

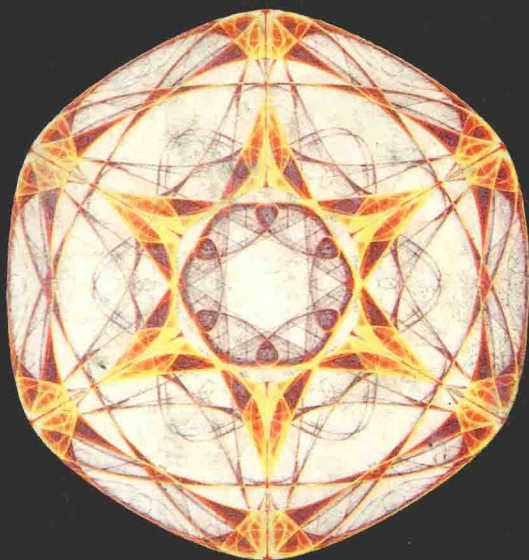
中学数学

ZHONGXUE SHUXUE JIETI CIDIAN

解题词典

下册

上海教育出版社



中学数学解题词典

ZHONGXUE SHUXUE JIETI CIDIAN

上海教育出版社

下册

图书在版编目 (C I P) 数据

中学数学解题词典. 下册 / 唐盛昌, 胡仲威, 奚定华
主编. —上海: 上海教育出版社, 2000. 9
ISBN 7-5320-6602-9

I. 中... II. ①唐... ②胡... ③奚... III. 数学-解
题-中学-词典 IV. G634. 605

中国版本图书馆CIP数据核字 (2000) 第16724号

中学数学解题词典

下 册

唐盛昌 胡仲威 奚定华 主编

上海世纪出版集团 出版发行
上海教育出版社

(上海永福路123号 邮政编码: 200031)

上海新华书店经销 上海市印刷三厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 30 插页 4 字数 1,065,000

2000年9月第1版 2000年9月第1次印刷

印数 1—8,200本

ISBN 7-5320-6602-9/G · 6757 定价: (特精) 52.70元

平面几何篇

主编

唐盛昌

编者 (按姓名笔划排序,下同)

王伟庆 陆建新 唐盛昌 徐岳灿

立体几何篇

主编

胡仲威

编者

杨兴中 胡仲威 钱民广 傅元培

解析几何篇

主编

奚定华

编者

奚定华

前 言

解数学题既是数学学习的重要环节,又是检验数学学习成效的重要手段.虽然数学题的题型广泛,变化万千,没有一成不变的方法可循,但可以说,中学阶段的不少数学题是一些基本类型的题及其发展变化构成的题.本书就是作者对中学数学解题规律的整理和总结.

本书按中学阶段数学教学的内容分篇、分册编写,其中上册是代数、三角、微积分初步等三篇,下册是平面几何、立体几何、解析几何等三篇.每篇再按其内容分若干单元编写.

本书的选题遵循如下要求:

1. 深广度.以初、高中数学的内容、要求为主要标准.数学竞赛题原则上不考虑,使所选题目能为教学所用.

2. 题型和题量.题型要尽量全面、典型,包含基本题,变化题,综合题,开放题;题量要少而精,不选或少选重复题型的题.

本书的显著特点是通过解题后的“说明”,对各类题型的解题思想、方法和解题技巧进行归纳;对易混淆的题型进行分析,指出其相同点和不同点;对解题中易犯的错误进行分析,提出注意点.读者在使用本书中,务请注意阅读这些说明.

由于本书的量大面积广,在题型分类、总结等方面,也有不尽完善的地方,恳请广大读者提出批评、建议.

