线性方程组新解及应用

王在华 著

科学出版社

线性方程组新解及应用

王在华　著

科学出版社
北京

内容简介

线性方程组理论是“线性代数”的重要组成部分，在各学科与工程技术领域有重要的应用. 本书以线性方程组理论为主题，系统介绍了线性方程组具有唯一解时求解公式的推导、有无穷多解时通解公式的构造以及无解时最小二乘解的表示等问题，并应用于水手分桃、幻方构造、点灯游戏等趣味问题以及超平面拟合、网页排序、机器翻译等应用课题；以向量与矩阵为工具，反复使用矩阵分块与矩阵分解等技术，使有关问题得到统一而简洁的处理. 从简单到复杂，从特殊到一般，从特例中归纳出一般性的结论，从类比联想中寻求启发与答案，不断尝试转换思考问题的角度与方法，这些做法贯彻全书的所有章节，有利于理解隐藏在理论背后的思想与本质特征，并成为本书的鲜明特色.

本书可作为“线性代数”研讨课教材或参考书，可供高年级本科生、研究生、大学数学教师与相关工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性方程组新解及应用/王在华著. —北京：科学出版社，2016. 3

ISBN 978-7-03-047883-2

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①线性方程—方程组—数值解—研究 Ⅳ. ①O241.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 058400 号

责任编辑：王丽平 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：张　伟 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2016 年 3 月第　一　版　开本：720 × 1000 B5
2016 年 3 月第一次印刷　印张：9 3/4
字数：190 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

拙作《理解与发现：数学学习漫谈》是一本介绍如何有效地进行数学学习的著作. 通过大量的例子介绍如何由简单问题或待解决问题的简单情形获得理解, 如何由处理简单问题或简单情形的思路、方法或结论获得启发, 如何灵活应用归纳法和类比法产生不同角度、由此及彼、举一反三的联想, 进而获得待求问题的解决或作出新的发现. 在不影响结论正确性的情况下, 其内容编排力求体现出合情合理、自然可信的理解与探索过程, 重点放在对数学理论与方法的理解上. 该书于 2011 年 6 月出版后, 2014 年 2 月重印了一次. 读者的选择给了作者很大的鼓励. 就作者自己的感觉来说, 该书还有许多不足之处. 例如, 书中主要是通过各种各样的例题来加深理解该书所强调的思路和方法, 但例题之间的内容关联并不强, 是一些孤立的小问题. 这就促使作者思考, 如何由点及面运用这样的思路和方法去学习、理解一门课程或一类知识呢? 作为该书的姊妹篇, 本书《线性方程组新解及应用》就是为适应这一思考和需求而出现的. 麻省理工学院的 Strang 教授在他写的*Linear Algebra and Its Applications* (Fourth Edition) 中指出: “I personally believe that many more people need linear algebra than calculus”. 作者赞同这个观点, 所以本书将以线性方程组理论与矩阵论为主题展开讨论.

全书共六章. 第 1 章介绍不同实际问题中出现的线性方程组与相关基础知识点及简单拓展, 包括水手分桃、韩信点兵等趣味问题, 也有几何定理机器证明与分形等话题, 可作为了解线性方程组与矩阵的一般性素材. 第 2 章对线性方程组有唯一解时的求解公式进行细致而深入的探索, 从不同角度和思路推导出 Cramer 法则, 着重体现如何从简单的问题获得启发与联想, 如何利用归纳法与类比法获得一般性结论. 第 3 章还是遵循 “从简单的做起” 的原则, 逐步得到线性方程组有无穷多个解时的通解公式、广义逆矩阵、正交投影变换的概念和计算公式, 过程显得更加自然易懂. 第 4 章介绍矩阵应用中非常重要的 QR 分解和奇异值分解, 并简单讨论图像压缩与降噪等问题. 第 5 章讨论矛盾线性方程组的最小二乘法问题的求解方法及若干相关问题, 包括最小二乘解的一般公式、矩阵最优逼近等问题, 还有求解线性方程组的迭代数值算法与共轭梯度算法. 第 6 章介绍几个应用问题, 有比较简单的, 如三阶幻方、点灯游戏、完美矩形、直线与超平面拟合等; 也有相对复杂的, 如投入产出分析、网页排序算法、机器翻译 (machine translation) 等问题的矩阵理论分析, 以体现线性方程组理论与矩阵方法在处理这些问题时的独特作用和有效性. 但本书没有给出这些复杂问题的建模过程, 也不涉及这些理论方法的计算机

算法实现. 要全面理解这些应用问题, 还需要读者自己多方面的资料积累和深入探索. 书中经典内容的结论在相关教材或著作中可以找到, 但所有内容的处理方式是全新的, 融入了作者的心得体会.

