高等教育“十二五”规划教材

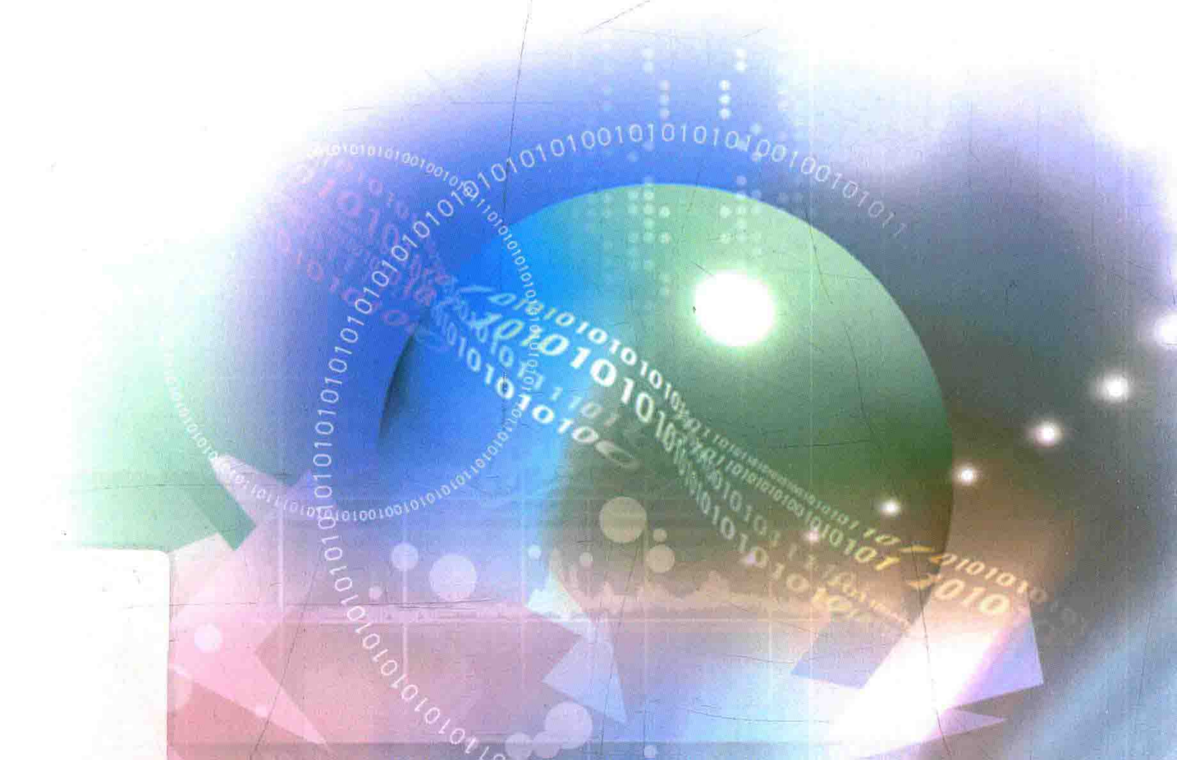
复变函数与积分变换

第二版

Fubian Hanshu Yu Jifen Bianhuan

主　编　冯卫兵
副主编　杨云锋　胡煜寒　夏小刚　李俊兵

中国矿业大学出版社



复变函数与积分变换

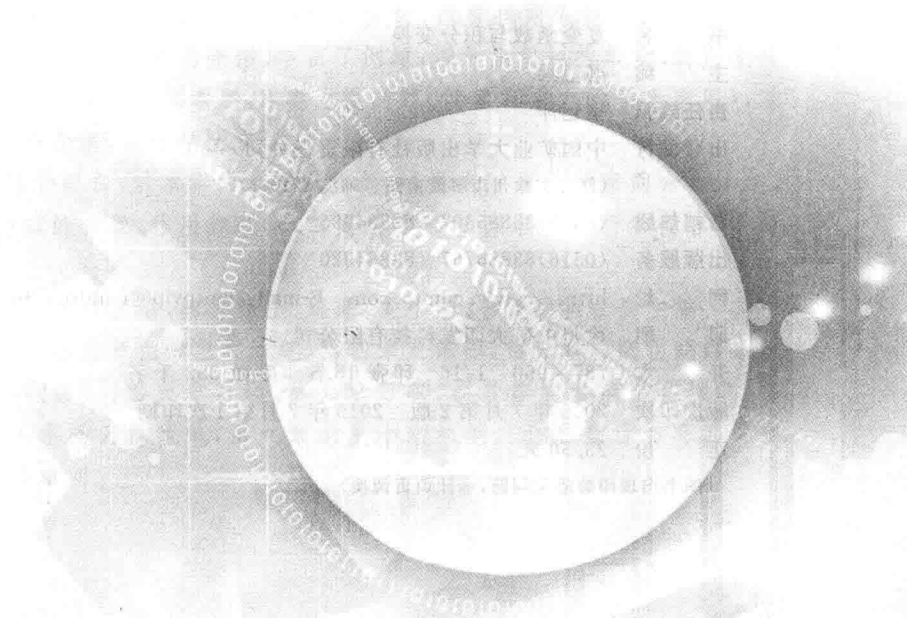
高等教育“十二五”规划教材

复变函数
与积分变换

Fubian Hanshu Yu Jifen Bianhuan

主　编　冯卫兵
副主编　杨云锋　胡煜寒　夏小刚　李俊兵

中国矿业大学出版社



内 容 提 要

本书是根据教育部高等院校复变函数与积分变换课程的基本要求，依据工科数学《复变函数与积分变换教学大纲》，结合本学科的发展趋势，在多年教学实践的基础上，融合国内外教材优点编写而成的。本书旨在培养学生的数学素质，提高其应用数学知识解决实际问题的能力，强调理论的应用性。本书体系严谨，逻辑性强，内容安排由浅入深，理论联系实际，讲授方式灵活。

本书共分九章，包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、Fourier 变换、Laplace 变换、复变函数与积分变换的数学实验。每章均配有习题，书末附有习题答案，以供学生参考。

本书可作为高等院校工科各专业，尤其是自动控制、通信、电子信息、测控、机械工程等专业教材，也可供科技工作者及工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/冯卫兵主编. —2 版. —徐州：中国矿业大学出版社，2015.7

ISBN 978-7-5646-2768-3

