高等学校教学参考书

高等代数

下册

张禾瑞　郝鈵新　编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

高等代数

下册

（第二版）

张禾瑞　郝鈵新　编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

高 等 代 数

下 册

张禾瑞 郝钢新 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 4.875 字数 117,000

1956年第1版

1979年6月第2版 1980年6月第2次印刷

印数 70,001—95,000 册

书号 13012·0365 定价 0.37 元

目　录

第六章 向量空间

在这一章里，我们将介绍向量空间的概念．向量空间是最基本的数学概念之一，它的理论和方法已经渗透到自然科学，工程技术的各个领域．在向量空间的讨论中，我们也将加深对于线性方程组和矩阵的理解．

6.1 定义和例子

在解析几何里，我们已经见到平面或空间的向量．两个向量可以相加，也可以用一个实数去乘一个向量．这种向量的加法以及数与向量的乘法满足一定的运算规律．向量空间正是解析几何里向量概念的一般化．

定义 1 令 F 是一个数域．F 中的元素用小写拉丁字母 $a, b, c, \cdots$ 来表示．令 V 是一个非空集合．V 中元素用小写希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 来表示．我们把 V 中的元素叫做向量而把 F 中的元素叫做纯量．如果下列条件被满足，就称 V 是 F 上一个向量空间：

1° 在 V 中定义了一个加法．对于 V 中任意两个向量 α, β，有 V 中一个唯一确定的向量与它们对应，这个向量叫做 α 与 β 的和，并且记作 $\alpha+\beta$.

2° 有一个"纯量乘法"．对于 F 中每一个数 a 和 V 中每一个向量 α，有 V 中唯一确定的向量与它们对应，这个向量叫做 a 与 α 的积，并且记作 $a\alpha$.

3° 向量的加法和纯量乘法满足下列算律：

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

3) 在V中存在一个零向量，记作0，它具有以下性质：对于V中每一个向量α，都有$0+\alpha=\alpha$；

4) 对于V中每一向量α，在V中存在一个向量α'，使得$\alpha+\alpha'=0$. 这样的α'叫做α的负向量；

5) $a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta$；

6) $(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha$；

7) $(ab)\alpha=a(b\alpha)$；

8) $1\alpha=\alpha$，

这里α, β, γ是V中任意向量，而a, b是F中任意数.

例1 在解析几何里，平面或空间中从一个定点引出的一切向量对于向量的加法和实数与向量的乘法来说都作成实数域上的向量空间. 前者用V_2表示，后者用V_3表示.

例2 数域F上一切m行n列矩阵所成的集合对于矩阵的加法和数与矩阵的乘法来说作成F上一个向量空间.

特别，F上一切1行n列矩阵所成的集合和一切n行1列矩阵所成的集合分别作成F上向量空间. 前者称为F上n元行空间，后者称为F上n元列空间. 我们用同一个符号F^n来表示这两个向量空间.

例3 复数域$\boldsymbol{C}$可以看成实数域$\boldsymbol{R}$上的向量空间.

事实上，两个复数的和还是一个复数；一个实数与一个复数的乘积还是一个复数. 条件3°，1）—8）显然都被满足.

例4 任意数域F总可以看成它自身上的向量空间.

例5 数域F上一元多项式环$F[x]$对于多项式的加法和数与多项式的乘法来说作成F上一个向量空间.

例6 定义在闭区间$[a, b]$上一切连续实函数的全体作成实数域$\boldsymbol{R}$上一个向量空间. 事实上，两个这样的函数的和以及一个实数与这样一个函数的乘积仍是$[a, b]$上的连续函数. 条件3°，

1)—8) 显然成立. 我们把这个向量空间用 $C[a,b]$ 来表示.

例 7 考虑收敛于 0 的实数无穷序列. 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个这样的序列. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. 设 a 是任意实数. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}aa_n=a\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 容易验证, 条件 3°, 1)—8) 成立. 因此, 一切收敛于 0 的实序列对于如上定义的加法和数与序列的乘法来说作成实数域 $\boldsymbol{R}$ 上一个向量空间.