本书的写作目的有两个, 一是围绕线性方程组与矩阵的一些理论问题展开, 力争以一种比较自然、合情合理的方式呈现相关方法与结论是如何产生的, 力求使读者在数学思维方法方面有所启发; 二是介绍数据处理等问题所需要的一些线性方程组的理论和方法, 并在不同问题的解决过程中反复应用, 希望能对读者理解和应用这些数学工具有所帮助. 从简单到复杂, 从特殊到一般, 从特例中归纳出一般性结论, 从类比联想中寻找启发与答案, 不断尝试转化思考问题的角度, 这些做法贯穿全书的所有章节. 从理解问题的角度, 我相信对许多读者来说, 例子胜于抽象理论, 例子胜于演绎证明. 因此, 和《理解与发现: 数学学习漫谈》类似, 本书通过大量相互关联的例子来阐述作者的主要学术思想. 作者希望, 本书的写作方式能在实现这两个目标方面发挥一定的作用.

线性方程组理论是"线性代数"的重要组成部分, 本书涉及理工科"线性代数"基础课程中几乎所有的概念、理论和方法, 还包括这类课程之外的许多知识点, 大体上也是按照循序渐进的方式对内容进行编排的, 但并没有充分照顾到初学者的知识结构和学习能力, 也没有安排验证性的小算例, 所以本书不适合作为"线性代数"基础课程的教科书. 对有较好英文阅读基础的初学者, 建议去看 Anton 与 Rorres 合写的*Elementary Linear Algebra: Applications Version* (Tenth Edition), 这是一本内容丰富的"线性代数"教科书, 既有许多具体细节帮助初学者去理解有关理论与方法, 又有大量的应用问题满足读者的拓展需求. 而本书中绝大多数问题的讨论和结论都具有一般性, 呈现的是运用归纳法和类比法进行理性联想与思考所产生的普遍性结果, 因而本书更适合大学高年级学生、研究生、大学数学教师和有关科技人员阅读参考.

本书的出版得到了国家自然科学基金项目 (项目编号: 11372354) 的资助. 上海大学王卿文教授百忙之中认真细致地审阅了书稿, 提出了许多具体而有建议性的修改意见, 李俊余博士和郑远广博士也仔细阅读了书稿并提出了宝贵的修改意见, 在此一并表示衷心感谢.

由于作者水平有限, 书中不妥之处在所难免, 敬请读者批评指正. 联系邮箱为 zhwang@nuaa.edu.cn.

王在华

2015 年 10 月

目　录

第 1 章　线性方程组与矩阵

线性方程组理论是“线性代数”的核心组成部分, 在许多学科与工程技术领域都有重要应用. 刻画线性方程组的主要工具是向量与矩阵. 本章介绍几个与线性方程组有关的例子, 目的是阐述线性方程组及其求解基本方法, 介绍线性变换与矩阵之间的关系, 讨论对线性方程组及其求解方法的若干进一步拓展. 有关线性方程组与矩阵的更多资料可参考文献 [1] 和 [4].

1.1　《九章算术》方程术

中国曾在数学领域作出许多重要贡献. 鸡兔同笼问题是我国古代著名的算题, 最早出现在南北朝时期的算书《孙子算经》中: 今有雉、兔同笼, 上置三十五头, 下置九十四足, 问雉、兔各几何? 书中给出的解法是: 半其足, 得四十七, 以少减多. 这是一个典型的线性方程组及其求解问题.

