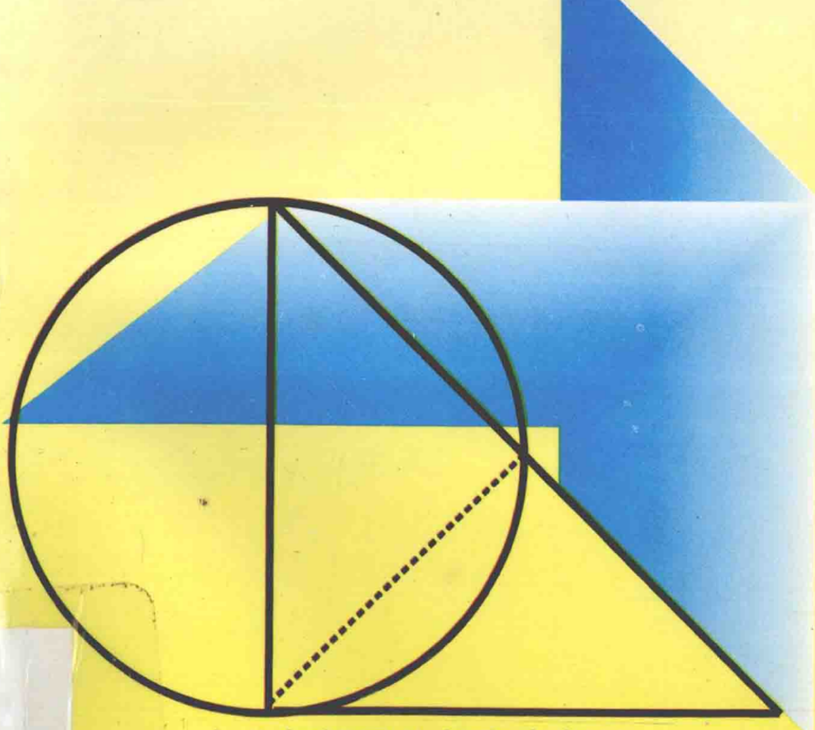
平面几何
辅助线引法大全

赵云田 主编



东北朝鲜民族教育出版社

初中各科类型题解法大全

平面几何辅助线引法大全

主　编　赵云田
编　委　王福芝　赵雪皎
　　　　吴　芳　徐玉海

东北朝鲜民族教育出版社

（吉）新登字 09 号

初中各科类型题解法大全

（平面几何辅助线引法大全）

赵云田　主编

责任编辑：梁春光	封面设计：张沭沉
东北朝鲜民族教育出版社出版（延吉市友谊路 11 号）	吉林省新华书店发行　吉林省科技印刷厂印刷
开本：787×1092 毫米　1/32	1997 年 11 月第 1 版
总 印 张：130.5　总 字 数：2931 千字	1997 年 11 月第 1 次印刷
本册印张：14.0　本册字数：314 千字	印数：1--8000 册
ISBN 7－5437－3031－6/G・2758	总 定 价：151.20 元　本册定价：16.80 元

如发现印装质量有问题，请与印厂联系调换。

前　言

本书是一套全新体系的实用工具书，分《初中代数类型题解法大全》、《初中物理类型题解法大全》、《初中化学类型题解法大全》、《平面几何辅助线引法大全》、《初中语文基础知识大全》、《初中语文阅读分析大全》、《初中英语阅读理解大全》、《初中历史类型题解法大全》九册出版。它是第一线优秀教师多年教学经验的总结，是教师、家长、学生皆喜欢的优秀参考书。它依据国家教委新教学大纲的要求，密切配合现行《九年义务教育三年制初级中学教科书》的内容和教学顺序，将每学科的基础知识通过类型题的解法变得具体化和系统化，使抽象的理论知识变成具体的灵活的实际应用能力。

本书所选择的例题具有典型性和趣味性，解题思路具有广阔性和灵活性，解题方法具有规范性和独特性，每一章节都注重了题型的归类与解法的归纳总结，且例题、习题的选编做到由浅入深，层次清楚，同时还注意将学习方法渗透到对知识的理解与消化之中，对学生所学知识进行层层引导，适时点拨，以达到开发思路，拓宽思维，激发兴趣，提高能力，增强素质的目的。