本书编写组

目 录

平面几何篇

一、直线和角	3
§ 1 直线、射线、线段和角	3
1. 直线、射线和线段的概念及计算	3
2. 角的概念及计算	7
§ 2 相交线和平行线	8
1. 相交线、垂线	8
2. 平行线的判定与性质	11
二、三角形	15
§ 1 三角形的有关概念	15
1. 三角形边、角间的关系	15
2. 三角形的角平分线、中线和高的	18
3. 三角形的中位线定理	22
4. 三角形的面积	24
5. 三角形的作图	27
§ 2 全等三角形	30
1. 全等三角形的判定	30
2. 全等三角形的性质及应用	32
§ 3 等腰、等边和直角三角形	38
1. 等腰三角形、等边三角形的判定	38
2. 等腰三角形、等边三角形的性质及应用	41
3. 直角三角形的判定	44

4. 直角三角形的性质及应用	47
三、四边形	52
§ 1 多边形的概念	52
§ 2 平行四边形	55
1. 平行四边形的判定	55
2. 平行四边形的性质及应用	58
§ 3 矩形、菱形和正方形	62
1. 矩形、菱形、正方形的判定	62
2. 矩形、菱形和正方形的性质及应用	66
§ 4 梯形和等腰梯形	74
1. 梯形、等腰梯形的判定	74
2. 梯形、等腰梯形的性质及应用	77
§ 5 四边形的面积	85
四、相似形	92
§ 1 比例线段	92
1. 平行线与比例线段	92
2. 三角形内、外角平分线	99
§ 2 相似三角形	103
1. 相似三角形的判定	103
2. 相似三角形的性质及应用	106
§ 3 相似多边形、位似形	113
五、圆	120
§ 1 圆的基本性质	120

1. 圆的概念	120
2. 垂径定理	123
3. 圆心角、弧、弦与弦心距 之间的关系	127
4. 圆周角定理	130
5. 圆内接三角形	134
6. 圆内接四边形	137
§2 直线和圆的位置关系 ..	142
1. 切线的判定	142
2. 切线的性质定理	146
3. 切线长定理	149
4. 弦切角定理	152
5. 相交弦定理	155
6. 切割线定理	158
7. 三角形和四边形的内切圆	162
§3 两圆的位置关系	168
1. 两圆位置关系的判定 ..	168
2. 两圆连心线的性质及其 应用	172
3. 两圆公切线的性质及其 应用	176
4. 相交两圆的公共弦的性 质及其应用	180
5. 正多边形与圆	183
§4 轨迹和作图	186
1. 有关圆的轨迹问题	186
2. 有关圆的作图问题	190

立体几何篇

一、直线与平面	199
§1 平面的基本性质	199
1. 共面问题	199
2. 共线问题	204
3. 共点问题	205

4. 多面体截面的确定	208
§2 空间的直线与直线	212
1. 直线与直线的平行	212
2. 异面直线	220
3. 直线与直线的垂直	237
§3 空间的直线与平面	243
1. 直线与平面的平行	243
2. 直线与平面的垂直	255
3. 直线与平面所成的角 ..	265
§4 空间的平面与平面	283
1. 平面与平面的平行	283
2. 平面与平面的垂直	296
3. 二面角	305
4. 平面图形的折叠	324
§5 与直线与平面有关的其他 问题	334

二、多面体

§1 棱柱	347
1. 棱柱的基本概念和性质	347
2. 棱柱中的线面关系	348
3. 棱柱的侧面积	351
4. 棱柱的体积	362
5. 棱柱的截面	372
§2 棱锥	380
1. 棱锥的基本概念和性质	380
2. 棱锥中的线面关系	381
3. 棱锥的侧面积	393
4. 棱锥的体积	404
5. 棱锥的截面	421
§3 棱台	439
1. 正棱台的基本概念和性质	439
2. 正棱台中的线面关系 ..	440