一只鸡有一个头、两只脚, 而一只兔是一个头、四只脚. 采用代数方法, 可引入未知数 x, y, 分别表示鸡和兔的数量 (单位: 只), 必满足等式 $x+y=35$ 和 $2x+4y=94$. 将这两个等式联立起来就得到 x, y 所满足的二元一次线性方程组

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases} \tag{1.1}$$

对第二个方程进行简化, 可得

$$x+2y=\frac{94}{2}\ (=47)$$

由此可知, 和第一个方程两边分别相减消去未知数 x 可得兔子的数量 y 是

$$y=\frac{94}{2}-35=12$$

从而, 鸡的数量为 $x=35-12=23$.

将线性方程组 (1.1) 抽象出来就是一个矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 2 & 4 & 94 \end{bmatrix}$$

其每一行对应于一个方程. 该矩阵称为线性方程组 (1.1) 的增广矩阵, 而单纯由线性方程组的系数组成的矩阵称为系数矩阵. 上述消去未知数 x, y 的过程就是对增广矩阵进行化简:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 2 & 4 & 94 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 1 & 2 & 47 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 23 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

从而等价的线性方程组是 $1 \times x + 0 \times y = 23$, $0 \times x + 1 \times y = 12$, 即 $x = 23, y = 12$.

将上述线性方程组一般化, 得到

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.2}$$

求解线性方程组的基本思路和方法是消元法. 例如, 采用消元法, 首先消去变量 x_2, 为此在上述两个方程左右两边分别乘以 a_{22} 和 a_{12}, 然后方程两边分别相减可消去 x_2, 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \tag{1.3}$$

类似地, 通过消去 x_1, 又得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \tag{1.4}$$

因此, 当 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ 时, 方程组的唯一解可表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{cases} \tag{1.5}$$

反之, 由上式定义的 x_1, x_2 也必然满足线性方程组. 这就是说, 当 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ 时, 线性方程组 (1.2) 有且只有一组解. 利用行列式的记号, 线性方程组的唯一解可表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \dfrac{D_1}{D} \\[2ex] x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \dfrac{D_2}{D} \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 D, D_1, D_2 是按方程顺序与未知数顺序确定的三个行列式

$$D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

采用矩阵的记号, 应用 Gauss 消元法的消元过程就是对增广矩阵进行化简:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} a_{22}a_{11} & a_{22}a_{12} & a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{12}b_2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & 0 & a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{12}b_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} a_{21}a_{11} & a_{21}a_{12} & a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}b_2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} a_{21}a_{11} & a_{21}a_{12} & a_{21}b_1 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

分别得到公式 (1.3) 和 (1.4), 从而求得 x_1, x_2 的表达式. 采用 Gauss 消元法求解线性方程组, 实际上是对增广矩阵作如下三类初等行变换:

(1) 交换矩阵的第 i 行与第 j 行, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$;

(2) 用非零数 k 乘以第 i 行, 记为 $k\,r_i$;

(3) 用非零数 k 乘以第 i 行后加到第 j 行, 但保持第 i 行不变, 记为 $r_j + k\,r_i$.

这三类初等变换都是可逆变换, 因而变换前后的线性方程组的解是等价的, 即变换前后的线性方程组的解集合是相同的. 在矩阵理论中, 行与列具有对偶性, 有关行的结论对应地有关于列的结论. 例如, 一个方阵和它的转置矩阵具有相同的行列式; 矩阵列向量组的秩等于其行向量组的秩, 等等. 对应于初等行变换, 三类初等列变换分别是:

(1) 交换矩阵的第 i 列与第 j 列, 记为 $c_i \leftrightarrow c_j$;

(2) 用非零数 k 乘以第 i 列, 记为 $k\,c_i$;

(3) 用非零数 k 乘以第 i 列后加到第 j 列, 但保持第 i 列不变, 记为 $c_j + k\,c_i$.

将线性方程组化为等价的简单线性方程组要用初等变换, 计算行列式要用初等变换, 判断向量组的线性相关性要用初等变换, 计算矩阵的秩也要用初等变换, 求逆矩阵要用初等变换, 求矩阵的特征值与特征向量还是要用初等变换, 等等. 可以说, 初等变换的应用贯穿整个“线性代数”课程的计算间距中. 其实利用初等变换解线性方程组的思想在《九章算术》中就已出现.