《初中各科类型题解法大全》编委会

目　录

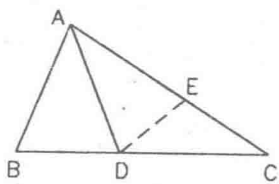
CONTENTS

一、添作有关线段的和、差、倍、分问题的辅助线

1. 线段和、差问题

在证明（或计算）线段的和、差等量问题上没有已知的定义或定理可以直接运用，而需要借助于其它的辅助方法进行间接证明（或计算），常用的添加辅助线方法是截长补短法，即在较长的线段上根据题目条件截出一段与其中一条较短线段相等，然后证其余的一段与另一条较短线段相等，此谓截长；补短，就是将一条较短线段延长，使延长部分等于另一条较短线段，然后证明这两条线段之和等于所证的较长线段。这种添作辅助线方法常与证明三角形全等或特殊三角形的性质等知识配合运用。

【例 1】 已知：在△ABC 中，∠B=2∠C，AD 为∠A 的平分线，求证：AC=AB+BD。



分析： 要证 AC=AB+BD，可在长线段 AC 上截取一段使 AE=AB，连 DE，可得 △ABD ≌ △AED，所以 DE=BD，只要再证 DE=EC 即可。通过角之间的关系很容易证得∠EDC=∠C，所以问题得证。

证明： 在 AC 上截取 AE=AB，连结 DE。

∵ AB=AE　∠BAD=∠EAD　AD=AD

∴　$\triangle ABD \cong \triangle AED$（SAS）

∴　$BD=DE$

∴　$\angle AED=\angle B=2\angle C$

∵　$\angle AED=\angle EDC+\angle C$

∴　$\angle EDC+\angle C=2\angle C$

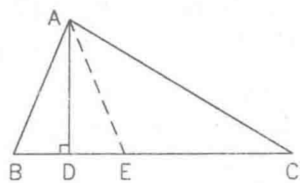
∴　$\angle EDC=\angle C$

∴　$DE=EC=BD$

∵　$AC=AE+EC$

∴　$AC=AB+BD$

【例 2】$\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，AD 为 BC 边上的高，垂足 D 在 BC 上，求证：$CD=AB+BD$。



分析：此题的结论是证明线段和、差问题，这三条线段中，CD 是长线段，所以可在线段 CD 上截取 $DE=BD$，用两边及其夹角相等，可证 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AED$ 全等，所以只要证明 $AE=EC$ 即可，由全等可知 $\angle AEB=\angle B=2\angle C$，而 $\angle AEB=\angle EAC+\angle C$，因此可得 $\angle EAC=\angle C$，问题得证。

证明：在 CD 上截取 $DE=BD$，连结 AE。

∵　$BD=DE$　$AD\perp BC$

∴　AD 为 BE 的垂直平分线

∴　$AE=AB$

∴　$\angle AEB=\angle B$

∵　$\angle B=2\angle C$

∴　$\angle AEB=2\angle C$，而$\angle AEB=\angle EAC+\angle C$

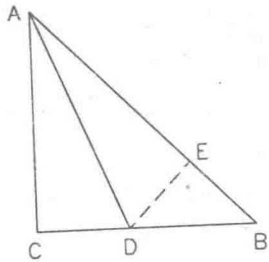
∴　$\angle EAC=\angle C$

∴　$AE=EC=AB$

∵　$DC=DE+EC$

∴　$DC=AB+BD$

【例 3】 已知 AB 是等腰直角三角形 ABC 的斜边，AD 是$\angle A$ 的平分线，求证：$AC+CD=AB$。



分析：要证 $AC+CD=AB$，可在长线段 AB 上截取 $AE=AD$，这样就构成了全等三角形，即 $\triangle ACD\cong\triangle AED$ 可得 $CD=DE$，那么只要证明 $DE=BE$ 即可，我们很容易证得$\triangle DEB$ 为等腰直角三角形，所以问题得证。

证明：在 AB 上截取 $AE=AC$，连结 DE。

∵　$AC=AE$　$\angle CAD=\angle EAD$　$AD=AD$

∴　$\triangle ACD\cong\triangle AED$ (SAS)

