SHIJIE ZHUMING PINGMIANJIHE JINGDIAN ZHUZUO GOUCHEN

世界著名平面几何经典著作钩沉

建国初期平面三角老课本

《世界著名平面几何经典著作钩沉》编写组 编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

SHIJIE ZHUMING PINGMIANJIHE JINGDIAN ZHUZUO GOUCHEN

世界著名平面几何经典著作钩沉

建国初期平面三角老课本

《世界著名平面几何经典著作钩沉》编写组 编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书分为三角函数测角法，三角函数表，三角形的解法以及习题四部分。详细地介绍了平面三角的相关知识。

本书适合平面几何爱好者及在中学师生阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

世界著名平面几何经典著作钩沉：建国初期平面三角老课本/《世界著名平面几何经典著作钩沉》编写组编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.9

ISBN 978－7－5603－5505－4

Ⅰ.①世… Ⅱ.①世… Ⅲ.①平面三角—研究 Ⅳ.①O124.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 161853 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 17.25 字数 300 千字
版　　次 2015 年 9 月第 1 版 2015 年 9 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978－7－5603－5505－4
定　　价 38.00 元

目录

绪 论[①]

§1 三角学的对象 三角学一词是从希腊文翻译过来的.它的原意为三角形之量度.至于这门科学叫作三角学的原因,是因其最初研究的问题系利用三角形的已知元素(边与角)以决定其未知元素(解三角形)的缘故.这个问题,到了现在仍为三角学中基本问题之一.

在三角学中三角形边与角之间量的关系,系由几种随着角的改变而变化之辅助量来建立的,这些辅助量我们叫作三角函数.但是三角函数的用处,不仅限于用来解三角形,在许多其他数学科目中,以及在物理学、工程学等也要应用.因而研究三角函数之重要,不减于研究解三角形.

因此三角学之内容可分为两部分:第一部分为测角法,即关于三角函数性质的研究;第二部分则为狭义的三角学,即三角形解法之研究.

在实际工作中,三角学有广泛的应用:在测量工作方面——决定高度与距离,地形图与三角形之测量等;在天文学方面——测量恒星高度与方位,赤纬与赤经及天体坐标,并进一步将天体坐标知识应用于地理坐标之计算;在力学方面——力在坐标轴上的射影,合力的方向,周期运动公式;在机械学方面——螺旋、齿轮之计算,等等.

三角学创始于希腊,它的创立与天文学的应用有着密切的关系.就天文学本身一方面来说,它是在航海与农业的需要影响下成长起来的:为了海上航行的安全,需要按照星宿来决定船只的正确航程;为了农业需要基于数学尤其是三角学所制定的正确日历.

希帕诸斯(Hippurchus 生于公元前 2 世纪)是第一个三角表的著者,希帕诸斯三角表中载有不同圆心角所对弦长.

公元后 100 年学者梅涅劳斯(Menelaus)发现了球面三角学的原理.地球中心说之著名学者克罗狄斯·托勒密(Claudius Ptolemaeus)在所著《算学总览》一书中载有半径为 1 的圆的弦长的表.他将半径分为 60 等份后,再将每一

① 编校注:本书部分语言习惯及行文格式尊重新中国成立初期的语言习惯及行文要求.

份又分为 60 等份,同样地再将其中每一小份分为 60 等份(在拉丁文中,这些小份叫作"Partes minutae primae"及"Partes minutae secundae"由此得到我们量角所用的分、秒等名称).托勒密的表中载有圆心角为 $1^\circ, 1\frac{1}{2}^\circ, 2^\circ, 2\frac{1}{2}^\circ, \cdots\cdots$ 所对之弦长.

中世纪时,三角学在印度亦有相当的发展.印度人已经利用了弦的一半即正弦线;他们也引用了余弦、正弦表与三角公式:$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$(唯当时系以文字叙述此公式,并未以数学符号表出).以及把钝角的正弦和余弦化为锐角函数的方法也是印度人所知道的.