Ⅰ.①复… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 180679 号

书　　名　复变函数与积分变换
主　　编　冯卫兵
责任编辑　褚建萍
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
　　　　　（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本　787×960　1/16　**印张** 18.5　**字数** 352 千字
版次印次　2015 年 7 月第 2 版　2015 年 7 月第 1 次印刷
定　　价　28.50 元

前 言

复变函数与积分变换是高等院校工科各专业的一门重要的必修课，它不仅是其他数学课程的基础，也是物理、力学、电路等专业课程的基础，同时也是从事科学研究和工程设计的科研人员必备的数学工具之一。

本书是依据国家教育部审定的工科数学《复变函数与积分变换教学大纲》，结合本学科的发展趋势，在多年教学实践的基础上，融合国内外教材优点编写而成的。在编写的过程中始终遵循着“为专业课打好基础，培养学生的数学素质，提高其应用数学知识解决实际问题的能力”的原则。在内容的处理和编排上力争突出由浅入深，通俗易懂；突出重点，简明扼要；详略得当，系统性强等特色。具体特点如下：

1. 突出工程数学的基本思想与基本方法，淡化运算技巧，强调实际应用，以便学生在学习过程中能较好地掌握各部分内容，提高学生应用数学解决实际问题的能力。

2. 将复变函数、积分变换、工程数学实验三部分内容有机地结合在一起，对每章的编排次序进行了适当的调整，易于教师讲授。内容安排形成三个“台阶”：基本要求、巩固提高、实验应用。既注意到教材的可接受性，又为学生进一步学习现代工程数学知识提供一些“接口”。提高学生数值计算和数据处理能力。