∴　$CD=DE$

$\angle C=\angle AED=90°$

∴　$\triangle DEB$ 为直角三角形

又∵　$AC=BC$

∴　$\angle B=\angle BAC=45°$

∴　$\angle EDB=45°$

∴　$\angle EDB=\angle B$

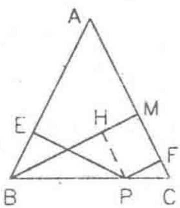
∴ DE＝BE

∴ CD＝DE＝BE

∵ AB＝AE＋EB

∴ AB＝AC＋DC

【例 4】 在△ABC 中，AB＝AC，在 BC 边上任取一点 P，作 PE⊥AB 于 E，PF⊥AC 于 F，BM⊥AC 于 M，求证：PE＋PF＝BM。



分析：本题为证明线段和（差）问题，通常可采用截长或补短法来证明，本题还可以巧用面积法加以证明。

证法 1：过 P 作 PH⊥BM，H 为垂足。

由 BM⊥AC，PF⊥AC，PH⊥BM

∴ 四边形 PFMH 为矩形

∴ PF＝MH

∴ PH∥AC

∴ ∠C＝∠BPH

∵ AB＝AC

∴ ∠ABC＝∠C

∴ ∠ABP＝∠BPH

又 ∠BEP＝∠PHB＝90°，BP＝PB

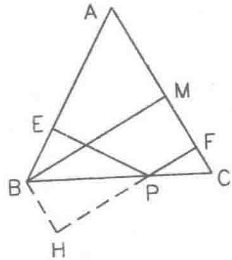
∴ Rt△BEP≌Rt△PHB（AAS）

∴ PE＝BH

∵ BM＝BH＋HM

∴ BM＝PE＋PF

证法2：过B作$BH \perp FP$交FP的延长线于H。



由$BM \perp AC$，$PF \perp AC$，$BH \perp HF$

$\therefore$ $\angle BMF = \angle MFH = \angle BHF = 90°$

$\therefore$ 四边形BHFM为矩形

$\therefore$ $BM = HF = HP + PF$

$\therefore$ $BH /\!/ AC$

$\therefore$ $\angle PBH = \angle C$

$\because$ $AB = AC$

$\therefore$ $\angle ABC = \angle C$

$\therefore$ $\angle ABC = \angle PBH$

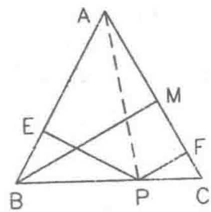
又 $\angle BEP = \angle BHP = 90°$，$BP = BP$

$\therefore$ $Rt\triangle BEP \cong Rt\triangle BHP$（AAS）

$\therefore$ $PE = PH$

于是$BM = HF = PE + PF$

证法3：连结AP



$\because$ $PE \perp AB$，$BM \perp AC$，$PF \perp AC$

$\therefore$ $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} AB \cdot PE$

$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} AC \cdot PF$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM$

又 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle APC}$

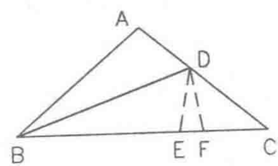
$\therefore\quad \frac{1}{2}AC \cdot BM=\frac{1}{2}(AB \cdot PE+AC \cdot PF)$

又　$AB=AC$

$\therefore\quad BM=PE+PF$

【例 5】 在△ABC 中，AB＝AC，∠A＝100°，BD 平分∠ABC，求证：BC＝BD＋AD。

分析：此类问题通常采用截长补短法证之。



证法 1：在 BC 上截取 BE＝BA，连结 DE，再在 BC 上截取 BF＝BD，连结 DF。

$\because\quad$ BD 平分$\angle ABC$

$\therefore\quad \angle ABD=\angle EBD$

$\because\quad AB=BE,\ BD=BD$

$\therefore\quad \triangle ABD \cong \triangle EBD$ (SAS)

$\therefore\quad AD=DE,\ \angle A=\angle DEB=100^\circ$

$\therefore\quad \angle DEF=80^\circ$

$\because\quad AB=AC$

$\therefore\quad \angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180^\circ-100^\circ)=40^\circ$