向量空间的例子是大量的, 仅从以上这些例子也足可以看出, 向量空间的涵义是多么广泛.

我们现在从向量空间的定义出发, 来推导一些简单的性质.

由于向量的加法满足结合律(3°, 2)), 可以推出, 任意 n 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 相加有完全确定的意义. 我们按通常的习惯把这唯一确定的和记作

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

再者, 由于加法满足结合律(3°, 2))和交换律(3°, 1)), 在求任意 n 个向量的和时可以任意交换被加项的次序.

根据零向量和负向量的定义, 可以推出

命题 6.1.1 *在一个向量空间 V 里, 零向量是唯一的; 对于 V 中每一向量 α, α 的负向量是由 α 唯一确定的.*

证 先证零向量的唯一性. 设 0 和 $0'$ 都是 V 的零向量. 那么对于 V 中任意向量 α 都有 $0+\alpha=\alpha$, $\alpha+0'=\alpha$. 于是

$$0=0+0'=0'.$$

现在设 α' 和 α'' 都是 α 的负向量. 那么 $\alpha'+\alpha=0$, $\alpha+\alpha''=0$. 于是

$$\alpha'=\alpha'+0=\alpha'+(\alpha+\alpha'')=(\alpha'+\alpha)+\alpha''=0+\alpha''=\alpha''. \qquad \square$$

我们把向量 α 的唯一的负向量记作 $-\alpha$. 这样, 对于任意向量 α, 都有

$$\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0.$$

我们定义向量 α 与 β 的差为 $\alpha+(-\beta)$，并且记作 $\alpha-\beta$. 这样一来，在一个向量空间里，加法的逆运算——减法可以实施，并且有

(1) $$\alpha+\beta=\gamma\Longleftrightarrow\alpha=\gamma-\beta.$$

这就是说，在一个向量空间里，通常的迁项变号规则成立.

现在来看纯量乘法. 我们有

命题 6.1.2 对于任意向量 α 和数域 F 中任意数 a，我们有

(2) $$0\alpha=a0=0.$$

(3) $$a(-\alpha)=(-a)\alpha=-a\alpha.$$

(4) $$a\alpha=0\Longrightarrow a=0 \text{ 或 } \alpha=0.$$

证 $$0\alpha=0\alpha+0=0\alpha+(0\alpha-0\alpha)=(0\alpha+0\alpha)-0\alpha$$
$$=(0+0)\alpha-0\alpha=0\alpha-0\alpha=0.$$

同理可证 $a0=0$. 所以(2)成立.

由(2)，我们有

$$a\alpha+a(-\alpha)=a(\alpha+(-\alpha))=a0=0.$$

这就是说，$a(-\alpha)$ 是 $a\alpha$ 的负向量. 所以 $a(-\alpha)=-a\alpha$. 同理可证 $(-a)\alpha=-a\alpha$. 这就证明了(3)式成立.

最后，设 $a\alpha=0$ 但 $a\neq0$. 那么

$$\alpha=1\alpha=\left(\frac{1}{a}a\right)\alpha=\frac{1}{a}(a\alpha)=\frac{1}{a}0=0.$$

所以(4)成立. □

以向量 α_{ij}, $i=1,\cdots,m$, $j=1,\cdots,n$, 为元素，可以排成一个 m 行 n 列矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix},$$

叫做一个向量矩阵．和数域上的矩阵一样，可以定义两个向量矩阵$(\alpha_{ij})_{mn}$与$(\beta_{ij})_{mn}$的和为$(\alpha_{ij}+\beta_{ij})_{mn}$. 另一方面，设$\alpha$是一个向量，$a$是一个数．我们约定$\alpha a=a\alpha$．在这样的约定下，设$\mathfrak{A}=(\alpha_{ij})_{mn}$是一个向量矩阵，$A=(a_{ij})_{np}$是一个纯量矩阵．我们可以象定义两个纯量矩阵的乘法那样来定义$\mathfrak{A}$与A的乘积

$$\mathfrak{A}A=(r_{ij})_{mp},$$

这里

$$r_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\alpha_{ik}.$$

根据向量的加法和纯量乘法所满足的算律，容易验证下列规则成立：

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{B}+\mathfrak{A};$$

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})+\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{C});$$

