"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

高等数学

（上册）

修订本

大学数学编写委员会《高等数学》编写组 编

科学出版社

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

高等数学

（上册）

（修订本）

大学数学编写委员会《高等数学》编写组　编

科学出版社

北　京

内容简介

本书共8章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、MATLAB软件与一元函数微积分等. 并将与课程内容相关的简单行列式计算、常见的几种曲线、积分表等作为附录.

书中每节配有习题，每章编有小结，书末附有习题答案与提示，以便读者预习和自学.

本书适合用作普通高等院校的工科类、非数学专业的理科类、对数学较高要求的经济类、管理类等的本科生学习高等数学课程的教材、教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：上册/大学数学编写委员会《高等数学》编写组编. —修订本. —北京：科学出版社，2015

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

ISBN 978-7-03-045519-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①大… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第194195号

责任编辑：胡海霞 / 责任校对：刘小梅

责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年9月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2015年8月第 二 版 印张：23 3/4

2015年8月第五次印刷 字数：589 000

定价：45.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

大学数学编写委员会《高等数学》(上册)编写组

主　编　尚有林

副主编　王洪珂　李保安　秦　青

编　委　杨万才　罗来兴　成军祥　张宏伟　罗　党　刘法贵
　　　　郭晓丽　张之正　张庆政　李东亚　任立顺　张永胜
　　　　骆传枢　刁　群　刘伟庆　李灵晓　仲从磊　许丽萍
　　　　杨德五　杨　森　王春伟　丁孝全　陈　鹏　李二强
　　　　常志勇　徐翠霞　王锋叶　陈金兰　李小申　李可人
　　　　龙　兰　田学全　王月清　邬　毅

前 言

高等数学是大学低年级学生必修的一门重要基础课，其主要作用一方面是为学生打好必要的数学基础，这不仅对学生在校学习本课程及后继课程起着基础作用，而且对学生毕业后的工作和在工作中进一步的知识更新将产生深远的影响；另一方面是使学生的逻辑思维、抽象思维、演绎思维、归纳思维等科学思维方法和研究问题的能力得到学习与提高，这将使学生的思维模式、严谨程度、探索精神受到比较系统的训练，在提高人才综合素质上具有长远的作用与意义.

教育部颁布实施的《普通高中数学课程标准》（简称高中新课标），已贯穿于全国普通高中新课程教学中，河南省于 2008 年起普遍将新课标使用于普通高中的数学课程教学. 新课标中的教学要求已涵盖了部分大学数学课程的知识，以至于目前大学数学教学与高中新课标培养出来的入校学生（2011 级始）基础不相适应，高校教师的大学数学教学遇到了困难和问题. 鉴于此种现状，河南省教育厅高教处、基础教育教学研究室，郑州大学，河南科技大学等单位针对新课标实施后大学数学的教学改革召开了座谈会、研讨会，并以河南省教育教学改革立项形式开展了研究. 河南省数学会的教学、科研研讨会上，不少专家、教授对此问题发表了看法及改革意见. 通过多种形式的会议研讨及征询意见，大家普遍认为，高等数学、线性代数、概率论与数理统计是大学理、工、经、管、农、医等学科专业的必修基础课，也是大学数学教学与高中新课标教学联系最为紧密的课程，所以这三门公共基础数学的课程体系、教学内容及教学要求必须与中学数学教育接轨，否则在各高校课程教学学时减少的情况下，造成了时间上的浪费及教学效果的低下，不利于因材施教、人才培养，影响着教育质量的提高. 因此，这三门课程的教材建设是一个十分紧迫而又重要的工作，是大学数学教学改革的核心问题之一.

本书是在高等数学的课程体系、教学内容及教学要求与高中新课标接轨的情况下编写而成的. 编写的基本指导思想和目的是以教育部数学教学指导委员会制定的高等数学教学体系、教学内容、教学基本要求为指导，以做好与中学新课标的衔接为原则，以现行的教学大纲、教学要求为基础，以兼顾部分学生继续深造的入学要求为基本点，以为教师、学生提供一套使用方便、适于现实教学的良好教材为目的.