$\therefore\quad \angle DBF=20^\circ$

$\because\quad BD=BF$

$\therefore\quad \angle BDF=\angle BFD=\frac{1}{2}(180^\circ-20^\circ)=80^\circ$

$\therefore\quad \angle DEF=\angle DFE=80^\circ$

$\therefore\quad DE=DF$

又　$\angle DFE=\angle C+\angle FDC=80^\circ$

而　$\angle C=40^\circ$

$\therefore\quad \angle FDC=40^\circ$

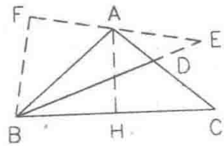
$\therefore \angle C=\angle FDC$

$\therefore DF=FC$

于是 $AD=DE=DF=FC$

$\therefore BC=BF+FC=BD+AD$

证法2：延长 BD 至 E，使 DE $=AD$ 连 AE，过 B 作 $BF\perp AE$ 交 EA 延长线于 F，过 A 作 AH $\perp BC$ 于 H。



由 $AD=DE$，得 $\angle DAE=\angle E$

$\because$ 在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=100°$

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180°-100°)=40°$

$\because$ BD 平分$\angle ABC$

$\therefore \angle ABD=20°$

$\therefore \angle ADB=180°-\angle BAC-\angle ABD$

$=180°-100°-20°=60°$

又 $\angle ADB=\angle DAE+\angle E=2\angle E$

$\therefore 2\angle E=60°$

$\therefore \angle E=30°$

在 $Rt\triangle BEF$ 中，$\angle E=30°$

$\therefore BF=\frac{1}{2}BE$

在 $Rt\triangle BEF$ 中，$\angle E=30°$

$\therefore \angle EBF=60°$

而 $\angle ABF=\angle EBF-\angle ABD=60°-20°=40°$

$\because \angle ABC=40°$

$\therefore \angle ABF=\angle ABH=40°$

又　$\angle AFB=\angle AHB=90^\circ$，$AB=AB$

∴　$Rt\triangle AFB\cong Rt\triangle AHB$（AAS）

∴　$BF=BH$

∵　$AB=AC$，$AH\perp BC$

∴　$BH=CH=\frac{1}{2}BC$

∴　$BF=\frac{1}{2}BC$

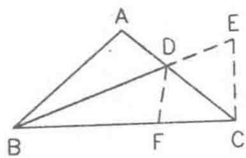
∴　$\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}BC$

∴　$BE=BC$

而　$BE=BD+DE=BD+AD$

∴　$BC=BD+AD$

证法3：延长BD至E，使DE $=AD$，连结EC，作$\angle BDC$的平分线DF交BC于F。



∵　$AB=AC$，$\angle BAC=100^\circ$

∴　$\angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180^\circ-100^\circ)=40^\circ$

∵　BD平分$\angle ABC$

∴　$\angle ABD=20^\circ$

∴　$\angle ADB=60^\circ$

∴　$\angle EDC=\angle ADB=60^\circ$

又　$\angle BDC=180^\circ-\angle ADB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

∴　$\angle BDF=\angle CDF=\frac{1}{2}\angle BDC=60^\circ$

∴　$\angle ADB=\angle FDB=60^\circ$

∵ $\angle ABD=\angle FBD$，$BD=BD$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle FBD$（ASA）