3. 对内容进行了必要调整，去掉了对数留数、拉普拉斯方程变换的边值问题等内容，增加工程数学实验的介绍，丰富了例题，增加应用题的数量，特别是将习题分为A、B两类，A类为基本题，B类为提高题（供学有余力的学生选用），以增强学生学习的自由度，便于学生自学。

4. 各章前增加引言，对本章内容梗概作简述，章末附有数学家简介和小结，一是为了阐明内容的背景、作用和联系；二是为了帮助读者理解所学内容，掌握重点，总结提高。

本书由冯卫兵担任主编，杨云锋、胡煜寒、夏小刚、李俊兵担任副主编。其中第一章至第三章及第五章由冯卫兵执笔；第四章及第四、第五章习题由胡煜寒执笔；第六章及第一、第二、第三章习题、第六章习题、参考答案由李俊兵执笔；第七、第八章及附录由杨云锋执笔，第九章由夏小刚执笔。全书最后由冯卫兵统稿，由丁正生教授审阅。

本书在编写过程中得到了西安科技大学理学院数学系许多老师的大力支持和帮助，西安科技大学理学院的郭强、葛丹等老师对本书进行了仔细校对，西安科技大学丁正生教授、西北工业大学叶正麟教授给予了许多重要的指导，在此一并表示深深的谢意。

限于编者水平，书中难免存在缺点和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2015 年于西安

目 录

第一章　复数与复变函数

本章主要介绍复数及其基本运算、复平面上的曲线和区域、复变函数的概念以及复变函数的极限及其连续性.复数的相关理论在中学已作过初步介绍,比较容易理解.复变函数的概念、极限以及连续性是实变函数相关理论的推广,其理论思想和方法与实变函数相似.但由于复变函数理论是建立在复数域或复平面上的,因此与实变函数的理论又有所不同,应注意二者之间的相同点和不同点.

第一节　复数的概念及其基本运算

一、复数的概念

复数在实际中有广泛的应用,如电路分析中复电流和复电压都是用复数表示的.

人们规定 $i^2=-1$,其中 i 称为**虚数单位**.设 x 和 y 为任意实数,则称 $z=x+iy$ 为**复数**.其中 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**(real part)和**虚部**(imaginary part),分别记为

$$x=\mathrm{Re}\ z,\quad y=\mathrm{Im}\ z \tag{1.1}$$

当 $x=0,y\neq0$ 时,$z=iy$ 称为**纯虚数**;当 $y=0$ 时,有 $z=x+0i$ 为实数 x,简记为 $z=x$,因此复数可看做是实数的推广.

复数相等　设两个复数 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$,若 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$,则称两个复数 z_1 和 z_2 相等.换句话说,如果两个复数相等,则它们的实部和虚部分别相等.

两个复数相等的概念是非常重要的.

注意:与实数不同,一般说来,任意两个复数不能比较大小.

共轭复数　称实部相同而虚部相反的两个复数互为共轭复数.如果 $z=x+iy$,那么其共轭复数记为 $\bar{z}=x-iy$.如复数 $z=3+2i$,其共轭复数为 $\bar{z}=3-2i$.

共轭复数有如下性质:

(1) $\bar{\bar{z}}=z$;

(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$, $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(3) $z\bar{z}=|z|^2$;

(4) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\, z$, $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}\, z$.

这些性质作为练习,由读者自己使用随后讲的复数代数运算去证明.

二、复平面

由于一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数(x,y)唯一确定,它与 xOy 平面上的点(x,y)是一一对应的.因此在平面上可用坐标为(x,y)的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$(图 1.1),这是复数的一个常用表示方法.此时,x 轴称为实轴,y 轴称为虚轴,两轴所在的平面称为复平面或 z 平面.

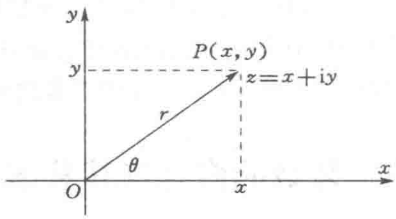


图 1.1

在复平面上,复数 z 还与从原点指向点 $z=x+\mathrm{i}y$ 的平面向量一一对应,因此复数 z 也可以用向量$\overrightarrow{OP}$来表示(图 1.1),向量的长度称为 z 的**模**或**绝对值**,记为

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.2}$$

显然当 $z=0$ 时,它为零向量;当 $y\neq0$ 时,点 $\bar{z}$ 和 z 关于实轴对称.