全书分为上、下两册. 本书为上册，内容包括一元函数微积分，常微分方程，MATLAB 软件与一元函数微积分. 编写中除了高等数学的理论体系与知识外，还注意到学生对数学史的了解，关注到学生学数学、用数学的能力与素质，从而编写了数学史话、MATLAB 软件与微积分等知识. 考虑到不同教学学时与要求，有利于分层次教学，将超出基本教学要求及供选学的内容冠以“*”号标记. 书中涉及的数学专用名词均有英文标注.

本书适合用作高等院校理科（不含数学类专业）类、工科类等各本科专业的高等数学课程教材或教学参考书，也是教育、科技工作者案头的一套参考资料.

参加本书编写的有李保安（第 7 章）、许丽萍（第 1 章、第 2 章）、杨德五（第 3 章）、杨森（第 5 章、第 6 章）、刘伟庆（附录）、张庆政（第 4 章、习题答案与提示）、李小申（第 8 章），另

外,王洪珂带领的重庆科技学院团队参与编写第 4 章、第 5 章.

本书由河南科技大学杨万才教授和商丘师范学院的张庆政教授担任主编,李保安、杨德五、李小申担任副主编,他们负责完成了本书的审核与统稿工作. 郑州大学、河南理工大学、河南工业大学、华北水利水电学院、郑州轻工业学院、洛阳师范学院、安阳师范学院、商丘师范学院、周口师范学院、黄淮学院、平顶山学院等高校同仁为本书的编写提出了一些意见和建议,科学出版社的编辑为本书的出版付出了辛苦劳动,对此我们表示衷心感谢.

本书于2013年12月被批准为河南省"十二五"普通高等教育规划教材立项建设,于2014年10月被评为"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材.

由于编写时间仓促,编者水平有限,书中难免有一些错误和不妥之处,恳请各位读者批评指正.

编　者

2015 年 3 月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

在自然界、人类社会和人们的思维领域，运动和变化无处不在，因而刻画这种运动与变化的量与量之间依赖关系的数学概念——函数，也就无处不在. 函数是被广泛应用的数学概念之一. 在高等数学中，函数处于基础的核心地位，是本门课程要系统研究的对象，其中的连续函数则是重点研究的一类函数. 极限是研究函数的一个有效的方法和手段，我们将以极限为工具研究函数的各种性质，这种思想和方法贯穿了高等数学的始终，并对其他学科的学习也有着深远的影响. 因此可以说，函数、极限和连续是高等数学的基础.

本章将在复习中学有关函数内容的基础上，进一步介绍函数的简单性质，并重点介绍函数的极限、连续等有关内容.

1.1　集　　合

有关集合的内容，在中学已经有了初步的了解，在此，我们简单地回顾一下.

1.1.1　集合的概念

1. 集合及其表示法

集合是一个只能描述而无法精确定义的数学概念，在数学上，把具有某种特定性质的事物所组成的全体称为**集合**，组成集合的各个事物称为该集合的元素. 不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$. 如：

(1) 大于 6 的所有正实数的集合；

(2) 抛物线 $y=x^2-5x+6$ 上的点构成的集合；

(3) 2012 年洛阳市高招录取的全日制本科生.

一般地，用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素. 若事物 a 是集合 A 的一个元素，就记 $a\in A$（读作 a 属于 A）；若事物 a 不是集合 A 的一个元素，就记 $a\notin A$ 或 $a\ \bar{\in} A$（读作 a 不属于 A）. 集合有时也简称为集.

若一集合只有有限个元素，就称为**有限集**；否则称为**无限集**.

在数学上，表示集合的方法有列举法和描述法两种：列举法就是列出集合中的全体元素，并写在一个大括号内，如有限集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；而描述法则是用如下形式表示一个集合：$A=\{x\mid x$ 所具有的特征$\}$，即有此性质的必在 A 中，且 A 中的元素必有此性质，如 $A=\{x\mid x^3+5x^2+7x+3=0\}$，$B=\{x\mid x$为我校的学生$\}$.

2. 数集

元素是数的集合称为数集. 在中学学过的数集有全体自然数集记为 $\mathbf{N}$；全体整数集记为 $\mathbf{Z}$，即 $\mathbf{Z}=\{x\mid x\in\mathbf{N}$ 或 $-x\in\mathbf{N}^+\}$；全体有理数集记为 $\mathbf{Q}$，即 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+,p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}$；

全体实数集记为 $\mathbf{R}$,即 $\mathbf{R}=\{x|x$ 为有理数或无理数$\}$等. 以后不特别说明的情况下考虑的集合均为数集.