9 世纪与 10 世纪,阿拉伯学者发现三角函数中的正切,并制成较正确的正弦表.至于三角学所以在阿拉伯发达的原因,亦系受当时天文学与航海术之影响;因为此时阿拉伯与地中海沿岸间的贸易非常繁盛.

在欧洲,第一个三角学的作者是英国学者布拉德沃丁(Bradwardine,13 世纪至 14 世纪);而第一本有系统的三角学,则系德国学者约翰·米勒(John Müller)于 15 世纪以笔名雷吉奥蒙塔努斯(Regiomontanus)所发表之《论各种三角形》.在该书内,叙述平面三角形与球面三角形之解法,并指出三角学乃为一独立之科学,无须从属于天文学.

16 世纪韦达(Vieta)将三角公式以文字符号(字母)表示之后,三角学始具有现代之形式.

以后,更有众多学者致力于三角学之研究,如:纳皮尔(Napier,对数发明者)、波泰诺(Pothenot)以及天才的彼得堡科学院院士欧拉(Eüler)等,而欧拉应推为三角函数近代理论之创始人.

§2 函数概念 于两种变数之间存在着一种关系,即,对于此二变数中之一的每一值有另一变数的确定值与之对应.例如,下列各等式

$$y = a + x, y = x^2, y = \sqrt{x}, \cdots$$

中,二变数 x, y 间存在之关系.

更如,正方形之边与面积间之关系,球体之半径与球体体积间之关系,以及其他,等等.

一变数之数值对应于另一变数之数值时,前一变数即叫作后一变数之函数.例如:圆面积为该圆半径之函数;即,事实上当圆半径长度改变时,则圆面积必随半径之变化而变化.故对于半径的每一值有圆面积的确定值与之相应(反言之,如以圆面积之改变以决定该圆半径之变化时,则圆半径即为该圆面积之函数).

一数量之变化，能决定函数之变化时，则该数量，叫作函数之变数. 例如：在 $y=x^3$ 中，y 随 x 之变化而变化，故 y 叫作函数，x 叫作函数 y 之变数. 同样的在 $y=\lg N$ 中，y 为函数，N 为变数.

§3 角与弧的度量 我们在几何学中便已知道，角是用弧来度量的.

为了用弧来度量角，我们就把弧用圆周的几分之几或者半径的多少倍[①]来表示. 由几何学已知前一个表示法是用“度”来表示弧和角. 后一个表示法是用弧长与半径之比值来表示弧. 例如：某一弧长为 2.43，即将该弧伸成直线后，其长度等于半径的 2.43 倍. 因此圆周之半可用 $\pi R : R$，即用数 π 表示；圆周之 $\frac{1}{4}$ 用数 $\frac{\pi}{2}$ 表示，等等.

弧的这种度量法，叫作弧度法(或叫作弪制).

应用这种方法，为了使得圆心角和它所对的弧量得是同一个数，那么就需要以等于半径的弧长所对的圆心角作为量角的单位. 这种量角的单位，叫作弧度(或叫作弪).

因此，角之对应弧长与半径之比值即为该角之弧度数. 例如：某角等于 $\frac{3}{2}\pi$，即该角等于 $\frac{3}{2}\pi$ 个弧度.

因为圆周长等于半径之 2π 倍，故一弧度如以度来表示，则为 $\frac{360^\circ}{2\pi}$，等于 $57^\circ17'44.8''$(误差在 $0.05''$ 以内).

应该很好地记住，任一个周角之弧度数均为 $2\pi R : R$，即 2π，而其度数则为 360°，因而可得下面的对应(表 1)：

表 1

360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	18°
2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$

我们现在来寻求度数与弧度数的换算公式：

① 第一种方法是比较直观的，也是实际上常用的(在量角器上)；第二种方法则是在理论研究方面比较常用的.

校者注：譬如说，某弧长是圆周(半径为 R) 的 n 分之一，那么，某弧长就是 $\frac{2\pi}{n}R$，也就是 R 的 $\frac{2\pi}{n}$.

