初中数学综合题一题多解

中学数学智力开发丛书

翟连林主编

北京出版社

责任编辑：李利军

ISBN 7-200-02122-9

定　价：9.10 元

初中数学综合题一题多解

主　编　翟连林

编　委　（依姓氏笔划为序）

王学功　王乾岭　叶龄逸

刘盛锡　陈士杰　李福宽

林福堂　施英杰　项昭义

执　笔　贾士代　唐丙振　费　珺

马十成　赵素娟　田素芳

北　京　出　版　社

(京) 新登字 200 号

中学数学智力开发丛书

初中数学综合题一题多解

CHUZHONG SHUXUE ZONGHETI

YITI DUOJIE

翟连林 主编

*

北 京 出 版 社 出 版

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码: 100011

北 京 出 版 社 总 发 行

新华书店北京发行所经销

北京市朝阳广益印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 32 开本 11.5 印张 252 000 字

1994 年 3 月第 1 版 1995 年 6 月第 2 次印刷

印数 7 001—22 000

ISBN 7-200-02122-9/G·640

定 价: 9.10 元

编者说明

从教学实践中我们体会到：一题多解是开发智力、培养能力的一种行之有效的方法，它对沟通不同知识间的联系，开拓人们的思路，培养发散思维能力，激发读者的学习兴趣都是十分有益的。为此，我们编写了《中学数学智力开发丛书》。这套丛书出版发行后，受到广大读者的欢迎，从1990年初版至今，已印刷四次，总印数达35.6万册。在新形势下我们又重新修订，出版这套丛书的第二版，包括《初中代数一题多解》、《平面几何一题多解》、《高中代数一题多解》、《平面三角一题多解》、《立体几何一题多解》、《平面解析几何一题多解》、《高中数学综合题一题多解》。为了充实内容，这套丛书增加了《初中数学试题一题多解》、《初中数学综合题一题多解》、《高中数学试题一题多解》等书，使整套书囊括了初中数学和高中数学的全部内容，有益于读者按需选择。

与其它各类学习数学书比较，这套丛书突出了发散思维能力的培养，精选实用、新颖的题目，增加了巧妙解法，力求体现科学性、趣味性、典型性和启发性。

由于我们的水平有限，书中缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编者

1993年8月

目　录

第一章　初中数学综合题的分类

在中学数学教学中，综合题具有特殊的作用．由于它由数学一科或多科的许多个知识点融汇而成，所以在解综合题时，不仅需要运用多方面的知识，而且还要把知识、思维、能力熔为一炉．因此，数学综合题有利于把数学当作一个整体，沟通代数、三角、几何之间的有机联系，有利于综合和灵活运用数学知识，提高分析问题和解决问题的能力，有利于学生从不同的角度去思考问题，培养思维的多向性、灵活性和独特性．

虽然，在中学数学教学与考试的实践中，涌现出了大量的综合题，但是对综合题理论的研究还是肤浅的．为此，研究数学综合题的理论已成为教学研究中一个迫切需要解决的课题．本章主要探讨初中数学综合题的结构与分类．

如何对数学综合题进行分类，这个问题虽然不是综合题的实质性问题，但是研究这个问题有助于编制和设计综合题，有助于解答综合题，有助于对综合题进行一题多解．

一、合成型与非合成型

考察数学综合题的结构，我们发现，许多综合题都是由若干个彼此互相联系的小题组合而成的，这类综合题都可以拆成一些小的简单题，而另一些综合题则不然，整个题目是

一个有机的整体，很难分解成若干个小题。因此，我们把由若干个小题组成的综合题称为合成型综合题，反之，则称为非合成型综合题。

1. 合成型综合题

例1 已知方程$a(1-x^2)+2bx+c(1+x^2)=0$没有实数根，a、b、c是$\triangle ABC$的三边，且a、$b(a>b)$是方程$y^2-6y+7=0$的两个根，$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$。(1) 求角$C$的度数；(2) 求作一个一元二次方程，使它的两个根分别是a^2和c^2。

【分析】 本题大致由下列5个小题组合而成：(1)已知a、b是方程$y^2-6y+7=0$的两个根，求a、b的值；(2)已知关于x的方程$a(1-x^2)+2bx+c(1+x^2)=0$没有实数根，且a、b、c是$\triangle ABC$的三边，求证：C是钝角；(3)已知C是钝角，且$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求$C$的度数；(4) 在$\triangle ABC$中，已知两边$a$、$b(a=3+\sqrt{2}$，$b=3-\sqrt{2})$及其夹角$C(C=135°)$，求第三边$c$；(5) 已知$a$、$c(a=3+\sqrt{2}$，$c=\sqrt{22+7\sqrt{2}})$，求作一个一元二次方程，使它的两个根分别是$a^2$和$c^2$。