《九章算术》是现存最早的中国古代数学著作之一, 是《算经十书》中最重要的一种, 在中国和世界数学史上占有重要的地位. 它内容丰富, 题材广泛, 共九章, 分为二百四十六题二百零二术. 其中第八章为方程章, 讨论线性方程组的解法. 它采用分离系数的方法表示线性方程组, 相当于现在的矩阵, 解线性方程组时用到的直除法, 与矩阵的初等列变换一致. 这是世界上最早的系统化求解线性方程组的方法. 在西方, 直到 17 世纪才由德国数学家 Leibniz 提出完整的线性方程组的求解法则.

《九章算术》的作者已无从考究, 一般认为它经过历代名家增补修订, 现今流传的版本是三国时期刘徽所作的注本. “方” 的本义是 “并”, 将两条船并起来, 船头拴在一起, 谓之方, “程” 是求解标准. 《九章算术》方程章第一问: 今有上禾三秉, 中禾二秉, 下禾一秉, 实三十九斗; 上禾二秉, 中禾三秉, 下禾一秉, 实三十四斗; 上禾一秉, 中禾二秉, 下禾三秉, 实二十六斗. 问上、中、下禾实一秉各几何? 答曰: 上禾一秉九斗四分斗之一, 中禾一秉四斗四分斗之一, 下禾一秉二斗四分斗之三. 术曰: 置上禾三秉、中禾二秉、下禾一秉, 实三十九斗于右方. 中、左禾列如右方. 以右行上禾遍乘中行, 而以直除. 又乘其次, 亦以直除. 然以中行中禾不尽者遍乘左行, 而以直除. 左方下禾不尽者，上为法, 下为实. 实即下禾之实. 求中禾, 以法乘中行下实, 而除下禾之实，余, 如中禾秉数而一，即中禾之实, 求上禾, 亦以法乘右行下实, 而除下禾、中禾之实, 余, 如上禾秉数而一, 即上禾之实, 实皆如法, 各得一斗. 如图 1.1 所示. 下面利用现代数学语言来表述这个问题及求解方法.

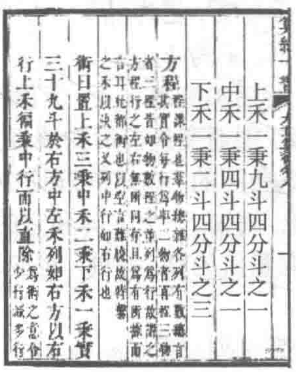
上禾一秉九斗四分斗之一
中禾一秉四斗四分斗之一
下禾一秉二斗四分斗之三
術曰置上禾三秉中禾二秉下禾一秉實
三十九斗於右方中左禾列如右方以右
行上禾徧乘中行而以直除

图 1.1　《九章算术》方程章第一问的答案与求解方法 (图片来自网络)

令 x_1, x_2, x_3 分别表示上、中、下禾的数量, 则可列出如下线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 39 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 34 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26 \end{cases} \tag{1.7}$$

其解法如下: 首先列出方程组系数按列排列的增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}$$

其中的每一列代表一个方程. 古代书写方式是竖排且从右到左, 因而方程组对应的增广矩阵以这种形式呈现出来. 两个矩阵相等当且仅当对应的行数和列数分别相等, 并且对应位置的元素也分别相等, 所以这个增广矩阵和现行文献中系数按行排列所得的增广矩阵是不同的, 但它们的作用和效果是一样的.

按照《九章算术》的求解方法, 首先求下禾: 对其作初等列变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix} \overset{3c_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{bmatrix} \overset{c_2-2c_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{bmatrix} \overset{3c_1}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

$$\overset{c_1-c_3}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{bmatrix} \overset{5c_1}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{bmatrix} \overset{c_1-4c_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

$$\overset{c_1/9}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 11 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

由此可得: $4x_3 = 11$, 其中 4 为法, 11 为实. 于是

$$x_3 = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

上述化简过程中为了避免使用分数而多次采用第二类初等列变换. 如果可用分数, 则可减少使用线性变换的次数, 得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix} \overset{c_2-\frac{2}{3}c_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & \frac{5}{3} & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \\ 26 & 8 & 39 \end{bmatrix} \overset{c_1-\frac{1}{3}c_3}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\ \frac{8}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 13 & 8 & 39 \end{bmatrix} \overset{c_1-\frac{4}{5}c_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & 2 \\ \frac{12}{5} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{33}{5} & 8 & 39 \end{bmatrix}$$

