超穷数理论基础

（第二版）

〔德〕格奥尔格·康托 著

商务印书馆
创于1897 The Commercial Press

超穷数理论基础

（第 2 版）

〔德〕格奥尔格·康托　著

陈　杰　刘晓力　译

安徽师范大学图书馆
藏书

商务印书馆
创于1897 The Commercial Press

2016 年 · 北京

图书在版编目(CIP)数据

超穷数理论基础/(德)康托著;陈杰,刘晓力译.—2版.—北京:商务印书馆,2016
ISBN 978-7-100-12085-2

Ⅰ.①超… Ⅱ.①康…②陈…③刘… Ⅲ.①集论
Ⅳ.①O144

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第049428号

所有权利保留。
未经许可,不得以任何方式使用。

超穷数理论基础

〔德〕康 托 著
陈 杰 刘晓力 译

商 务 印 书 馆 出 版
(北京王府井大街36号 邮政编码100710)
商 务 印 书 馆 发 行
北京新华印刷有限公司印刷
ISBN 978-7-100-12085-2

2016年4月第1版 开本850×1168 1/32
2016年4月北京第1次印刷 印张6 插页2
定价:19.00元

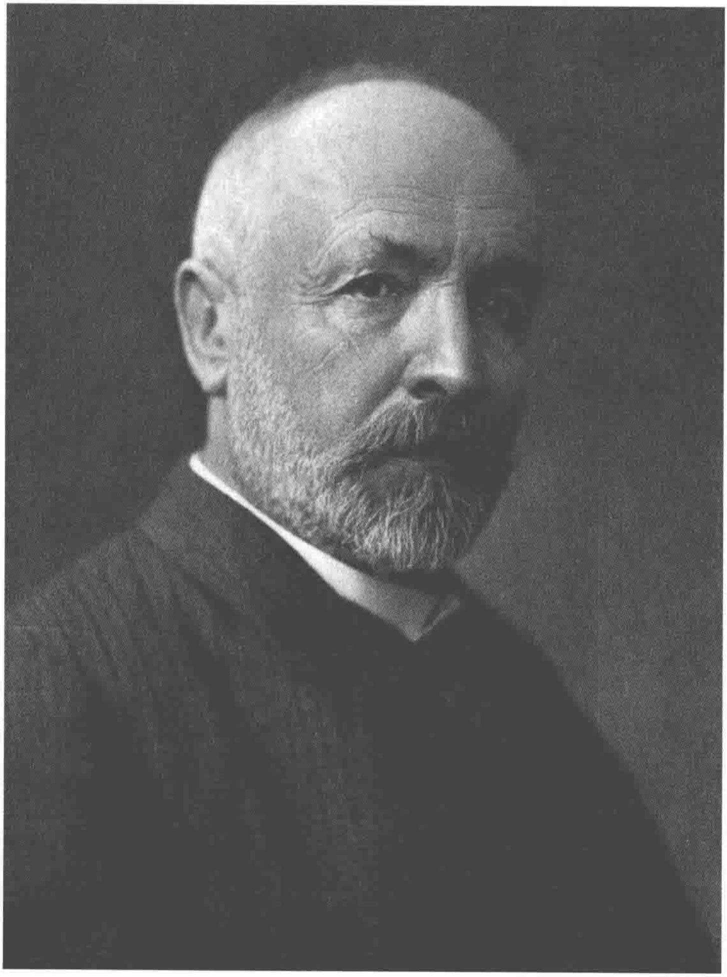
Georg Cantor

CONTRIBUTIONS TO THE FOUNDING OF THE THEORY OF TRANSFINITE NUMBERS

Translated, and Provided With an Introduction and Notes, by P. E. B. Jourdain

New York: Dover Publications, Inc., 1915, and Cosimo Classics, 2007

本书根据纽约多佛出版社 1915 年本和科西摩古典出版社 2007 年本译出



格奥尔格·康托（Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor），德国数学家，集合论的创始人。1845年3月3日生于俄罗斯圣彼得堡，自1869年任职于德国哈雷大学，直到1918年1月6日去世。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

"Hypothesis non fingo."
"Neque enim leges intellectui aut rebus damus
ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribe
fideles ab ipsius nature voce lates et prolatas
excipimus et desribimus."
"Veniet tempus, quo ista que nunc latent, in
lucem dies extrahat et longioris avi dligentia."