【解】 (1) 原方程可化为

$$(c-a)x^2+2bx+(c+a)=0,$$

此方程无实数根，则$\Delta=(2b)^2-4(c-a)(c+a)<0$。

从而 $b^2+a^2-c^2<0$，即$b^2+a^2<c^2$。

$\therefore$ 角C是钝角。

又 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $\therefore$ $C=135°$。

(2) $\because$ a、b是方程$y^2-6y+7=0$的两个根，且$a>b$，

则 $a=3+\sqrt{2}$，$b=3-\sqrt{2}$。

又　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$=(3+\sqrt{2})^2+(3-\sqrt{2})^2+2(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=22+7\sqrt{2},$$

且　$a^2=11+6\sqrt{2}$，

∴　$a^2+c^2=33+13\sqrt{2}$，$a^2c^2=326+209\sqrt{2}$。

于是　由韦达定理的逆定理，得所求的方程为

$$x^2-(33+13\sqrt{2})x+(326+209\sqrt{2})=0.$$

【评注】　本题是一个合成型综合题．它综合了一元二次方程与解三角形两方面知识．解题时，涉及到的知识点较多，灵活运用了一元二次方程的求根公式、根的判别式、韦达定理的逆定理以及特殊角的三角函数值、余弦定理、正、余弦函数的性质等．

例2　已知⊙O半径为r，作⊙O的外切△ABC，使$BC>AC>AB$，且⊙O分别与AB、BC、AC切于点D、E、F，又设$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$。

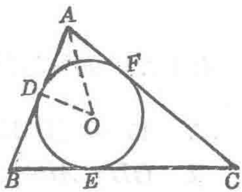

图 1-1

(1) 用a、b、c表示AD的长；

(2) 求证：若△ABC是直角三角形，则

$$r=\frac{b+c-a}{2};$$

(3) 求证：若$\angle BAC$是钝角，则　$0<b+c-a<2r$。

【解】　(1) 如图1-1，设$AD=x$，$BD=y$，$CE=z$，则　$AF=x$，$BE=y$，$CF=z$。

于是 $\begin{cases} x+y=c, \\ x+z=b, \\ y+z=a. \end{cases}$

解之，得 $\quad x=\dfrac{b+c-a}{2},$

即 $\quad AD=\dfrac{b+c-a}{2}.$

(2) ∵ $BC>AC>AB$，又$\triangle ABC$是直角三角形，则$\angle A=90°$.

连结OD、OA，则$OD\perp AD$，$\angle DAO=45°$.

∴ $OD=AD$，

故 $\quad r=\dfrac{b+c-a}{2}.$

(3) ∵ $90°<\angle DAF<180°$，则$\angle DAO=\dfrac{1}{2}\angle DAF$.

∴ $45°<\angle DAO<90°$.

又 $OD\perp AD$，

∴ $\angle DAO>\angle AOD$.

从而 $0<AD<DO$，

即 $0<\dfrac{b+c-a}{2}<r$，

故 $0<b+c-a<2r$.

【评注】 由本题的解答过程可知，组成这个综合题的3个小题是一个有机的题组，彼此之间互相联系，构成阶梯，解答后面的小题必须用到前面的结论.

例3 如图1-2，AB是$\odot O$的直径，C是BA延长线上一

点，CD切$\odot O$于D，$\angle BCD$的平分线交BD于E，又$CA=1$，CD是$\odot O$半径的$\sqrt{3}$倍，求DE和EB的长。

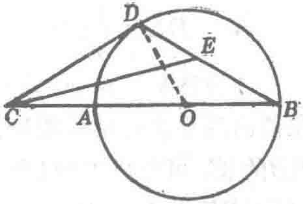

图 1-2

【解】 设$\odot O$的半径为R，则 $CD=\sqrt{3}R$，

$BC=1+2R$。

$\because$ CD是$\odot O$的切线，

$\therefore$ $CD^2=CA\cdot CB$。

从而 $(\sqrt{3}R)^2=1\cdot(1+2R)$，

解之，得 $R=1\left(R=-\dfrac{1}{3}\text{舍去}\right)$。

$\therefore$ $CD=\sqrt{3}$，$CB=3$。

连结OD，则 $OD\perp CD$。

在Rt$\triangle CDO$中，$\because$ $OD=\dfrac{1}{2}CO$，

$\therefore$ $\angle DCO=30°$。

从而 在$\triangle DCB$中，由余弦定理，得

$$DB=\sqrt{DC^2+BC^2-2DC\cdot BC\ \cos\angle DCB}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2-2\times\sqrt{3}\times3\times\cos30°}=\sqrt{3}.$$

在$\triangle DCB$中，$\because$ CE是$\angle DCB$的平分线，

$\therefore$ $\dfrac{DE}{EB}=\dfrac{CD}{CB}$。

设 $DE=x$，则 $EB=\sqrt{3}-x$。

$\therefore$ $\dfrac{x}{\sqrt{3}-x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

解之，得 $x=\dfrac{1}{2}(3-\sqrt{3})$，

$\therefore\quad DE=\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})$，$EB=\frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$.