设一弧或角的度数为α,弧度数为a;因一整圆周之度数为360°而弧度数为2π.故可得下式

$$\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{a}{2\pi}\text{或}\frac{\alpha}{180^\circ}=\frac{a}{\pi}$$

由此

$$a=\pi\cdot\frac{\alpha}{180^\circ}\tag{1}$$

$$\alpha=180^\circ\cdot\frac{a}{\pi}\tag{2}$$

例题 设一角为$67^\circ30'$,试求其弧度数.

按公式(1),以$67^\circ30'$代α,则得

$$x=\pi\cdot\frac{67^\circ30'}{180^\circ}=\frac{3}{8}\pi$$

如以π之近似值3.141 59代入上式,则$x=1.178\ 10$,其误差在0.000 005以内.

不利用公式,由下列对应值亦可求其x之值

$$360^\circ\cdots\cdots2\pi;1^\circ\cdots\cdots\frac{2\pi}{360^\circ}$$

$$67^\circ30'=67.5^\circ\cdots\cdots\frac{2\pi}{360^\circ}\times67\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\pi$$

§3a 弧长 设圆半径为r,弧长为l,其所对圆心角的弧度为a;则由弧度之定义可得

$$a=\frac{l}{r}\text{或}l=ra$$

亦即弧长等于圆半径与弧的弧度数之乘积.此公式常用于物理学及技术科学中.

在计算上,我们常使用度与弧度的换算表.

第一编
三角函数测角法

第一章　锐角三角函数

§4　三角函数的名称和表示法　任一角的三角函数有以下六种，即：正弦、余弦、正切、余切、正割、余割.

它们用以下六种符号来表示：sin、cos、tan、cot、sec、csc. 在上列函数符号后，必须附以对应于函数值的变数值(角). 例如：一角 α 的正弦，用符号来表示则为：$\sin\alpha$.

§5　锐角三角函数的定义　取任意一锐角 α，以此角之顶点为圆心，任一长为半径作一圆，使得这个角成为圆心角，设以 R 表半径之长. 为了区别构成此角的两个半径，设角 α 变化时(图 1)，半径 OA 的位置不变，仅半径 OB 随之转动. 这样，我们将固定的半径 OA 叫作角的不动径，将转动的半径 OB 叫作角的动径[①]. 现在来看一下三角函数的定义，在开始时可以一般地说：它们是在以已知角为圆心角的圆上所引的特殊线段与半径之比. 为了作出这些特殊线段除弧 AB 外，我们还需利用弧 AB 的延长弧及与 OA 直交的半径 OM.

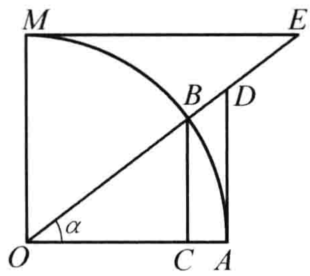

图 1

锐角的三角函数线及三角函数的定义如下：

1) 由动径的端点向不动径所引的垂线(BC)叫作正弦线，正弦线与半径之比叫作已知角的正弦($\sin\alpha=\dfrac{BC}{R}$).

2) 由圆心向正弦线所引的垂线(OC)叫作余弦线，余弦线与半径之比叫作已知角的余弦($\cos\alpha=\dfrac{OC}{R}$).

3) 由不动径的端点向上所引的切线与动径的延长线相交的线段(AD)叫作正切线，正切线与半径之比叫作已知角的正切($\tan\alpha=\dfrac{AD}{R}$).

① 有些教科书上，又把动径的最终位置叫作终边，把不动径叫作始边，即表示始边是动径的开始位置，终边是动径的最终位置.

4)由垂直于不动径的半径端点所引的切线与动径的延长线相交的线段(ME)叫作余切线,余切线与半径之比叫作已知角的余切($\cot\alpha=\dfrac{ME}{R}$).

5)从圆心到正切线终点的线段(OD)叫作正割线,正割线与半径之比叫作已知角的正割($\sec\alpha=\dfrac{OD}{R}$).