关于复数 z 的模有如下性质:

(1) $|x|\leqslant|z|$, $|y|\leqslant|z|$;

(2) $z\cdot\bar{z}=|z^2|=|z|^2$;

(3) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$;

(4) $|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.(三角不等式)

这些性质很容易证明,留给读者自己证明.

在 $z\neq0$ 时,称以正实轴为始边,向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 为 z 的**辐角**(argument),记为 $\mathrm{Arg}\, z=\theta$(图 1.1),于是有

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ |z|^2=z\bar{z} \tag{1.3}$$

注意:当 $z=0$ 时,$|z|=0$,其辐角不确定.且 $z=0\Leftrightarrow|z|=0$.

当 $z\neq0$ 时,由于其辐角 θ 增加 2π 的整数倍,其终边不变,因此 $\mathrm{Arg}\, z$ 是多值的.但满足条件 $-\pi<\mathrm{Arg}\, z\leqslant\pi$ 的辐角值是唯一的,称该值为其辐角的主值,

记为 $\arg z$. 于是有

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots) \tag{1.4}$$

显然有　　$z_1=z_2\neq 0\Leftrightarrow|z_1|=|z_2|$且 $\arg z_1=\arg z_2$

三、复数的三种表示形式

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 是复数的代数表示式. 当 $z\neq 0$ 时,利用直角坐标系与极坐标的关系:

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$$

将 z 表示成:

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

称为复数的三角表示式.

再利用欧拉(Euler)公式:$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,可以得到

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

我们称其为复数的指数表示式,复数的三种表示式可以相互转换.

例 1.1　已知 $x+y\mathrm{i}=(2x-3)+y^2\mathrm{i}, x, y\in\mathbf{R}$,求 $z=x+y\mathrm{i}$.

解　由 $x=2x-3$,可得 $x=3$,由 $y=y^2$,可得 $y=0$ 或 $y=1$,因此

$$z=3 \quad 或 \quad z=3+\mathrm{i}.$$

例 1.2　计算 $z=-1-\mathrm{i}$ 的模和辐角主值及其三角表示式.

解　显然$|z|=\sqrt{2}$且 $\arg z=\frac{-3\pi}{4}$,因此,z 的三角表示式为

$$-1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{-3\pi}{4}\right).$$

例 1.3　将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

(1) $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$;(2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$.

解　(1) $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$,因 z 在第三象限,故 $\theta=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi$

$=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi$,故三角表示式为

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

指数表示式为

$$z=4\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi}$$

(2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$,显然 $r=|z|=1$, $\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10}$,

$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10}$,故三角表示式为

$$z=\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10},$$

指数表示式为

$$z=\mathrm{e}^{\frac{3}{10}\pi\mathrm{i}}$$

例 1.4 把复数 $z=1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha, 0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ 化为三角表示式与指数表示式,并求 z 的辐角主值.

解 $z=1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2+2\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$(三角式)

$=2\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi-\alpha}{2}\mathrm{i}}$(指数式)

$$\arg z=\frac{\pi-\alpha}{2}$$

四、复数的代数运算

1. 复数的四则运算

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加法、减法、乘法及除法定义如下:

$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$

$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\qquad(z_2\neq0)$

另外,复数可以看做复向量,当 $z_1\neq0$ 且 $z_2\neq0$ 时,在复平面上,其和与差可以按照平行四边形法则或三角形法则来表示. 即复向量 z_1+z_2 是以复向量 z_1 和 z_2 为邻边的平行四边形的对角线向量,其终点 z_1+z_2 可以看做将点 z_1 沿向量 z_2 的方向平移 $|z_2|$ 的距离所得到的点[图 1.2 中(a)]. 复向量 z_2-z_1 是从点 z_1 到 z_2 的向量, $|z_1-z_2|$ 为点 z_1 与 z_2 之间的距离[图 1.2 中(b)].