"不作任何假设。"
"我们绝不按照自己的意图
把法则强加于心智或事物
而是如同忠实的抄录员，
从自然的启示中接受这些法则并记录它们。"
"这一天一定会来临，届时
那些现在对我们来说是隐蔽的东西终被揭示出来。"

中译者言

（第2版）

2015年是康托的《超穷数理论基础》这部经典发表整整120周年。100多年来，集合论研究已经由素朴集合论转向公理集合论，并逐渐成为数学领域的一个独立分支。20世纪80年代以来，公理集合论取得了长足进展，由康托提出的连续统假设问题如今也已经成为公理集合论中一个重要的研究方向。追本溯源，这些进展主要得益于康托所创立的超穷数理论及其深刻的“无穷”观念。本书不仅有助于了解当初集合论的素朴风貌，也有助于理解现代公理集合论中那些重要问题的理论源头，这也正是经典之为经典的价值所在。

20年前，1995年，恰逢《超穷数理论基础》发表100周年，我与陈杰先生翻译的中文译本在内蒙古大学出版社出版，在学界产生了一定影响。后来，常有对集合论、数学和科学思想史有兴趣的学生、专家或询问或索要译本，但我手头已没有了存本，大学图书馆和书店里也几乎看不到它的踪影，在一些学者的建议下才有了重新出版的想法。

陈杰先生早年毕业于北京大学数学系并留校任教，1957年他

受命赴内蒙古创建内蒙古大学数学系，并出任第一届系主任。陈先生是我大学时代数学的启蒙老师。1995年的译本，原由我译出全部初稿，请时任副校长的陈先生审校。不想，陈先生竟然花了两个假期的时间与我共读这部经典。每天下午在他家的书房里，他用纯正的英文逐字逐句读原文，又与我逐字逐句讨论译文的表达。与其说是审校，不如说是先生带着我重读重译这部经典，这让我更深入地理解了康托思想的精髓，也避免了初稿中的错讹和不当；在整个过程中，陈先生对于数学思想史的远见卓识、他精益求精的学者风范，以及他对后学不遗余力循循善诱的胸怀，更是令我感佩之至，深受教益。本书重新出版，使康托经典得以更好地传播、泽被后人，是陈先生和我的共同心愿，也是我对逝去整整10年的恩师陈杰先生最好的纪念。

感谢商务印书馆对本书的出版给予的大力支持，感谢陈杰先生的女儿陈雪香女士给予我的最大信任。北京大学逻辑学专业的赵晓玉博士审读了译稿，协助我修订了第一版的译名和名词索引，并以LaTeX软件精心排版。我的博士生马醒初对原译本中一些不当之处和脚注中未注明原文的地方做了校正。对他们两位的工作，在此深表谢意。

另外，此版中译名采用《超穷数理论基础》以代替第一版的《超穷数理论基础文稿》的理由是，虽然本书的确是康托关于超穷数理论的两篇文稿，但考虑到这两篇文稿展现的是康托如何创立超穷数理论的过程及理论本身，也考虑到书名的简洁性，删除“文稿”二字更加适宜。同时，为便于阅读，第二版中译本的目录较第一版中译本和英译本更加细化，《引言》部分的子节