因此 $\dfrac{12}{5}x_3=\dfrac{33}{5}$, 此即 $4x_3=11$. 如果采用现在通用的形式, 则有

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&1&1\\26&34&39\end{bmatrix}\overset{c_2-2c_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&3\\2&-1&2\\3&-5&1\\26&-18&39\end{bmatrix}\overset{c_3-3c_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&-4\\3&-5&-8\\26&-18&-39\end{bmatrix}$$

$$\overset{c_3-4c_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\3&-5&12\\26&-18&33\end{bmatrix}$$

由此可得: $12x_3=33$, 此即 $4x_3=11$. 类似地可求得中禾: 对矩阵作初等列变换

$$\begin{bmatrix}0&0&3\\0&5&2\\4&1&1\\11&24&39\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&3\\0&20&2\\4&4&1\\11&96&39\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&3\\0&20&2\\4&0&1\\11&85&39\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&3\\0&4&2\\4&0&1\\11&17&39\end{bmatrix}$$

由此可得: $4x_2=17$, 即

$$x_2=\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}$$

进一步, 按如下步骤求上禾: 对矩阵作初等列变换

$$\begin{bmatrix}0&0&3\\0&4&2\\4&0&1\\11&17&39\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&12\\0&4&2\\4&0&4\\11&17&156\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&12\\0&4&2\\4&0&0\\11&17&145\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&24\\0&4&4\\4&0&0\\11&17&290\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}0&0&24\\0&4&0\\4&0&0\\11&17&279\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&4\\0&4&0\\4&0&0\\11&17&37\end{bmatrix}$$

由此可得: $4x_1=37$, 即

$$x_1=\frac{37}{4}=9\frac{1}{4}$$

上述解法和现在通用的 Gauss 消元法完全一致.

线性方程组和增广矩阵是一一对应的. 增广矩阵既可如《九章算术》中按列排列, 也可如现行文献中按行排列. 采用初等变换对增广矩阵化简, 就是将线性方程组化为等价但易于求解的线性方程组.

1.2 水手分桃问题

有一道趣味数学题: 五个水手来到一个荒岛上, 发现一大堆桃子. 由于旅途劳累, 大家顾不上桃子, 很快就去睡觉了. 第一个水手醒来后, 把桃子平均分成五份还多一个, 就把多余的一个吃了, 并把自己的一份藏了起来, 再把另外四份桃子混在一起, 之后又去睡觉了. 第二、第三、第四、第五个水手相继醒来, 他们和第一个水手一样, 把桃子平均分成五份, 恰好多出一个, 就给自己吃了, 私藏一份后再把其余的桃子混在一起, 又去睡觉了. 天亮后, 大家发现桃子已剩下不多了, 各人心里有数, 但谁也不说. 为了公平, 大家把剩下的桃子又平均分成五份, 巧得很还是多出一个, 就把它给扔了, 然后各自取一份离开了. 那么, 原先总共有多少个桃子?

这个问题非常适合用线性方程组的理论来解决. 总共均分桃子六次, 假设每次分桃的 $\frac{1}{5}$ 为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, 最初的桃子总数为 x, 那么可得如下线性方程组

$$\begin{cases} x = 5x_1 + 1 \\ 4x_1 = 5x_2 + 1 \\ 4x_2 = 5x_3 + 1 \\ 4x_3 = 5x_4 + 1 \\ 4x_4 = 5x_5 + 1 \\ 4x_5 = 5x_6 + 1 \end{cases}$$

这已经是形式非常简单的线性方程组, 可直接依次回代求解. 这里一共有 6 个方程, 但却有 7 个未知数, 必有 1 个自由变量. 例如, 取 $x_6 = c$ 为自由变量, 则可先求 x_5, 然后求 x_4, 再依次求 x_3, x_2, x_1, 最后求 x, 即

$$\begin{aligned} x &= \frac{15625}{1024}c + \frac{11529}{1024} \\ x_1 &= \frac{3125}{1024}c + \frac{2101}{1024} \\ x_2 &= \frac{625}{256}c + \frac{369}{256} \\ x_3 &= \frac{125}{64}c + \frac{61}{64} \\ x_4 &= \frac{25}{16}c + \frac{9}{16} \\ x_5 &= \frac{5}{4}c + \frac{1}{4} \\ x_6 &= c \end{aligned}$$

与一般的线性方程组的通解不同的是, 这里要求 $x, x_1, \cdots, x_6$ 都是正整数.

