p \rightarrow q$.

关于(1)、(2)有多种符号化形式,可参阅第2章中基本的等值式:假言易位、等价等值式、幂等律等.

在(3)~(6)中,令 p : $2+3=5$, q :19是素数.

(3) 符号化为: $p \leftrightarrow q$,真值为1.

(4) 符号化为: $p \leftrightarrow \neg q$,真值为0.

(5) 符号化为: $\neg p \leftrightarrow q$,真值为0.

(6) 符号化为: $\neg p \leftrightarrow \neg q$,其真值为1.

题型二 求复合命题的真值与命题公式的赋值

1. 设 p :4是素数, q :南京在北京的北边, r :苹果树是落叶乔木.求下列复合命题的真值.

(1) $\neg(p \wedge q \wedge \neg r)$

$$(2) (\neg p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$$

$$(3) (p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow \neg q)$$

2. 求下列公式的成真赋值和成假赋值.

$$(1) \neg(p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$(2) (\neg p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$$

解答与分析

1. 这里 p, q, r 均为命题, 且 p 与 q 均为假命题, r 为真命题, 而 (1)、(2)、(3) 为由 p, q, r 组成的复合命题. 将 p, q, r 的真值 0, 0, 1 代入各公式, 立即得出: (1) 真值为 1, (2) 真值为 1, (3) 真值也为 1.

2. 本题中, p, q, r 均为命题变项, 这与第 1 题中 p, q, r 均为命题是完全不同的. 由于公式中均含 3 个命题变项, 因而 (1)、(2) 均有 $2^3 = 8$ 个赋值, 从中找出成真赋值和成假赋值. 设 (1)、(2) 中的公式分别为 A 和 B .

方法一 观察法

(1) 易知, $p \wedge q \wedge \neg r$ 只有一个成真赋值 110, 其余的 7 个赋值全是成假赋值, 故立即可知, 110 是公式 A 的成假赋值, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 111 都是 A 的成真赋值.

(2) 在蕴涵式中, 只有前件为真, 后件为假, 蕴涵式才为假. 而使 $(\neg p \wedge q)$ 为真, $(p \leftrightarrow r)$ 为假的赋值只有 011, 故公式 B 的成真赋值为 000, 001, 010, 100, 101, 110, 111, 而 011 为成假赋值.

方法二 真值表法 (请读者用真值表求解)

题型三 判断公式的类型

1. 用观察法判断下列公式的类型.

$$(1) p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$$

$$(2) ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \vee r$$

$$(3) (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$$

2. 用真值表法判断第 1 题中 3 个公式的类型.

解答与分析

1. 设 (1)、(2)、(3) 中的公式分别为 A, B, C , 将 p, q, r 的真值代入各式容易观察出有些公式的类型.

(1) 易知, 当 p 取 0 或 r 取 0 时, A 取 0 值, 因而 000, 001, 010, 011, 100, 110 为 A 的成假赋值. 这样一来, 在 8 个赋值中还剩下两个赋值 101 与 111, 它们都是 $\neg(q \rightarrow p)$ 的成假赋值, 因此 A 无成真赋值, 故 A 为矛盾式.

(2) 容易观察到, 当 r 取 1 时, B 取 1. 于是 001, 011, 101, 111 均为 B 的成真赋值, 剩下的 4 个赋值为 000, 010, 100, 110, 它们都是 $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$ 的成真赋值, 因此 8 个赋值都是 B 的成真赋值, 故 B 为重言式.

(3) 容易看出, 000, 111 均为 C 的成真赋值, 而 101, 110 均为 C 的成假赋值, 故 C 为可满足式, 但不是重言式.

2. 第1题中公式 A, B, C 的真值表分别由表 1.1、表 1.2、表 1.3 给出. 熟练以后, 写真值表时, 不一定写出公式的所有层次, 写出主要层次即可, 关键问题是保证准确性.

由表 1.1、表 1.2、表 1.3 可知, 公式 $p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$ 为矛盾式, 公式 $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \vee r$ 为重言式, 公式 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$ 为可满足式, 这与在 1 中观察的结果是相同的, 但真值表给出了全部的成真赋值与成假赋值. 因此, 对比较特殊(比较好观察)的公式可用观察法判断其类型, 而对一般公式则应该写出真值表来判断公式类型. 在第 2 章中还将给出多种方法判断公式的类型.

表 1.1 $p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$ 的真值表

p	q	r	$p \wedge r$	$q \rightarrow p$	$\neg(q \rightarrow p)$	$p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

表 1.2 $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \vee r$ 的真值表

p	q	r	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	$((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \vee r$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

表 1.3 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$ 的真值表

p	q	r	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

题型四 复合命题符号化

将下面两段论述符号化,并求所得复合命题的真值.

1. 若 π 是无理数,则自然对数的底 e 也是无理数.只有 3 是偶数,4 才是素数. $\sqrt{2}$ 是无理数,仅当 $\sqrt{5}$ 不是无理数. $\sqrt{5}$ 是无理数.

2. 若 2 和 3 都是素数,则 5 是奇数.2 是素数,3 也是素数.所以,5 或 6 是奇数.

解答与分析

解此类问题,首先应该确定简单命题并将其符号化,然后从基本复合命题开始,逐步得到更复杂的复合命题.代入简单命题的真值不难求出复合命题的真值.

1. 令 $p: \pi$ 是无理数, $q: e$ 是无理数, $r: 3$ 是偶数, $s: 4$ 是素数, $t: \sqrt{2}$ 是无理数, $u: \sqrt{5}$ 是无理数.

若 π 是无理数,则自然对数的底 e 也是无理数: $p \rightarrow q$,

只有 3 是偶数,4 才是素数: $s \rightarrow r$,

$\sqrt{2}$ 是无理数,仅当 $\sqrt{5}$ 不是无理数: $t \rightarrow \neg u$,

该段论述可符号化为

$$(p \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow r) \wedge (t \rightarrow \neg u) \wedge u$$

易知, p, q, t, u 的真值为 1, r, s 的真值为 0, 3 个基本复合命题的真值分别为 1, 1, 0, 复合命题的真值为 0.

2. 令 $p: 2$ 是素数, $q: 3$ 是素数, $r: 5$ 是奇数, $s: 6$ 是奇数.

2 和 3 都是素数: $p \wedge q$,

若 2 和 3 都是素数,则 5 是奇数: $(p \wedge q) \rightarrow r$,

5 或 6 是奇数: $r \vee s$,

该段论述可符号化为

$$(((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (p \wedge q)) \rightarrow (r \vee s)$$