3. 棱台的侧面积	446
4. 棱台的体积	451
5. 棱台的截面	455
三、旋转体	458
§1 圆柱	458
1. 圆柱的基本概念和性质	458
2. 圆柱中的线、面关系	460
3. 圆柱的侧面	466
4. 圆柱的体积	469
5. 圆柱与多面体的相切与相接	472
§2 圆锥	475
1. 圆锥的基本概念和性质	475
2. 圆锥中的线、面关系	477
3. 圆锥的侧面	482
4. 圆锥的体积	488
5. 圆锥与多面体相切与相接	496
6. 圆锥与圆柱或圆锥相接	499
§3 圆台	502
1. 圆台的基本概念与性质	502
2. 圆台中的线面关系	506
3. 圆台的侧面积	509
4. 圆台的体积	514
§4 球	518
1. 球的基本概念与性质	518
2. 球中的线面关系	520
3. 球的表面积	522
4. 球的体积	525
5. 球与多面体相接与相切	527

6. 球与其他旋转体相接与相切	534
7. 关于地球的实际问题	538
8. 多球问题	542

解析几何篇

一、曲线和方程	549
§1 有向线段	549
§2 平面直角坐标系	550
1. 点的坐标	550
2. 两点的距离	553
3. 线段的定比分点	559
4. 直线的倾斜角和斜率	568
§3 极坐标系	576
1. 点的极坐标	576
2. 极坐标和直角坐标的互化	580
§4 曲线的方程	581
1. 曲线方程的概念	581
2. 曲线方程的求法	589
3. 曲线方程的互化	618
4. 两条曲线的交点	631
二、直线	635
§1 直线方程	635
1. 直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式和一般式	635
2. 直线的参数方程	657
3. 直线的极坐标方程	661
§2 两条直线的位置关系	663
1. 两条直线平行、相交或重合	663
2. 两条直线垂直	667
3. 三线共点	668
4. 两条直线的夹角	671

5. 点到直线的距离	678	1. 椭圆的长轴、短轴、焦点、 顶点、离心率和准线	801
6. 直线的对称变换	680	2. 双曲线的实轴、虚轴、焦 点、顶点、离心率、准线 和渐近线	803
§ 3 有关直线的最大值、最小 值问题	685	3. 抛物线的焦点和准线 ...	805
§ 4 与直线有关的证明问题	697	4. 圆锥曲线的焦半径	807
1. 证明线段相等	697	§ 3 直线和圆锥曲线的关系	810
2. 证明角相等	699	1. 直线和圆锥曲线的位置 关系	810
3. 证明线段的和差关系 ...	701	2. 圆的切线方程	822
4. 证明线段比例关系	703	3. 圆锥曲线的弦	831
5. 证明两条直线互相平行	705	4. 关于直线对称的圆锥曲 线的问题	849
6. 证明两条直线互相垂直	707	§ 4 两条圆锥曲线的关系 ...	855
7. 证明三点共线	709	§ 5 圆锥曲线系	861
8. 证明三线共点	711	1. 讨论圆锥曲线系中圆锥曲 线的形状和位置	861
9. 证明定值问题	713	2. 圆锥曲线系中圆锥曲线的 中心或顶点的轨迹	864
§ 5 与直线有关的轨迹问题	715	3. 证明圆锥曲线系中的曲线 过定点	867
§ 6 与直线有关的其他问题	730	4. 利用圆锥曲线系求圆锥曲 线的方程	869
三、圆锥曲线	746	5. 求圆系的公切线方程 ...	875
§ 1 圆锥曲线的定义和方程	746	§ 6 利用坐标轴平移化简二 元二次方程	876
1. 圆的方程	746	1. 利用坐标轴平移化简方程 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey$ $+ F = 0$	876
2. 椭圆、双曲线和抛物线 定义的应用	765	2. 求圆锥曲线 $Ax^2 + Cy^2 +$ $Dx + Ey + F = 0$ 的焦 点、顶点、离心率和准线	878
3. 椭圆、双曲线和抛物线 的标准方程	771		
4. 对称轴平行于坐标轴的 椭圆、双曲线和抛物线 的方程	792		
5. 椭圆、双曲线和抛物线 的极坐标方程	797		
§ 2 圆锥曲线的性质	801		