6)从圆心到余切线终点的线段(OE)叫作余割线,余割线与半径之比叫作已知角的余割($\csc\alpha=\dfrac{OE}{R}$).

例如:半径等于 9 cm,而正弦线等于 6 cm,则正弦即等于数$\dfrac{2}{3}$.

§6　定理　三角函数的值仅决定于角之大小,而与讨论时所用圆的半径之长短无关.

在图 2 及图 3 中,$\angle AOB$ 与 $\angle A_1O_1B_1$ 都等于已知角 α,半径 OA 与 O_1A_1,弧 AB 与 A_1B_1 虽不相等,但我们要证明 $\angle AOB$ 与 $\angle A_1O_1B_1$ 的同名函数却相等.

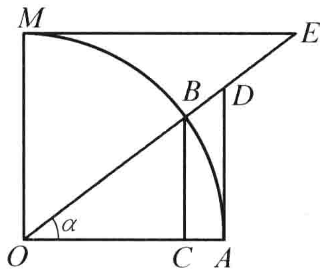

图 2

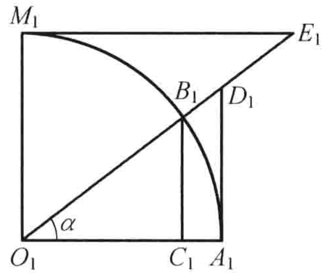

图 3

设关于半径为 R 之圆的三角函数值用 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$,… 表示;关于半径为 R_1 之圆的三角函数值用 $\sin_1\alpha$,$\cos_1\alpha$,… 表示. 现在证明 $\sin_1\alpha=\sin\alpha$,$\cos_1\alpha=\cos\alpha$,等等.

证明　因三角形 $O_1B_1C_1$、$O_1D_1A_1$ 及 $O_1M_1E_1$ 各与其对应三角形 OBC、ODA 及 OME 相似,因此有

$$\frac{B_1C_1}{R_1}=\frac{BC}{R},\frac{O_1C_1}{R_1}=\frac{OC}{R},\frac{A_1D_1}{R_1}=\frac{AD}{R}$$

等等,亦即 $\sin_1\alpha=\sin\alpha$,$\cos_1\alpha=\cos\alpha$,$\tan_1\alpha=\tan\alpha$,等等.

由此可知,等角的三角函数值都相等,而与半径的长短无关.

§7　由前节证明可知,半径的长度无论如何变化,而对已知角的三角函数值并不发生影响;但如果改变角的大小时,由图上就可以明显地看出,该角的

每一个函数值将随角之变化而变化.

§8　因为圆心角及其所对弧有同一的数值,故某角的三角函数,同时亦为该角所对弧的三角函数,此处所谓弧的三角函数,实际上应理解为弧的度量即度或者弧度的三角函数.因此,为了研究方便起见,有时以弧代替角,也有时将弧与角通称为变数.

§9　角由0°变化到90°时三角函数值的变化　在图4中,如角α渐次由0°增加到90°时,则$\frac{BC}{R}$、$\frac{AD}{R}$及$\frac{OD}{R}$各比也渐次增大,而$\frac{OC}{R}$、$\frac{ME}{R}$、$\frac{OE}{R}$各比则渐次减小(在图5中指出了正弦与余弦的变化);因此可知,若一锐角渐次增大时,其正弦、正切、正割亦随之逐渐增大,而余弦、余切、余割则逐渐减小.当角α增大到90°时,$\frac{BC}{R}$变为1,$\frac{OC}{R}$变为0,$\frac{AD}{R}$变为∞,$\frac{ME}{R}$变为0,$\frac{OD}{R}$变为∞,$\frac{OE}{R}$变为1;所以