与《超穷数理论基础》第一部分和第二部分的子节出现在了目录中。所有的脚注均为英文译本中所原有。

刘晓力

2015 年 8 月 30 日于北京

中译者言

（第 1 版）

本书是一部数学经典，它记录了百年前数学领域的一项惊人成就，同时也是数学与哲学思想史上一场深刻的革命，这就是格奥尔格·康托（Georg Cantor）惊世骇俗的超穷数理论的创立。对康托来说，“无穷”是实有的。它们可以不同，可以比较大小，可以进行数学运算，甚至可以对其进行超穷归纳，等等。康托关于无穷的研究从根本上背离了传统，因此一开始就在数学正统派营垒里引起了激烈的争论，乃至遭受严厉的谴责。不仅数学权威克朗内克（Leopold Kronecker）把康托说成是科学的骗子和叛徒，而且庞加莱（Henri Poincaré）将超穷数理论视作数学发展史上的一场“灾难”，甚至还有哲学家和神学家反对康托的思想：一个长达几十年的学术大辩论也由此引发。许多年内，康托的名字就意味着论辩和对立，这不禁使人想起，历史上哥白尼（Nicolai Copernicus）以他惊人的理论去校正占据长达千年统治地位的地心说时，曾经经历过痛苦的过程，并为之付出了血与火的代价。当论战的硝烟沉落时，罗素（Bertrand A. W. Russell）称赞康托的工作“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的成就”。除

去科学思想上的伟大意义，康托的理论还直接导致现代集合论的建立，也极大地刺激和推动了数理逻辑的发展，而逻辑和现代集合论则构成了全部数学的基础，希尔伯特（David Hilbert）更视超穷数理论为“数学思想最惊人的产物”。

本书是从朱得因（Philip E. B. Jourdain）的英译本转译的。原文是康托分别于1895 和1897年发表在《数学年鉴》（*Mathematische Annalen*）上题为“Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenleche”I和II的两篇论文，这是康托二十多年关于超穷数理论研究的最后总结，也是这一不朽理论的定型文稿。按康托的原题，本书应译作《超穷集合论基础文稿》，朱得因以他“英译者言”中的理由，把本书译为《超穷数理论基础文稿》，我们沿用了此译名。

本书从英译本转译有两方面的原因，一是我们没有找到上世纪的《数学年鉴》，即康托原文的出处；更为重要的是，英译者得益于康托本人给他的一封长信，为英译本加了一个长篇“引言”，追踪了康托集合论产生和发展的详细过程，他还加了一个“附录”，扼要介绍了1897年到1915年英译本出版这段时间超穷数理论的进一步发展，这些对了解康托的工作无疑是有益的。

译者就翻译过程中遇到的一些问题，曾请教了康宏逵、郑毓信、袁向东、吴持哲几位先生，在此谨向他们表示诚挚的谢意。我们还要感谢内蒙古大学出版社的同志们，他们为本书的出版付出了辛勤的劳动。

陈　杰　刘晓力

1994 年 10 月于内蒙古大学

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

英译者言

本书包括格奥尔格·康托的两篇非常重要的论文，题为"Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenleche"，分别于1895年和1897年* 发表在《数学年鉴》（*Mathematische Annalen*）上。由于这两篇论文中研究的主要是各类超穷基数和超穷序数，而不是通常意义下的"集合论"（*Mengenlehre, théorie des ensembles*）——这类集合的元素多为那些可看作一维或多维空间中几何"点"的实数或复数——我认为使用本书现的译名较为恰当。

这两篇论文是康托自1870年开始发表的长篇系列文章中若干最重要成果的逻辑精炼。要想体会康托方面所做工作的极端重要性，我认为有必要对康托关于点集理论的早期研究进行专门而又全面的考察。正是这些研究第一次表明提出超穷数的必要性，而且也只有对这些研究进行考察，我们中的大多数才能消除对超穷数的引入所带来的任意性乃至不可靠性的担忧。不仅如此，我们还有必要，特别是通过魏尔斯特拉斯等人的工作去追溯导致康托工作的那些研究的历史过程。因此，我在本书前面加了一个引言，回顾了19世纪函数论的一部分进展，比较详细地谈到了魏尔斯特拉斯及其他人的基础性研究，以及康托在1870年到1905年间

* 第四十六卷, 1895, 第481-512页；第四十四卷, 1897, 第207-416页。

所做的工作。书后的附录对1897年以后超穷数理论的发展作了一个扼要的介绍。引言和附录所用的资料，极大地受益于许多多年前康托教授寄给我的关于集合论的一封长信。

康托工作所引起的哲学革命的影响恐怕要超过其数学封面的影响。数学家大多愉快地接受了康托这个不朽理论的基础，对它寄予厚望，仔细考察并使之更加完善；但是许多哲学家却反对它。这恐怕是由于他们中很少有人能真正理解它。希望本书使数学家和哲学家能对康托的理论有更好的认识。