§ 7 圆锥曲线的证明问题	880
§ 8 圆锥曲线的轨迹问题	900
1. 动圆圆心的轨迹问题	900
2. 圆锥曲线弦的中点的轨迹问题	903
3. 经过定点且与圆锥曲线相交的动直线上的动点的轨迹	908
4. 斜率为定值且与圆锥曲线相交的动直线上的动点的轨迹	909
5. 两条动直线交点的轨迹	910
6. 动多边形的顶点轨迹	913
§ 9 圆锥曲线中的最大值和	

最小值问题	914
1. 用配方法解最大值和最小值问题	914
2. 用判别式法解最大值和最小值问题	918
3. 利用三角函数有界性解最大值和最小值问题	919
4. 利用基本不等式解最大值和最小值问题	921
5. 利用平面几何知识解最大值和最小值问题	923
6. 条件极值的问题	924
附录 数学定理、公式	927

平面几何篇

一、直线和角

§ 1 直线、射线、线段和角

1. 直线、射线和线段的概念及计算

1. 选择题:下列语句中,表达正确的是 ()

(A) 延长直线 AB 到 C , 使 $BC = AB$;

(B) 延长射线 AB 交直线 l 于点 C ;

(C) 延长线段 AB 到 C , 使 $BC = AB$;

(D) 延长线段 AB 到 C , 使 $AC = BC$.

解 直线向两方无限延伸,射线向一方无限延伸,不需要再“延长”,故(A)、(B)的表达不确切.

线段的延长是有方向的,延长线段 AB 到 C , 必有 $AC > BC$, 故(D)中的 $AC = BC$ 不能成立,而(C)中的 $BC = AB$ 可成立.

因此,本题应该选择(C).

说明 (1) 尽管在图示直线、射线时,只能画出有限的长度,但我们仍要认定直线、射线有延伸性,是可以无限延长的.

(2) 一般地说,线段 AB 是没有方向的,仅当谈到“延长线段 AB ”时,才规定延长是沿着从 A 到 B 的方向进行的.

2. 如图,一条直线上顺次有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五个点,已知 $AB = BC - AB = CD - BC = DE - CD = 2\text{cm}$, 问以这五个点中的两个点为端点的线段共有几种不同的长度?



解 共有 9 种不同的长度.

AB 2	AC 6	AD 12	AE 20
	BC 4	BD 10	BE 18
		CD 6	CE 14
			DE 8

根据已知条件可知, $AB = 2\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $CD = 6\text{cm}$, $DE = 8\text{cm}$, 所有的线段及其对应的线段长度可列表如上.

由上表可以看出, 10 条线段中共有 9 种不同的长度.

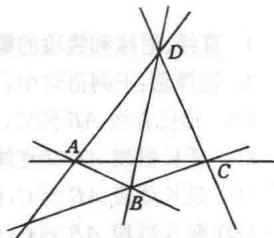
说明 线段的不同与线段的长度不同是两个概念, 线段的不同一般是指线段间不同的位置关系, 而线段的长度是线段的度量值, 它与线段的位置无关.

3. 平面上有四个点, 其中任意三点不在同一条直线上, 经过每两个点画一条直线, 问一共可画出几条直线?

解 如图, A 、 B 、 C 、 D 是平面上四个点, 其中任意三点均不在同一条直线上.

$\therefore$ 过点 A 的直线有 AB 、 AC 、 AD , 过点 B 与直线 AB 不重合的直线有 BC 、 BD , 过点 C 与直线 AC 、 BC 不重合的直线只有 CD ,

$\therefore$ 符合题意要求的直线一共有 6 条.