由图 1.2 可以看出,对任意复数 z_1 和 z_2,显然有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\ \big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1-z_2|\quad(\text{三角不等式})$$

对于非零复数 $z_k=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k)(k=1,2)$,利用三角函数的和、差角公式,读者自己可以验证 z_1z_2 和 $\frac{z_1}{z_2}$ 的三角式分别为

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

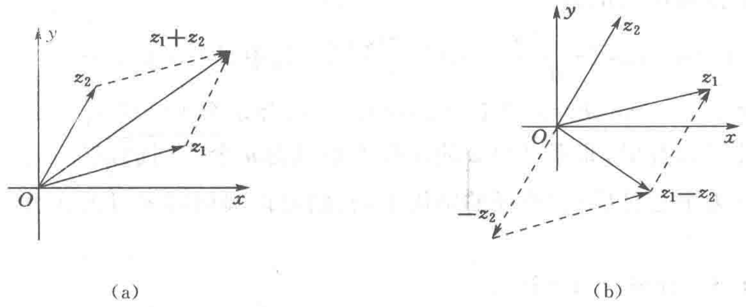


图 1.2

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

并且对 $z_1=z_2=z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ 和任意自然数 n 有

$$z^n=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)]$$

由此可以看出，对于非零复数有

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{1.5}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2 \tag{1.6}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2 \tag{1.7}$$

对 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，计算 z^n 可得 De Moivre 公式：

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta\quad(n=1,2,\cdots).$$

注意：式(1.6)和式(1.7)两边是多值的，它们成立是指等式两边辐角值的集合相等，其中右端辐角的和(差)运算是指 $\mathrm{Arg}\,z_1$ 的每个值可以加上(减去)$\mathrm{Arg}\,z_2$ 的任意一个值. 另外，由于两个主辐角的和或差可能超出主值的范围，因此这两个等式对于辐角的主值而言，不一定成立.

2. 复数的 n 次方根

设有非零复数 z，若存在复数 w 使 $z=w^n$，则称 w 为复数 z 的 n 次方根，记为 $w=\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}$.

为了求出其方根 w，可设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，$w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 于是由定义得

$$w^n=(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n=\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

它等价于

$$\rho^n=r\ 且\ n\theta=\varphi+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

即

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

所求方根可表示为

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\quad 其中(k=0,1,2,\cdots,n-1).\tag{1.8}$$

显然 $w_{k+n}=w_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. w_k 只有 n 个不同的值.

由此可以看出,非零复数 z 的 n 次方根只有 n 个不同值,它们均匀分布在以坐标原点为中心、以$\sqrt[n]{r}$为半径的圆周上,它们是该圆周的内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 1.5 计算$(-1+\mathrm{i})^{10}$.

解 由三角表示式

$$-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

得

$$(-1+\mathrm{i})^{10}=(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{30\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{30\pi}{4}\right)=32\left(\cos\frac{-\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{2}\right)=-32\mathrm{i}$$

例 1.6 求$\sqrt[4]{-4}$的四个根.

解 由三角表示式$-4=4(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$,利用求 n 次方根式(1.8)得

$$w_k=\sqrt[4]{-4}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),$$

取 $k=0,1,2,3$,可得其四个根为

$$w_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+\mathrm{i},$$

$$w_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-1+\mathrm{i},$$

$$w_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-1-\mathrm{i},$$

$$w_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)=1-\mathrm{i}.$$

例 1.7 证明等式$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$,并对此等式作出几何解释

证 $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$

$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$

将此二式相加便得

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

这等式的几何意义是:平行四边形的对角线的平方和等于四条边的平方和.

五、扩充复平面与复球面*

除了用平面内的点或向量来表示复数外,还可以用球面上的点来表示复数.

取一个与复平面相切于点 $z=0$ 的球面(图 1.3). 其中点 N 和 S 分别称为该球面的北极和南极.