最深刻地影响着现代纯粹数学，间接地也影响着与之密切相关的现代逻辑和哲学的最值得称道的三个人是卡尔·魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass）、理查德·戴德金（Richard Dedekind）和格奥尔格·康托。戴德金的大部分工作沿着与康托相平行的方向展开，把戴德金的《连续性和无理数》、《数的性质及其意义》和康托的工作加以比较将会是很有意思的。戴德金这几部著作出色的英译本已由本书的出版商出版。*

这里所介绍的康托的论文已有法文译本，†但至今还没有英文译本。由于顺利地获得翻译出版此书，我要感谢莱比锡的托依布纳（B. G. Teubner）以及柏林的《数学年鉴》的出版者。

朱得因（Philip E. B. Jourdain）

---

* 《数论辑录》（*Essays on the Theory of Numbers*），I.《连续性和无理数》（*Continuity and Irrational Numbers*），II.《数的性质及其意义》（*The Nature and Meaning of Numbers*），贝曼（W. W. Beman）译，芝加哥，1901，简称《数论辑录》(*Essays on Number*)。

† 马洛特（F. Marotte），《超穷数理论基础》（*Sur les foundents de la théorie des ensembles transfinis*），巴黎，1899。

目　录

引　言

I

要想可靠地通过个人去追溯从19世纪直到今天仍然深刻影响着纯数学分析那些基本概念的源头，人们不能不想到傅利叶（Jean Baptiste Josphe Fourier, 1768-1830）的工作。作为一流的物理学家，傅利叶曾非常明确地表述过自己对数学的见解，即只有通过有助于解决物理问题才能证明数学自身的合理性。然而，函数、函数的“连续性”、无穷级数和积分的“收敛性”等一般数学概念，最初的确是傅利叶作为对热传导问题的一种粗糙的解的副产品提出来的，而这也刺激了函数论的形成和发展。当认识到数学是对大量复杂的数据进行适当逻辑处理的卓有成效的手段，并且只有完全弄清楚我们所使用的有关方法和得出的相关结论的每一个细节后才能确信其逻辑可靠性的时候，这位视野开阔的物理学家便认可了这种产生于物理学概念的数学方法的精细发展。理论数学家懂得，纯数学本身最终是与哲学息息相关的。但是，我们没有必要在这里论证纯数学的合理性，而只需指出它在物理学概念中的起源。不过我们也已经指出，物理学甚至可以论证纯数学的大多数现代进展的合理性。

II

19世纪，函数论的两大分支不断发展并独立开来：一方面，狄里克雷（P. Dirichlet）给出了傅利叶关于三角级数相关结果的严格基础，由此导致了对一元实变量（单值）函数的一般概念和函数（特别是三角级数式）展开问题的研究；另一方面，柯西（Louis Cauchy, 1789-1857）逐步认识到单变量复变函数这一特殊概念的重要性，同时魏尔斯特拉斯在很大程度上独立于柯西建立了他的复变函数理论。

受柯西和狄里克雷研究方向的影响，黎曼（G. Rieman）对复变函数论进行了进一步的研究，并大大发展了柯西的工作，同时在1884年的"大学授课资格论文"中，他还尽可能地对狄里克雷关于一元实变函数展开为三角级数问题的部分解进行了推广。

黎曼在这两方面的工作给汉克尔（Hankerl）留下了深刻印象。在1870年的一篇论文中，汉克尔企图揭示，一元实变函数理论必然导致某些限制和扩充，而正由于这些限制和扩充，人们才开始了实变函数黎曼理论的相关研究。汉克尔的这些工作，使他赢得了一元实变函数理论奠基人的称号。大约与此同时，在黎曼的"大学授课资格论文"的直接影响下，海涅（Heine）也开始对三角级数进行一系列新的研究。

正是在格奥尔格·康托研究了汉克尔的论文并将它应用于三角级数展开的唯一性定理后，我们才最终见到康托无理数概念和关于点集或数集的"导集"概念，而导集概念是魏尔斯特拉斯为了严格处理他在柏林关于解析函数的讲座中提出的某些基本问题

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com