∴ $AD=DF$，$\angle A=\angle DFB=100°$

∴ $AD=DF=DE$

又 $\angle EDC=\angle FDC=60°$，$DC=DC$

∴ $\triangle EDC\cong\triangle FDC$（SAS）

∴ $\angle E=\angle DFC$

∵ $\angle DFC=180°-\angle DFB=180°-100°=80°$

∴ $\angle E=80°$

在$\triangle BEC$中，$\angle E=80°$，$\angle EBC=20°$

∴ $\angle BCE=180°-(80°+20°)=80°$

∴ $\angle BCE=\angle E$

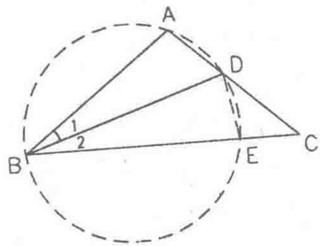
∴ $BE=BC$

而 $BE=BD+DE=BD+AD$

∴ $BC=BD+AD$

证法 4：

分析：此题可以作$\triangle ABD$的外接圆，由于$\angle 1=\angle 2$，而推得弦等，再应用圆内接四边形的性质使问题得到解决。



作$\triangle ABD$的外接圆交BC于E，连续DE。

∵ 四边形ABED内接于圆

∴ $\angle CDE=\angle ABE=\angle DCE=40°$

∴ $CE=DE$

∵ $\angle 1=\angle 2$

∴ AD=DE

∴ AD=EC

∵ $\angle A=100^\circ$

∴ $\angle DEB=80^\circ$

又 $\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle ABC=20^\circ$

∴ $\angle BDE=80^\circ$

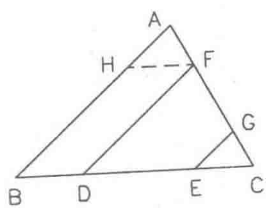
∴ BD=BE

∵ BC=BE+EC=BD+AD

即 BD+AD=BC

【例 6】在△ABC 中，BD=CE，DF∥GE∥AB，求证：DF+GE=AB。

分析：本题需用截长补短法证明，截长的方法可利用平移法截取。



证法 1：过 F 作 FH∥BC 交 AB 于 H

由 DF∥AB，FH∥BC

∴ DF=BH，FH=BD=CE

∵ EG∥AB，HF∥BC

∴ ∠A=∠EGC，∠AHF=∠GEC

∴ △AHF≌△GEC（AAS）

∴ AH=EG

∴ AB=AH+BH=EG+DF

证法 2：过 B 作 BH∥AC 交 FD 的延长线于 H。

由 DF∥AB，BH∥AC，得 AB=HF，∠DBH=∠C

∵ DF∥EG，BH∥AC

∴ ∠1=∠2，∠H=∠2

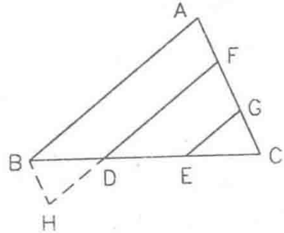
∴ $\angle H=\angle 1$

又 $BD=EC$

∴ $\triangle BDH\cong\triangle CEG$ (ASA)

∴ $DH=EG$

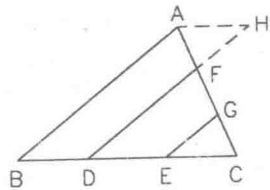
∴ $AB=HF=DF+DH=DF+EG$



证法 3：过 A 作 $AH\parallel BC$ 交 DF 延长线于 H。

由 $AB\parallel DH$，$AH\parallel BD$

∴ $AB=DH$，$AH=BD=EC$



∵ $AH\parallel BC$

∴ $\dfrac{AH}{DC}=\dfrac{FH}{DF}$

而 $AH=EC$

∴ $\dfrac{EC}{DC}=\dfrac{FH}{DF}$

又 $EG\parallel DF$

∴ $\dfrac{EC}{DC}=\dfrac{EG}{DF}$

∴ $\dfrac{FH}{DF}=\dfrac{EG}{DF}$

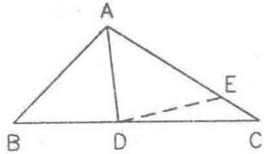
∴ $FH=EG$

∴ $AB=DH=DF+FH=DF+EG$

说明　本题还有很多证法，在此不多述。

【例 7】如图，已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是$\angle BAC$ 的平分线，并且$\angle ACB:\angle ABC:\angle BAC=1:2:4$，求证：$AD=AC-AB$。

分析：本题已知条件$\angle ACB : \angle ABC = 1 : 2$，即$\angle ABC = 2\angle C$，因此有$AC > AB$，欲证$AC - AB = AD$，可运用截长法，在AC上截取$AE = AB$，那么只需证得$EC = AD$即可；本题还可以运用补短法证明$AD = AC - AB$。



证法1：∵ $\angle ACB : \angle ABC = 1 : 2$

∴ $\angle ABC = 2\angle ACB$，$\angle ABC > \angle ACB$

∴ $AC > AB$

在AC上截取$AE = AB$，连结DE

由AD平分$\angle BAC$

∴ $\angle 1 = \angle 2$

又 $AD = AD$

∴ $\triangle AED \cong \triangle ABD$（SAS）

∴ $\angle AED = \angle B$

由 $\angle B = 2\angle ACB$

∴ $\angle AED = 2\angle ACB$

又 $\angle AED = \angle ACB + \angle EDC$

∴ $\angle EDC = \angle ACB$

∴ $EC = ED$

又 $\angle ABC : \angle BAC = 2 : 4 = 1 : 2$

∴ $\angle BAC = 2\angle ABC$

∴ $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle ABC$

而 $\angle ABC = \angle AED$

∴ $\angle 1 = \angle 2 = \angle AED$