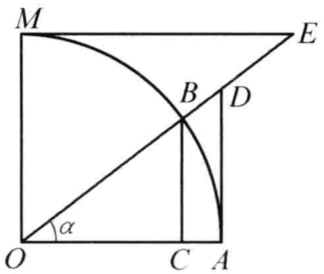

图4

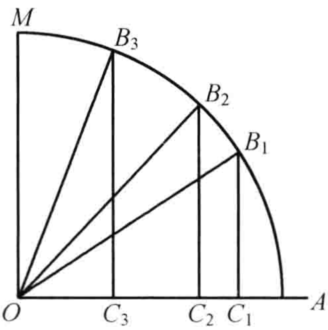

图5

$$\sin 90^\circ=1,\cos 90^\circ=0,\tan 90^\circ=\infty$$
$$\cot 90^\circ=0,\sec 90^\circ=\infty \text{ 及 } \csc 90^\circ=1$$

当一角x由90°渐次减小到0°时,则$\frac{BC}{R}$、$\frac{AD}{R}$及$\frac{OD}{R}$亦随之逐渐减小,而$\frac{OC}{R}$、$\frac{ME}{R}$及$\frac{OE}{R}$则逐渐增大.若角α变为零,则$\frac{BC}{R}$变为0,$\frac{OC}{R}$变为1,$\frac{AD}{R}$变为0,$\frac{ME}{R}$变为∞,$\frac{OD}{R}$变为1,$\frac{OE}{R}$变为∞;所以

$$\sin 0^\circ=0,\cos 0^\circ=1,\tan 0^\circ=0$$
$$\cot 0^\circ=\infty,\sec 0^\circ=1 \text{ 及 } \csc 0^\circ=\infty$$

含有符号∞的等式应该有条件地理解.例如:等式$\tan 90^\circ=\infty$的意义仅为当一角接近于90°的时候,其正切值无限增大.

因此,若角α由0°增大到90°时,则

$\sin\alpha$ 由 0 增大到 1;$\cos\alpha$ 由 1 减小到 0

$\tan\alpha$ 由 0 增大到 ∞;$\cot\alpha$ 由 ∞ 减小到 0

$\sec\alpha$ 由 1 增大到 ∞;$\csc\alpha$ 由 ∞ 减小到 1

因为 0° 与 90° 是锐角的两个极值,故由上之结论可知,哪些数是可以作为一种锐角三角函数值.例如 3 这个数,可作正切、余切、正割及余割各函数之值,但不能作正弦及余弦二函数值.

§10 由已知三角函数作锐角 从 §6 与 §9 可知,对于角 α 的每个值,每种三角函数必有一确定的值与之对应;反之,对于任一三角函数值亦必有一确定的锐角与之对应.下面举例说明由一个已知三角函数值作锐角的方法.

例 1 已知一锐角的正弦为$\frac{2}{3}$,求作此锐角(图 6).

解 先作一任意直线 OA,然后以点 O 为圆心,OA 为半径画弧AB.设 OA 为所求锐角的不动径,O 为顶点,为了使其正弦是$\frac{2}{3}$,就必须使弧 AB 的另一端到 OA 的距离与半径之比为 $2:3$.因此,可由点 O 向上引一垂线 OM,使其长等于 OA 的$\frac{2}{3}$,再由点 M 引平行于 OA 的直线,与弧 AB 相交于一点 B,联结 OB,因为 $\sin AOB=\frac{2}{3}$,故 $\angle AOB$ 即为所求.我们要注意的就是,角的大小与半径的长短无关.因为以任何长度为半径,都可以得到与三角形 OBC 相似的三角形,因此它们的对应角也是相同的.

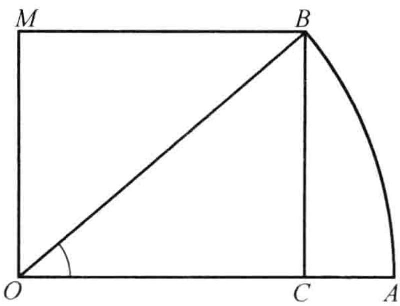

图 6

例 2 已知一锐角的余切为 2,求作此锐角.