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})A=\mathfrak{A}A+\mathfrak{B}A;$$

$$\mathfrak{A}(A+B)=\mathfrak{A}A+\mathfrak{A}B;$$

$$\mathfrak{A}(AB)=(\mathfrak{A}A)B,$$

这里$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$表示向量矩阵，A, B表示纯量矩阵．

习　题

1. 令F是一个数域，在F^3里计算

(i) $\frac{1}{3}(2,0,-1)+(-1,-1,2)+\frac{1}{2}(0,1,-1)$;

(ii) $5(0,1,-1)-3\left(1,\frac{1}{3},2\right)+(1,-3,1)$.

2. 证明，如果

$$a(2,1,3)+b(0,1,2)+c(1,-1,4)=(0,0,0),$$

那么$a=b=c=0$.

3. 找出不全为零的三个有理数a, b, c（即a, b, c中至少有一个不是0），使得

$$a(1,2,2)+b(3,0,4)+c(5,-2,6)=(0,0,0).$$

4. 令 $\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1)$. 证明, $\boldsymbol{R}^3$ 中每一向量 α 可以唯一地表示为

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3$$

的形式, 这里 $a_1, a_2, a_3\in\boldsymbol{R}$.

5. 证明, 在数域 F 上向量空间 V 里, 以下算律成立:

(i) $a(\alpha-\beta)=a\alpha-a\beta$;

(ii) $(a-b)\alpha=a\alpha-b\alpha$,

这里 $a, b\in F$, $\alpha, \beta\in V$.

6. 证明, 数域 F 上一个向量空间如果含有一个非零向量, 那么它一定含有无限多个向量.

7. 证明, 对于任意自然数 n 和任意向量 α, 都有

$$n\alpha=\overbrace{\alpha+\cdots+\alpha}^{n\text{个}}.$$

8. 证明, 向量空间定义中条件 3°, 8) 不能由其余条件推出.

6.2 子空间

设 V 是数域 F 上一个向量空间. W 是 V 的一个非空子集. 对于 W 中任意两个向量 α, β, 它们的和 $\alpha+\beta$ 是 V 中一个向量. 一般说来, $\alpha+\beta$ 不一定在 W 内. 如果 W 中任意两个向量的和仍在 W 内, 那么就说, *W 对于 V 的加法是封闭的*. 同样, 如果对于 W 中任意向量 α 和数域 F 中任意数 a, $a\alpha$ 仍在 W 内, 那么就说, *W 对于纯量乘法是封闭的*.

定理 6.2.1 *设 W 是数域 F 上向量空间 V 的一个非空子集. 如果 W 对于 V 的加法以及纯量乘法是封闭的, 那么 W 本身也作成 F 上一个向量空间.*

证 W 对于 V 的加法以及纯量乘法的封闭性保证了向量空间定义里的条件 1°, 2° 成立. 3° 中的算律1), 2) 和算律 5), 6), 7), 8) 既然对于 V 中任意向量都成立, 自然对于 W 的向量也成立. 唯一需要验证的是 3° 中条件 3) 和 4). 由 W 对于纯量乘法的封闭性和命题 6.1.2, 对于 $\alpha\in W$, $0=0\alpha\in W$, 所以 V 中的零向量属于

W，它自然也是W的零向量，并且$-\alpha=(-1)\alpha\in W$. 因此条件3)，4)也成立. □

定义1 令W是数域F上向量空间V的一个非空子集. 如果W对于V的加法以及纯量乘法来说是封闭的，那么就称W是V的一个子空间.

由定理6.2.1，V的一个子空间也是F上一个向量空间，并且一定含有V的零向量.

例1 向量空间V总是它自身的一个子空间. 另一方面，单独一个零向量所成的集合$\{0\}$显然对于V的加法和纯量乘法是封闭的，因而也是V的一个子空间，称为零子空间.

一个向量空间V本身和零空间叫做V的平凡子空间. V的非平凡子空间叫做V的真子空间.