【评注】 组成本题的几个小题隐含在题目之中，并不象前面两个例题那样明显．从上述解答可以看出，求DE、EB的长，可分成下列4个小题：（1）求$\odot O$的半径；（2）求$\angle DCB$的大小；（3）求DB的长；（4）求DE和EB的长.

由这三个例题可以看出，合成型综合题又可分成明显型、隐蔽型和阶梯型.

2. 非合成型

这类综合题的"综合性"不仅表现于题目的形式上，而且还表现于解题的过程中，表现于解题所用的知识和方法的多样性.

例4 已知a、b、c、d、e都是实数，且$a+b+c+d+e=8$，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$，求e的取值范围.

【解法1】 由已知等式，得

$$a+b+c+d=8-e \quad ①$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2=16-e^2 \quad ②$$

当x、y都是实数时，$\because\ (x-y)^2\geqslant 0$，

$\therefore\quad x^2-2xy+y^2\geqslant 0$，即 $x^2+y^2\geqslant 2xy$.

从而 $a^2+b^2\geqslant 2ab$， $a^2+c^2\geqslant 2ac$，

$a^2+d^2\geqslant 2ad$， $b^2+c^2\geqslant 2bc$，

$b^2+d^2\geqslant 2bd$， $c^2+d^2\geqslant 2cd$，

以上六个不等式相加，得

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant 2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

两边同时加上$a^2+b^2+c^2+d^2$，得

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant(a+b+c+d)^2.$$

把①、②式代入上式，得

$$4(16-e^2)\geqslant(8-e)^2,$$

解这个不等式，得

$$0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}.$$

【解法 2】 由已知，得

$$a=(8-c-d-e)-b.$$

代入 $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$中，得

$$[(8-c-d-e)-b]^2+b^2+c^2+d^2+e^2-16=0.$$

展开，整理，得

$$2b^2-2(8-c-d-e)b+(8-c-d-e)^2$$
$$+e^2+c^2+d^2-16=0.$$

∵ b是实数，∴这个关于b的二次方程的判别式不小于零，

即 $4(8-c-d-e)^2-8(8-c-d-e)^2-8(e^2+c^2+d^2-16)\geqslant0.$

把这个式子整理成c的二次不等式，得

$$3c^2-2(8-d-e)c+3d^2+3e^2+2de-16d$$
$$-16e+32\leqslant0.$$

∵ c是实数，∴ 这个关于c的二次函数的判别式不小于零，

即 $4(8-d-e)^2-12(3d^2+3e^2+2de-16d-16e+32)\geqslant0,$

整理，得 $2d^2+(e-8)d+2(e-2)^2\leqslant0.$

∵ d是实数，∴ 这个关于d的二次函数的判别式不小于零，

即 $(e-8)^2-4\cdot2\cdot2(e-2)^2\geqslant0,$

整理，得 $e\left(e-\frac{16}{5}\right)\leqslant 0$，

于是 $0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$。

【解法 3】 设二次函数

$$y=4x^2+2(a+b+c+d)x+a^2+b^2+c^2+d^2,$$

则 $y=(x+a)^2+(x+b)^2+(x+c)^2+(x+d)^2\geqslant 0$。

从而 它的判别式不大于零，

即 $[2(a+b+c+d)]^2-16(a^2+b^2+c^2+d^2)\leqslant 0$。

∵ $a+b+c+d=8-e$，

又 $a^2+b^2+c^2+d^2=16-e^2$，

∴ $(8-e)^2-4(16-e^2)\leqslant 0$。

解之，得 $0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$。

【解法 4】 ∵ $a+b+c+d=8-e$，

∴ 可设 $a=\frac{8-e}{4}+t_1$，$b=\frac{8-e}{4}+t_2$，

$$c=\frac{8-e}{4}+t_3,\ d=\frac{8-e}{4}+t_4.$$

从而可得 $t_1+t_2+t_3+t_4=0$。

∵ $$a^2+b^2+c^2+d^2=\left(\frac{8-e}{4}+t_1\right)^2+\left(\frac{8-e}{4}+t_2\right)^2$$

$$+\left(\frac{8-e}{4}+t_3\right)^2+\left(\frac{8-e}{4}+t_4\right)^2$$

$$=\frac{(8-e)^2}{4}+\frac{8-e}{2}(t_1+t_2+t_3+t_4)+t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_4^2$$

$$=\frac{(8-e)^2}{4}+t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_4^2=16-e^2,$$

又　$t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_4^2\geqslant 0$,

$$\therefore\quad \frac{(8-e)^2}{4}\leqslant 16-e^2.$$

解之，得　$0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$.