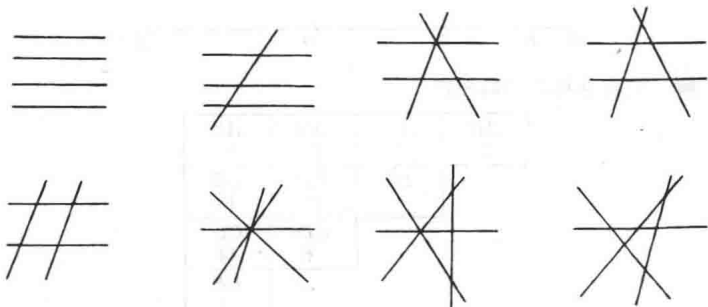
说明 (1) 此类题的解题依据是直线的一条公理: “两点确定一条直线”, 其一般解法是顺次从一点出发引过其他各点的直线, 每一点都与其后面的点连结成直线, 这样就能既不重复又不遗漏地数出所有直线的条数.

(2) 本题可推广到 n 个点的情况: 平面上有 n 个点, 其中任意三点不在同一条直线上, 经过每两个点画一条直线, 共可画直线的条数为:

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

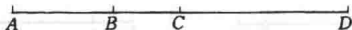
4. 平面上互不重合的四条直线的交点数的可能值有哪几种情况? 请画图说明.

解 平面上互不重合的四条直线的交点数的可能值为 0, 1, 3, 4, 5, 6, 根据四条直线中有无平行位置关系可画图如下:



说明 本题的解题依据是直线的一条公理：“两条直线相交，有且只有一个交点”。其解题思路是从直线的平行与相交的位置关系出发，将四条直线分成两类来考虑：一类是四条直线中有平行位置关系，如上面前五个图所示；另一类是四条直线中没有平行位置关系，如上面后三个图所示。分别在每一类中寻找交点的可能值，可防止解的遗漏。

5. 如图， B 、 C 是线段 AD 上的两点，且 $CD = \frac{5}{3}AB$ ， $AC = 40\text{cm}$ ， $BD = 56\text{cm}$ 。求线段 AD 的长。



解 设 AB 的长为 $x\text{cm}$ ， BC 的长为 $y\text{cm}$ ，依题意，得

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ \frac{5}{3}x + y = 56, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 24, \\ y = 16. \end{cases}$

$\therefore AD = AB + BD = 24 + 56 = 80(\text{cm})$ 。

说明 本题用了代数中的解方程组的方法来求线段的长，其优点是表达简洁、清晰，便于运算，是几何计算中的一种常用解题方法。

6. 已知线段 AB 的中点为 C 。

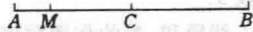
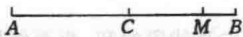
(1) 若点 M 为此线段上的任意一点，求证： $MC = \frac{1}{2}|AM - BM|$ ；

(2) 若点 M 在 AB 的延长线(或其反向延长线)上，求证： $MC = \frac{1}{2}(AM + BM)$ 。

解 (1) 如下左图，当点 M 位于线段 CB 上时，可得

$$\begin{cases} BM = CB - CM, & \text{①} \\ AM = AC + CM. & \text{②} \end{cases}$$

$\because AC = CB$ ，由 ② - ① 可得 $MC = \frac{1}{2}(AM - BM)$ 。



如上右图，当点 M 位于线段 AC 上时，可得

$$\begin{cases} BM = CB + CM, \\ AM = AC - CM. \end{cases}$$

同理可得 $MC = \frac{1}{2}(BM - AM)$.

综合上述结果可得 $MC = \frac{1}{2}|AM - BM|$.

(2) 如下左图, 当点 M 位于线段 AB 的延长线上时, 可得

$$\begin{cases} MC = CB + BM, \\ MC = AM - AC. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{③} \\ \text{④} \end{matrix}$$

$\because AC = CB$, 由 ③ + ④ 可得 $MC = \frac{1}{2}(AM + BM)$.