例2 在空间V_2里，平行于一个固定直线的一切向量作成V_2的一个子空间. 在空间V_3里，平行于一个固定直线或一个固定平面的一切向量分别作成V_3的子空间(6.1，例1).

例3 F^n中一切形如

$$(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 0), a_i\in F$$

的向量作成F^n的一个子空间.

例4 $F[x]$中次数不超过一个给定的整数n的多项式全体连同零多项式一起作成$F[x]$的一个子空间.

例5 闭区间$[a, b]$上一切可微分函数作成$C[a, b]$的一个子空间.

定理6.2.2 向量空间V的一个非空子集W是V的一个子空间，必要且只要对于任意a，$b\in F$和任意α，$\beta\in W$，都有$a\alpha+b\beta\in W$.

证 如果W是子空间，那么由于W对于纯量乘法是封闭的，所以对于$a, b\in F$，$\alpha, \beta\in W$，都有$a\alpha\in W$，$b\beta\in W$. 又因为W对于V的

加法是封闭的，所以 $a\alpha+b\beta\in W$.

反过来，如果对于任意 $a, b\in F$, $\alpha, \beta\in W$, 都有 $a\alpha+b\beta\in W$, 取 $a=b=1$, 就有 $\alpha+\beta\in W$; 取 $b=0$, 就有 $a\alpha\in W$. 这就证明了 W 对于 V 的加法以及纯量乘法的封闭性. □

我们常要考虑子空间的**交**与**和**的概念.

设 W_1, W_2 是向量空间 V 的两个子空间. 那么它们的交 $W_1\cap W_2$ 也是 V 的一个子空间. 事实上，由于 W_1, W_2 都含有 V 的零向量，所以 $W_1\cap W_2\neq\phi$. 设 $a, b\in F$, $\alpha, \beta\in W_1\cap W_2$, 那么由于 W_1, W_2 都是子空间，所以 $a\alpha+b\beta\in W_1$, $a\alpha+b\beta\in W_2$, 因此 $a\alpha+b\beta\in W_1\cap W_2$. 由定理 6.2.2, $W_1\cap W_2$ 是子空间.

一般，设 $\{W_i\}$ 是向量空间 V 的一组子空间(个数可以有限，也可以无限). 令 $\bigcap\limits_i W_i$ 表示这些子空间的交. 如同上面一样可以证明，$\bigcap\limits_i W_i$ 也是 V 的一个子空间.

作为子集的两个子空间 W_1 与 W_2 的并集，一般说来不是子空间. 现在考虑 V 的子集

$$W_1+W_2=\{\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1\in W_1, \alpha_2\in W_2\}.$$

由于 $0\in W_1$, $0\in W_2$, 所以 $0=0+0\in W_1+W_2$, 因此 $W_1+W_2\neq\phi$. 设 $a, b\in F$, $\alpha, \beta\in W_1+W_2$. 那么 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta=\beta_1+\beta_2$, $\alpha_1, \beta_1\in W_1$, $\alpha_2, \beta_2\in W_2$. 因为 W_1, W_2 都是子空间，所以 $a\alpha_1+b\beta_1\in W_1$, $a\alpha_2+b\beta_2\in W_2$. 于是

$$\begin{aligned} a\alpha+b\beta &= a(\alpha_1+\alpha_2)+b(\beta_1+\beta_2) \\ &= (a\alpha_1+b\beta_1)+(a\alpha_2+b\beta_2)\in W_1+W_2. \end{aligned}$$

这就证明了 W_1+W_2 是 V 的子空间. 这个子空间叫做 W_1 与 W_2 的**和**.

两个子空间的和的概念也可以推广到任意有限多个子空间的情形. 设 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 是 V 的子空间. 容易证明，一切形如

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i, \alpha_i \in W_i$ 的向量作成 V 的一个子空间. 这个子空间称为子空间 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 的和, 并且用符号 $W_1+W_2+\cdots+W_n$ 来表示.