对于数集,有时我们在表示数集的字母的右上角标上“+”或“−”来表示该数集中的所有正数或所有负数构成的特殊数集,如 $\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数构成的集合,$\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数构成的集合.

3. 集合之间的关系

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若有 $x\in A$,必有 $x\in B$,就称 A 为 B 的**子集**,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$(读作 B 包含 A). 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

集合之间显然有下列关系.

(1) $A\subset A, A=A, \varnothing\subset A$;　　(2) $A\subset B$ 且 $B\subset C\Rightarrow A\subset C$.

1.1.2 集合之间的运算

给定两个集合 A,B,定义如下几种运算.

(1) 并集 $A\cup B=\{x\,|\,x\in A$ 或 $x\in B\}$;

(2) 交集 $A\cap B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$;

(3) 差集 $A\setminus B$(或 $A-B$)$=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\notin B\}$;

(4) 余集 $B_A^c=A\setminus B$(其中 $B\subset A$);

(5) 直积 $A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A, y\in B\}$,如 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 表示平面上的点集.

设 A,B,C 为任意三个集合,则有下列法则成立.

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c, (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

以上法则均可根据集合相等的定义验证,在此省略,读者可独立验证.

1.1.3 区间和邻域

区间和邻域是高等数学中用的较多的一类数集.

1. 区间

设 a,b 为实数,并满足 $a<b$,则区间的定义和记号可表示如下.

开区间 $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$;

闭区间 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开区间 $[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}, (a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$.

以上均称为**有限区间**. a,b 分别称为**区间的左、右端点**. 而如下形式的区间:

$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$ $(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$,以及 $(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$ 等称为**无限(无穷)区间**,在不特别要求下,有限区间、无限区间统称为**区间**,用 I 表示.

2. 邻域

设 x_0 和 δ 为两个实数，且 $\delta>0$. 数集 $\{x\,||x-x_0|<\delta\}$ 称为**点 x_0 的 δ 邻域(neighborhood)**(如图 1-1)，记为 $U(x_0,\delta)$，x_0 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径.

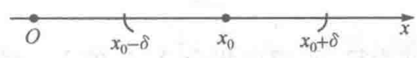

图 1-1

事实上，

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

同理，称集合 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$ 为 x_0 的去心 δ 邻域，或 x_0 的空心 δ 邻域.

为方便，有时把开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为点 x_0 的**左 δ 邻域**，而开区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的**右 δ 邻域**.

习　题　1.1

1. 如果 $A=\{x\,|\,3<x<5,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\,|\,x>4,x\in\mathbf{R}\}$，求：

(1) $A\cup B$；　　(2) $A\cap B$.

2. 用区间表示下列邻域：

(1) $U(0,1)$；　　(2) $U\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$；

(3) $\mathring{U}(0,2)$；　　(4) $\mathring{U}\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$.

1.2　函数及其特性

1.2.1　映射

1. 映射的概念

设两个集合 X,Y，f 是一个对应法则. 若对 $x\in X$，按照 f，有唯一的 $y\in Y$ 与之对应，则称 **f 是 X 到 Y 的一个映射**，记为 $f:X\to Y$. 元素 y 为元素 x 在映射 f 下的像，记作 $y=f(x)$ (如图 1-2).

元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的**原像**. 集 X 称为映射 f 的**定义域**，Y 的子集 $f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}$ 称为 f 的**值域**.

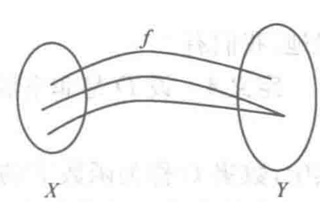

图 1-2

在映射的定义中，应注意：

(1) 任何一个映射都必须具备如下三要素——定义域、对应法则、值域；

(2) 元素 x 的像 y 是唯一的，但 y 的原像不一定唯一.

2. 一一映射

设 f 是集合 X 到集合 Y 的映射，

$$f:X\to Y,$$