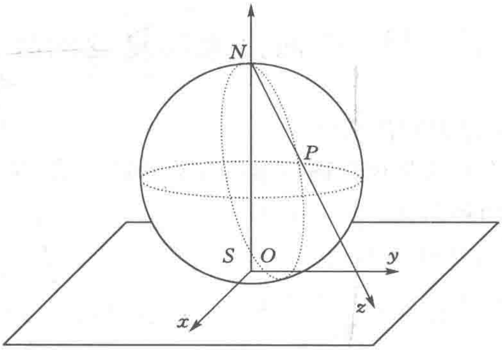


图 1.3

为了用该球面上的点来表示复数,需要建立复平面的点 z 与该球面上点之间的一一对应关系. 过点 N 和点 z 作直线,该直线与球面有一个唯一的交点,记为 P. 这样就建立了复平面上的点 z 与球面上点 $P(P\neq N)$的一一对应.

对球面上的点 N,复平面上没有复数与之对应. 由图 1.3 可以看到,当 z 无限远离原点时,点 P 无限逼近 N. 我们规定,无限远离原点的点称为无穷远点(记为∞),它与复球面上的点 N 相对应.

在数学上,称包含无穷远点的复平面为**扩充复平面**;又称不包含无穷远点的复平面为有限复平面或简称为**复平面**.

以上我们建立了扩充复平面上的点与复球面上点的一一对应关系,不仅可以用球面上的$(P\neq N)$来表示它所对应的任一个有限复数 z,而且扩充复平面的无穷远点所对应的复数∞也可用球面的北极点 N 表示出来. 称上述球面为复球面或 Riemann 球面.

另外不难看出,复数∞的模为$+\infty$,其实部、虚部与辐角的概念均无意义,它与有限复数 a 的四则运算规定如下:

(1) $a\neq 0$ 时,有 $a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty\cdot\infty=\infty$;

(2) $a/\infty=0,\infty/a=\infty(a\neq\infty)$;

(3) $a\pm\infty=\infty\pm a=\infty(a\neq\infty)$;

(4) $\infty\pm\infty,0\cdot\infty,\infty/\infty$都无意义.

注意:为了用球面上的点来表示复数,引入了无穷远点. 无穷远点与无穷大这个复数相对应, 所谓无穷大是指模为正无穷大(辐角无意义)的唯一的一个复数,不要与实数中的无穷大或正、负无穷大混为一谈.

但在本书以后各处，如无特殊声明，复平面都指有限复平面，复数 z 都指有限复数.

第二节　平面点集与复变函数

一、复平面上曲线方程的表示

平面曲线方程有直角坐标方程和参数方程两种形式，复平面上的曲线方程也可以写成相应的两种形式.

1. 曲线直角方程的复数形式

由关系式 $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ 和 $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$ 可知曲线 C 的方程 $F(x,y)=0$ 可写成复数形式：

$$F\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2}\right)=0 \quad 或 \quad F(\mathrm{Re}\, z,\mathrm{Im}\, z)=0 \tag{1.9}$$

如圆周 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 可以表示为 $|z-z_0|=R$. 其中 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 为圆心，$|z-z_0|$ 为动点 z 到定点 z_0 的距离. 由此可以看出，用复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 表示曲线上的动点，可以直接写出其轨迹方程.

例如，动点到两个定点 z_1 和 z_2 的距离之和为常数 $2a$ 的轨迹为椭圆（$|z_1-z_2|<2a$），其方程为 $|z-z_2|+|z-z_1|=2a$.

这样就把复数问题与解析几何问题联系起来了. 某些复数问题可化为解析几何问题，同样某些解析几何问题也可以化为复数问题来解决.

2. 曲线参数方程的复数形式

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续的实函数，那么方程组

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

代表一条平面曲线. 如果令

$$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$$

那么该曲线就可用方程

$$z=z(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

来表示，这就是平面曲线的复数表示式.

例 1.8　指出方程 $z=(1+\mathrm{i})t+z_0\,(-\infty<t<\infty)$ 表示什么曲线.

解　设 $z=x+\mathrm{i}y$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则有

$$z=(1+\mathrm{i})t+z_0\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_0+t\\ y=y_0+t\end{cases}$$

因此可知该方程表示过点 z_0 其方向平行于复向量 $1+\mathrm{i}$ 的直线.