【评注】　以上四种解法，除用到不等式的性质外，还灵活运用了构造函数法、判别式法和换元法.

二、单科型与多科型

数学综合题又可根据它的内容所含知识的科别，分成单科综合题和多科综合题两大类.

1. 单科型

仅有数学某一学科知识而构成的综合题，叫做单科综合题. 在初中数学中，单科综合题又分成代数综合题与几何综合题两类.

(1) 代数综合题

由于初中代数的章节较多，内容极其丰富，所以代数综合题的题型繁多，难以分类. 但常见的代数综合题有下列几个方面：

(i) 数式与方程方面的综合题

例5　已知$x>0$，$y>0$，且$\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}\cdot(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$，求$\frac{2x-\sqrt{xy}-5y}{x+\sqrt{xy}}$的值.

【解】　已知等式可化为

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2-2\sqrt{\frac{x}{y}}-15=0.$$

设　$\sqrt{\dfrac{x}{y}}=k$，则上式化为

$$k^2-2k-15=0.$$

即　$(k+3)(k-5)=0$。

$\because$　$k>0$，$\therefore$　$k=5$。

$$于是\quad 原式=\frac{2\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2-\sqrt{\dfrac{x}{y}}-5}{\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2+\sqrt{\dfrac{x}{y}}}$$

$$=\frac{2k^2-k-5}{k^2+k}=\frac{2\times5^2-5-5}{5^2+5}=\frac{4}{3}.$$

【评注】　本解法把已知等式看作$\sqrt{\dfrac{x}{y}}=k$的二次方程，通过解方程，求出$\sqrt{\dfrac{x}{y}}$的值，然后再代入原式求值。

本题还可以求解如下：

已知等式可化为

$$(\sqrt{x})^2-2\sqrt{xy}-15(\sqrt{y})^2=0,$$

即　$(\sqrt{x}+3\sqrt{y})(\sqrt{x}-5\sqrt{y})=0$.

$\because$　$\sqrt{x}>0$，　$\sqrt{y}>0$，

$\therefore$　$\sqrt{x}=5\sqrt{y}$，$x=25y$，

于是　原式$=\dfrac{2\times25y-5y-5y}{25y+5y}=\dfrac{4}{3}$.

(ii) 数式与不等式方面的综合题

例6　已知$\sqrt{15+4x-4x^2}$在实数范围内有意义，试化简$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}$。

【解】　$\because$　$\sqrt{15+4x-4x^2}$在实数范围内有意义，

则　$15+4x-4x^2\geqslant0$，

即　$4x^2-4x-15\leqslant 0$。

解这个不等式，得

$$-3\leqslant 2x\leqslant 5,$$

∴　$2x+3\geqslant 0$，$2x-5\leqslant 0$。

于是　原式 $=\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(2x-5)^2}$

$$=2x+3+5-2x=8。$$

【评注】　本题是数式与不等式方面的一个典型综合题．解答此题，运用了根式的概念、二次不等式的解法、公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 和算术根的概念等知识点．

(iii) 方程与解三角形方面的综合题

例7　已知a、b、c分别是$\triangle ABC$角A、B、C的对边，当$m>0$时，关于x的方程$b(x^2+m)+c(x^2-m)-2\sqrt{m}\,ax=0$有两个相等的实数根，且 $\sin C\cdot\cos A=\cos C\cdot\sin A$，试判别$\triangle ABC$的形状．

【解】　原方程整理为

$$(b+c)x^2-2\sqrt{m}\,ax+(b-c)m=0。$$

∵　这个关于x的方程有两个相等的实数根，则

$$\Delta=(-2\sqrt{m}\,a)^2-4m(b+c)(b-c)$$
$$=4m(a^2+c^2-b^2)=0。$$

∵　$m>0$，　则$a^2+c^2=b^2$，

于是　$\triangle ABC$是直角三角形，且　$B=90°$，$A+C=90°$．

∵　$\sin C\cos A=\cos C\sin A$，

又　$\cos A=\sin C$，$\cos C=\sin A$，

∴　$\sin^2 C=\sin^2 A$。

而　A、C都是锐角，

∴　$A=C$。

故　$\triangle ABC$是等腰直角三角形。