方程组有无穷多个实数解, 也有无穷多个整数解. 例如, 当 $x_6 = c = -1$ 时, $x_5 = x_4 = x_3 = x_2 = x_1 = -1$ 和 $x = -4$ 这样得到方程组的一个整数解, 但不符合要求. 设 $N > -4$ 是 x 的最小正整数解, 那么, 必有正整数 c 使得

$$N = \frac{15625}{1024}c + \frac{11529}{1024}, \quad -4 = \frac{15625}{1024}(-1) + \frac{11529}{1024}$$

同时成立, 因此

$$N - (-4) = \frac{15625}{1024}(c+1)$$

由于 15625 与 1024 是互素的, 此时必有 $c = 1023$, $N = 15625 - 4 = 15621$. 上式还告诉我们, x 的任何两个解的差等于 15625 的整数倍. 因此, 该方程组有无穷多个正整数解, x 的最小正整数解是 15621.

这个桃子总数有点大, 数字小一点会更加符合实际情况. 据说, 美籍华裔物理学家李政道教授 1978 年访问中国科技大学时, 对少年班学生提了一个简化版的猴子分桃问题: 五只猴子发现一大堆桃子. 由于旅途劳累, 大家顾不上桃子, 很快就睡觉了. 第一只猴子醒来后, 把桃子平均分成五堆还多一个, 把多余的一个吃了, 自己拿了一份, 并把其余的混在一起后就离开了. 第二只猴子起来后, 也把桃子平均分成五堆还多一个, 把多余的一个吃了, 自己拿了一份, 并把其余的混在一起后就离开了. 第三、第四、第五只猴子相继醒来后都照此处理. 问最初总共有多少个桃子. 此时, 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x = 5x_1 + 1 \\ 4x_1 = 5x_2 + 1 \\ 4x_2 = 5x_3 + 1 \\ 4x_3 = 5x_4 + 1 \\ 4x_4 = 5x_5 + 1 \end{cases}$$

因而

$$x = \frac{3125}{256}x_5 + \frac{2101}{256}$$

方程组的一个特解是: $x_5 = x_4 = x_3 = x_2 = x_1 = -1$ 和 $x = -4$, 而 x 的任何两个相邻值相差 3125, 且 3125 和 625 互素, 所以最小的正整数解是 $x = 3121$.

由特例归纳出一般性结论, 体现数学思维的重要特征. 数学家 Polyá 曾说过: "数学思维不是纯形式的, 它涉及的不仅有公理、定理、定义及严格的证明, 而且还有许许多多其他方面: 推广、归纳、类比, 以及从一个具体情况中抽象出某个数学概念等. 数学教师的重要工作是让他的学生了解这些十分重要的非形式思维过

程."[12] 下面将上述求解思路与结论推广到更一般的情形. 当改变水手 (猴子) 的个(只) 数, 以及每次分完剩下的数量时都可以类似处理, 得到通用求解公式.

以后一种情形为例, 假设有 h 只猴子, 每次将桃子 h 等分后还剩下 r 个桃子, 将剩下的 r 个桃子吃了, 把其中 $h-1$ 份混合在一起后, 取剩下的一份就离开了. 这里, 自然有 $1 \leqslant r < h$, 并且假设 $x, x_1, x_2, \cdots, x_h$ 分别为桃子总数, 以及从第一次到第 h 次去掉 r 个桃子后均分的桃子个数. 那么, 由题意可得

$$\begin{cases} x = hx_1 + r \\ (h-1)x_1 = hx_2 + r \\ (h-1)x_2 = hx_3 + r \\ \qquad \cdots\cdots \\ (h-1)x_{h-2} = hx_{h-1} + r \\ (h-1)x_{h-1} = hx_h + r \end{cases}$$