习　题

1. 判断 R^n 中下列子集哪些是子空间:

(i) $\{(a_1, 0, \cdots, 0, a_n) \mid a_1, a_n \in R\}$;

(ii) $\left\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\right\}$;

(iii) $\left\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\right\}$;

(iv) $\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in Z, i=1, \cdots, n\}$.

2. 令 $M_n(F)$ 表示数域 F 上一切 n 阶矩阵所组成的向量空间(参看6.1, 例2). 令

$$S=\{A \in M_n(F) \mid A'=A\},$$
$$T=\{A \in M_n(F) \mid A'=-A\}.$$

证明, S 和 T 都是 $M_n(F)$ 的子空间, 并且

$$M_n(F)=S+T, S \cap T=\{0\}.$$

3. 设 W_1, W_2 是向量空间 V 的子空间. 证明, 如果 V 的一个子空间既包含 W_1 又包含 W_2, 那么它一定包含 W_1+W_2. 在这个意义下, W_1+W_2 是 V 的既含 W_1 又含 W_2 的最小子空间.

4. 设 W, W_1, W_2 都是向量空间 V 的子空间, 其中 $W_1 \subseteq W_2$ 且 $W \cap W_1 = W \cap W_2$, $W+W_1=W+W_2$. 证明 $W_1=W_2$.

5. 设 W_1, W_2 是数域 F 上向量空间 V 的两个子空间. α, β 是 V 的两个向量, 其中 $\alpha \in W_2$, 但 $\alpha \notin W_1$, 又 $\beta \notin W_2$. 证明:

(i) 对于任意 $k \in F$, $\beta+k\alpha \notin W_2$;

(ii) 至多有一个 $k \in F$, 使得 $\beta+k\alpha \in W_1$.

6. 设 $W_1, W_2, \cdots, W_r$ 是向量空间 V 的子空间, 且 $W_i \neq V$, $i=1, \cdots, r$. 证明, 存在一个向量 $\xi \in V$, 使得 $\xi \notin W_i$, $i=1, \cdots, r$.

[提示: 对 r 作数学归纳法并且利用第5题的结果.]

6.3 向量的线性相关性

在研究向量空间时，向量的线性关系起着极为重要的作用. 在这一节里，我们将研究这种线性关系.

以下谈到向量空间，都指的是某一给定数域 F 上的向量空间.

定义 1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的 r 个向量，$a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是数域 F 中任意 r 个数. 我们把和

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_r\alpha_r$$

叫做向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的一个线性组合.

如果 V 中某一向量 α 可以表成向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的线性组合，我们也说 α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示.

例如，在 $\boldsymbol{R}^3$ 里，取

$$\alpha_1=(1,-1,0),\ \alpha_2=(0,2,1),\ \alpha_3=(1,-1,2).$$

那么

$$\begin{aligned}2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3&=2(1,-1,0)-(0,2,1)+3(1,-1,2)\\&=(5,-7,5).\end{aligned}$$

所以向量 $(5,-7,5)$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

零向量显然可以由任意一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，因为 $0=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_r$.

线性组合的概念和以下的线性相关的概念有密切的关系.

定义 2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的 r 个向量. 如果存在 F 中不全为零的数 $a_1, a_2, \cdots, a_r$，使得

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_r\alpha_r=0, \tag{1}$$

那么就说 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关.

如果不存在 F 中不全为零的数 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 使得等式 (1) 成立，换句话说，等式 (1) 仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_r=0$ 时才成立，那么就说，向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

空集永远认为是线性无关的.

根据这个定义，如果向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 中有一个是零向量，那么 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 一定线性相关. 事实上，例如，设 $\alpha_1=0$. 那么

$$1\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_r=0,$$

其中 α_1 的系数不等于零.

特别，单独一个零向量线性相关.

单独一个非零向量 $\{\alpha\}$ 线性无关，因为由 $a\alpha=0$ 而 $\alpha\neq0$，必有 $a=0$.