如上右图, 当点 M 位于线段 AB 的反向延长线上时, 可得

$$\begin{cases} MC = AM + AC, \\ MC = BM - CB. \end{cases}$$

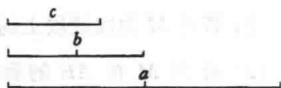
同理可得 $MC = \frac{1}{2}(AM + BM)$.

说明 中点是线段的一个常见的等分点. 本题的结论给出了一条线段 (或其延长线) 上的任一点到这条线段的中点与到两个端点的距离的一个等量关系.

7. 已知: 线段 a, b, c , 且 $a > b > c > \frac{1}{4}(a - b)$.

求作: 线段 x , 使它等于 $2c -$

$$\frac{1}{2}(a - b).$$



作法 $\because x = 2c - \frac{1}{2}(a - b)$

$$= 2c + \frac{b}{2} - \frac{a}{2},$$



$\therefore$ (1) 作射线 AM ;

(2) 在射线 AM 上顺次截取 $AB = 2c$, $BC = \frac{1}{2}b$;

(3) 以点 C 为端点, 在线段 AC 上, 截取 $CD = \frac{1}{2}a$, 则线段 AD 就是所求作的线段 x .

说明 线段和、差的作图顺序一般是先画线段的和, 再画线段的差. 若有括号可先画括号内的线段, 也可先去括号, 再按上述方法顺次画出要求作的线段.

2. 角的概念及计算

8. 已知一个锐角的余角是它的补角的 $\frac{1}{4}$ 还多 3° . 求这个锐角和它的补角的度数.

解 设这个锐角的度数为 x , 则它的余角为 $90^\circ - x$, 它的补角为 $180^\circ - x$.

依题意, 得 $90^\circ - x = \frac{1}{4}(180^\circ - x) + 3^\circ$.

解上述方程得 $x = 56^\circ$, $180^\circ - x = 124^\circ$.

$\therefore$ 这个锐角为 56° , 它的补角为 124° .

说明 有关互为余角、互为补角的计算问题, 常用 $90^\circ - x$ 、 $180^\circ - x$ 分别表示角 x 的余角和补角, 然后根据已知条件列方程求解.

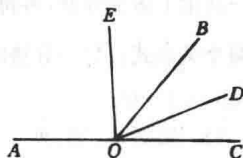
9. 已知 $\angle AOB$ 与 $\angle BOC$ 互为邻补角, OD 是 $\angle BOC$ 的平分线, OE 在 $\angle AOB$ 内, $\angle EOB = \frac{1}{2}\angle AOE$, $\angle EOD = 68^\circ$. 求 $\angle AOE$ 的度数.

解 如图, 设 $\angle AOB$ 的度数为 x , 则 $\angle BOC$ 的度数为 $180^\circ - x$, $\angle EOB = \frac{1}{3}x$, $\angle BOD = \frac{1}{2}(180^\circ - x)$.

依题意, 得 $\angle EOB + \angle BOD = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}(180^\circ - x) = 68^\circ$.

解上述方程得 $x = 132^\circ$.

$\therefore \angle AOE = \frac{2}{3}x = 88^\circ$.



说明 本题解题过程中需注意邻补角的概念. 一个角的邻补角, 既是这个角的邻角, 也是这个角的补角, 即两角之和为 180° . 画一个角的邻补角, 只要画出这个角的任一边的反向延长线, 它与这个角的另一边所组成的角, 即为此个角的邻补角.

10. 如图, 已知 AB 、 CD 都是直线, $\angle 1 = 120^\circ$, $\angle 2 = 21^\circ 36'$, OF 是 $\angle AOD$ 的平分线, 求 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 、 $\angle 5$ 、 $\angle 6$ 的度数.

解 $\because AB$ 是直线,
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$,
 即 $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2$
 $= 180^\circ - 120^\circ - 21^\circ 36'$
 $= 38^\circ 24'$.

$\because AB$ 、 CD 都是直线,

$\therefore \angle 2$ 和 $\angle 6$ 是对顶角,