由最后一个等式开始, 依次回代可得

$$\begin{aligned} &(h-1)x_{h-1} = hx_h + r \\ &(h-1)^2x_{h-2} = h(h-1)x_{h-1} + r(h-1) = h^2x_h + r(h + (h-1)) \\ &(h-1)^3x_{h-3} = h(h-1)^2x_{h-2} + r(h-1)^2 = h^3x_h + r\left(h^2 + h(h-1) + (h-1)^2\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ &(h-1)^{h-1}x_1 = h^{h-1}x_h + r\left(h^{h-2} + h^{h-3}(h-1) + \cdots + h(h-1)^{h-3} + (h-1)^{h-2}\right) \\ &(h-1)^{h-1}x = h(h-1)^{h-1}x_1 + r(h-1)^{h-1} \end{aligned}$$

则未分配之前的桃子总数 x 为

$$x = \frac{h^h}{(h-1)^{h-1}}c + \frac{R}{(h-1)^{h-1}} \tag{1.8}$$

其中常数 R 为

$$R = r\left(h^{h-1} + h^{h-2}(h-1) + \cdots + h(h-1)^{h-2} + (h-1)^{h-1}\right)$$

很明显, 这个非齐次线性方程组有一个特殊的整数解

$$x_h = h_{h-1} = \cdots = x_1 = -r, \quad x = -(h-1)r$$

并且 x 的任何两个整数解的差是 h^h 的倍数. 由于 h^h 与 $(h-1)^{h-1}$ 不可约, 如果取 $c-(-r) = (h-1)^{h-1}$, 则

$$x = h^h - (h-1)r \tag{1.9}$$

是满足条件的最小正整数. 特别地, 当 $h=5, r=1$ 时, 由上述计算公式可得 $R=2101$, 以及最小正整数解 $x=3121$, 与前面的数值计算结果完全一致.

另外, 换一个角度思考问题常常会取得意想不到的作用和效果[14]. 由于非齐次线性方程组的通解等于其一个特解 (前面已经求得, 即 $x_h=h_{h-1}=\cdots=x_1=-r$, $x=-(h-1)r$) 加上相应的齐次线性方程组的通解, 所以关键是要求得相应的齐次线性方程组的通解. 对应于齐次线性方程组, $r=0$, 此时其解可以依次递推得到

$$
\begin{aligned}
x_{h-1} &= \frac{h}{h-1}x_h\\
x_{h-2} &= \frac{h}{h-1}x_{h-1} = \left(\frac{h}{h-1}\right)^2 x_h\\
x_{h-3} &= \frac{h}{h-1}x_{h-2} = \left(\frac{h}{h-1}\right)^3 x_h\\
&\cdots\cdots\\
x_1 &= \left(\frac{h}{h-1}\right)^{h-1} x_h\\
x &= h\left(\frac{h}{h-1}\right)^{h-1} x_h
\end{aligned}
$$

写成向量的形式, 并取 x_h 为任意常数, 即可得到齐次线性方程组的通解. 因此, 原方程组的通解可表示为

$$
\begin{bmatrix} x\\ x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{h-1}\\ x_h \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} h\left(\dfrac{h}{h-1}\right)^{h-1} x_h\\ \left(\dfrac{h}{h-1}\right)^{h-1} x_h\\ \left(\dfrac{h}{h-1}\right)^{h-2} x_h\\ \vdots\\ \left(\dfrac{h}{h-1}\right)^{1} x_h\\ x_h \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} -(h-1)r\\ -r\\ -r\\ \vdots\\ -r\\ -r \end{bmatrix}
\tag{1.10}
$$

为了使得上式中的 $x, x_1, x_2, \cdots, x_h$ 都是正整数, 最小的 x_h 的值是 $(h-1)^{h-1}$, 因此, 最小的 x 的值是 $h^h-(h-1)r$, 即公式 (1.9). 对这个问题来说, 运用线性方程组通解理论求解具有明显的优越性.

上述方程组的方程数量比未知数的个数少, 我们常常还用不定方程组来称呼它们. 一般来说, 线性不定方程 (组) 相对简单, 而非线性不定方程 (组) 则可能非常困