例 1 令 F 是任意一个数域. F^3 中向量

$$\alpha_1=(1, 2, 3), \alpha_2=(2, 4, 6), \alpha_3=(3, 5, -4)$$

线性相关，因为我们有

$$2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_3=0.$$

另一方面，向量

$$\beta_1=(1, 0, 0), \beta_2=(1, 1, 0), \beta_3=(1, 1, 1)$$

线性无关. 事实上，如果 $a_1, a_2, a_3\in F$，使得

$$a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3=0,$$

即

$$a_1(1, 0, 0)+a_2(1, 1, 0)+a_3(1, 1, 1)=(0, 0, 0),$$

那么

$$(a_1+a_2+a_3, a_2+a_3, a_3)=(0, 0, 0),$$

因而就有 $a_1+a_2+a_3=0, a_2+a_3=0, a_3=0$. 由此就得出 $a_1=a_2=a_3=0$.

例 2 判断 F^3 的向量

$$\alpha_1=(1, -2, 3), \alpha_2=(2, 1, 0), \alpha_3=(1, -7, 9)$$

是否线性相关.

等式

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3=0$$

相当于

$$(a_1+2a_2+a_3, -2a_1+a_2-7a_3, 3a_1+9a_3)=(0, 0, 0),$$

而上式相当于齐次线性方程组

$$\begin{aligned} a_1+2a_2+a_3&=0, \\ -2a_1+a_2-7a_3&=0, \\ 3a_1 \qquad +9a_3&=0. \end{aligned}$$

这个齐次线性方程组的解是 $a_1=-3a_3$, $a_2=a_3$, a_3 为自由未知量. 任意给定 a_3 一个不等于零的值, 例如, 取 $a_3=1$, 得 $a_1=-3$, $a_2=1$. 那么就有

$$-3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0.$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

例 3 在向量空间 $F[x]$ 里, 对于任意非负整数 n,

$$1, x, \cdots, x^n$$

线性无关, 因为由 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 必然有 $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$.

我们现在直接从定义推导出以下一些简单事实.

命题 6.3.1 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ 中每一个向量 α_i 都可以由这一组向量线性表示.

证 这是明显的, 因为

$$\alpha_i=0\alpha_1+\cdots+0\alpha_{i-1}+\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\cdots+0\alpha_r. \qquad \square$$

命题 6.3.2 如果向量 γ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性表示, 而每一 β_i 又都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示, 那么 γ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示.

证 由 $\gamma=\sum_{i=1}^{r} b_i\beta_i$ 和 $\beta_i=\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\alpha_j$, $i=1, \cdots, r$, 得

$$\gamma=\sum_{i=1}^{r} b_i \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\,\alpha_j=\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r} b_i a_{ij}\right)\alpha_j. \qquad \square$$

命题 6.3.3 如果向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$线性无关，那么它的任意一部分也线性无关. 一个等价的提法是：如果向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$有一部分向量线性相关，那么整个向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$也线性相关.

证 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$中有$p$个向量线性相关. 不妨假设前$p$个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$线性相关. 那么存在$F$中不全为零的数$a_1, a_2, \cdots, a_p$, 使得

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_p\alpha_p=0.$$

取$a_{p+1}=\cdots=a_r=0$. 那么

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_p\alpha_p+0\alpha_{p+1}+\cdots+0\alpha_r=0,$$

而$a_1, a_2, \cdots, a_p$不全为零. 所以$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性相关. □

命题 6.3.4 设向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$线性无关，而$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta\}$线性相关. 那么$\beta$一定可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示.

证 因为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$线性相关，所以存在不全为零的数$a_1, a_2, \cdots, a_r, b$, 使得

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_r\alpha_r+b\beta=0.$$

如果$b=0$, 那么上面的等式变成

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_r\alpha_r=0,$$

并且$a_1, a_2, \cdots, a_r$中至少有一个不等于零，这与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关的假设矛盾. 因此$b\neq0$, 从而

$$\beta=-\frac{a_1}{b}\alpha_1-\frac{a_2}{b}\alpha_2-\cdots-\frac{a_r}{b}\alpha_r. \qquad \square$$

下面的定理说明线性相关和线性组合这两个概念之间的密切关系.

定理 6.3.5 向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性相关，必要且只要其中某一个向量是其余向量的线性组合.

证 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性相关. 于是存在$a_1, a_2, \cdots, a_r\in F$,