解 以直角 AOM(图 7)的顶点为圆心,以任意长为半径画弧 AM,设与角 AOM 的一边 OM 的交点为 M,过 M 引一长为半径 2 倍的切线 ME,联结 OE,交$\overparen{AM}$于点 B,则所成的角 AOB 即为所求,因为

$$\cot AOB=\frac{ME}{R}=\frac{2R}{R}=2$$

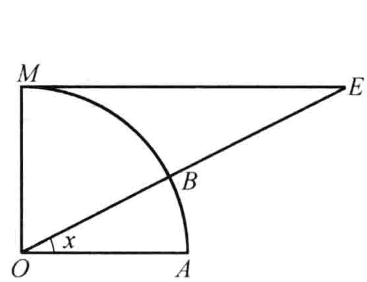

图 7

例 3 已知一锐角的正割为$\frac{4}{3}$,求作此锐角.

解　作任意一弧 AD（图 8），取它的一条半径 OA 作为不动径，由不动径的端点 A 向上作一切线. 因为正割为 $\frac{4}{3}$，故必须使切线的终点与圆心的距离为半径的 $\frac{4}{3}$. 欲达到此目的，可延长 OA 至点 E，使 $OE=\frac{4}{3}OA$，然后以点 O 为圆心，OE 为半径画弧 EC，设弧 EC 与切线相交于一点 C，联结 OC，则角 AOC 即为所求.

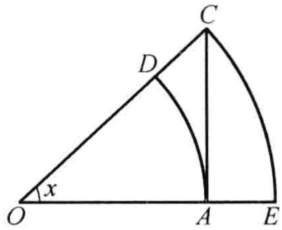

图 8

和前面的两个例子一样，所求的角都与半径的长短无关.

下列各函数的锐角留给读者自己去求

$$\cos x=\frac{3}{5},\tan x=\frac{4}{7},\csc x=2$$

§ 11　由以上各例可知，对于每一三角函数值即可得出一确定的锐角，并且在前面已经学过，对于任一锐角都有一确定的三角函数值与之对应. 因此可以说锐角与其三角函数，彼此互相完全确定.

§ 12　同角的三角函数间之相互关系　在同角的三角函数中，很容易发现它们间最简单的关系（图 9）.

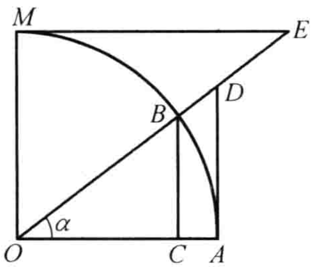

图 9

1）在直角三角形 OBC 中有

$$BC^2+OC^2=OB^2$$

两边各除以 R^2，则得

$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2+\left(\frac{OC}{R}\right)^2=\left(\frac{OB}{R}\right)^2$$

或

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad (\text{I})$$

2）在相似三角形 ODA 与 OBC 中，可得

$$\frac{AD}{OA}=\frac{BC}{OC}$$

在上面等式中，以 R 代替 OA，并用 R 除等式右端的分子分母，则得

$$\frac{AD}{R}=\frac{\left(\frac{BC}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)}$$

或

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (\text{II})$$

3) 在相似三角形 EOM 及 OBC 中,得

$$\frac{ME}{OM}=\frac{OC}{BC}$$

由此得

$$\frac{ME}{R}=\frac{\left(\frac{OC}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)}$$

或

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{Ⅲ}$$

4) 在相似三角形 ODA 与 OBC 中可得

$$\frac{OD}{OA}=\frac{OB}{OC}$$

由此得

$$\frac{OD}{R}=\frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)}$$

或

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

由此得

$$\sec\alpha\cdot\cos\alpha=1 \tag{Ⅳ}$$

5) 在相似三角形 EOM 与 OBC 中可得

$$\frac{OE}{OM}=\frac{OB}{BC}$$

由此得

$$\frac{OE}{R}=\frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)}$$

或

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

由此

$$\csc\alpha\cdot\sin\alpha=1 \tag{Ⅴ}$$

§13. 在同角的三角函数中仅有五种独立的相互关系 我们从作图来证实这个事实.

实际上,若已知某角六个函数中的任一函数值,则该角即可作出(§10). 由