经济应用数学基础

# 微积分

WEI JI FEN

主 编 曹菊生

苏州大学出版社

经济应用数学基础

# 微 积 分

主 编 曹菊生
副主编 孙曦浩 周铁丽

苏州大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分/曹菊生主编. —苏州：苏州大学出版社，2015.7
(经济应用数学基础)
ISBN 978-7-5672-1398-2

Ⅰ.①微… Ⅱ.①曹… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 147982 号

**微积分**

曹菊生　主编
责任编辑　肖　荣

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市十梓街 1 号　邮编:215006)
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址:宜兴市万石镇南漕河滨路 58 号　邮编:214217)

开本 787×960　1/16　印张 20.75　字数 407 千
2015 年 7 月第 1 版　2015 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-1398-2　定价:36.00 元

# 前 言

本书是根据教育部高等学校数学与统计学指导委员会制定的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成的.与“全国硕士研究生入学考试数学三考试大纲”中的微积分的内容相衔接,符合经济类、管理类各专业对数学要求越来越高的趋势,注重适当渗透现代数学思想,加强对学生应用数学方法解决经济问题的能力的培养,以适应新时代对经济类、管理类人才的培养要求.

在本书的编写过程中,我们对国内外近年来出版的同类教材的特点进行了比较和分析,在教材体系、内容安排和例题配置等方面吸取了它们的优点.尤其是在教材内容的安排上进行了精当的取舍,避免了偏多、偏深的弊端.并根据目前教学学时普遍减少的情况,力求做到教材难易适中,同时又为教师在教学过程中的补充和发挥留有余地.在编写时,我们着重注意了如下问题:

1. 尽可能做到简明扼要,深入浅出,语言准确,易于学生阅读.在引入概念时,注意以学生易于接受的方式叙述,略去教材中一些非重点内容的定理证明及章节内容,而以例题进行说明;教材中的重要定理、法则均给出了严格证明.个别定理证明标示“*”号,教学时可根据实际情况处理,略去不讲不会影响教材的系统性.

2. 力求例题、习题配置合理,难易适当,形式多样.每节内容后均附习题,以供学生巩固练习.每章后面配复习题,可作复习、总结、提高之用.书后附有参考答案.

3. 本书中插入了历史上对数学(尤其是近代数学)有杰出贡献的八位伟大数学家的简介,从他们的身上既能管窥近代数学发展的基本过程,又能领略数学家坚韧不拔地追求真理的人格魅力和科学精神.

4. 本书所需学时约为 120 学时(不含习题课),若学时较少,可略去第 10 章.

本书由曹菊生任主编,孙曦浩、周轶丽任副主编,黄昱、方正、王茂南、刘维龙、金锡嘉、表玩贵、刘琪、黄芳、浦琰等参与了编写.全书由曹菊生统稿,张建华审阅.本书在编写过程中得到了编者所在单位江南大学理学院和无锡太湖学院的大力支持和帮助,在此表示衷心感谢.

由于编者水平所限,书中缺陷和错误在所难免,诚请广大读者批评指正.

编者

2015 年 7 月

# 目 录

## 第1章 函 数



## 第2章 极限与连续



## 第3章 导数与微分

# 第1章

# 函 数

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是经济数学的主要研究对象. 本章将在中学已有知识的基础上，进一步阐明函数的一般定义，总结在中学已学过的一些函数，并介绍一些经济学中的常用函数.

## §1.1 函 数

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着. 17 世纪初，数学首先从对运动（如天文、航海等问题）的研究中引出了函数这个基本概念. 在那以后的 200 多年里，这个概念几乎在所有的科学研究工作中占据了中心位置.

本节将介绍函数的概念、函数关系的构建与函数的特性.

### 一、集合与区间

现代数学的一个基本概念是集合. **集合**是指具有某类属性的事物或满足某些条件、法则的研究对象的全体. 构成集合的事物或对象称为集合的**元素**. 通常，用大写字母 $A,B,C,X,Y$ 等表示集合，用小写字母 $a,b,c,x,y$ 等表示元素.

若 $a$ 是集合 $A$ 的元素，则记为 $a\in A$，读作"$a$ 属于 $A$"；若 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，则记为 $a\notin A$，读作"$a$ 不属于 $A$". 不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$.

用元素描述一个集合的常用方式是：设 $P(x)$ 为某个与 $x$ 有关的条件或法则，$X$ 为满足 $P(x)$ 的全体 $x$ 所构成的集合，则记 $X$ 为

$$X=\{x\mid P(x)\}.$$

在微积分中常用的数集有：正整数集 $\mathbf{N}$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$.

若集合 $A$ 的元素都是集合 $B$ 的元素,则称 $A$ 是 $B$ 的**子集**,或者称 $A$ **包含于** $B$ 或 $B$ **包含** $A$,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 例如,对上述数集有

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

由集合 $A$ 与集合 $B$ 的所有元素构成的集合,称为 $A$ 与 $B$ 的**并集**,记为 $A\cup B$,可表示为

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由集合 $A$ 与集合 $B$ 的所有公共元素构成的集合,称为 $A$ 与 $B$ 的**交集**,记为 $A\cap B$,可表示为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

在两个集合之间还可以定义**直积**或**笛卡尔乘积**. 设 $A,B$ 是任意的两个集合,则 $A$ 与 $B$ 的直积记作 $A\times B$,定义为如下的由有序对 $(a,b)$ 组成的集合:

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

例如,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,即为 $xOy$ 平面上全体点的集合,常记作 $\mathbf{R}^2$.

区间和一点的邻域是最常用的一类实数集.

实数集 $\{x\mid a<x<b\}=(a,b)$ 称为**开区间**;$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b]$ 称为**闭区间**;$\{x\mid a\leqslant x<b\}=[a,b)$,$\{x\mid a<x\leqslant b\}=(a,b]$ 称为**半开半闭区间**,$a,b$ 称为区间的端点. 这些区间统称为**有限区间**,它们都可以用数轴上长度有限的线段来表示,如图 1-1(a)、图 1-1(b)分别表示闭区间 $[a,b]$ 与开区间 $(a,b)$. 此外还有**无限区间**,引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)后,则可用类似的记号表示无限区间,如 $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$.

无限区间 $[a,+\infty)$,$(-\infty,b)$ 在数轴上的表示如图 1-1(c)、图 1-1(d)所示.

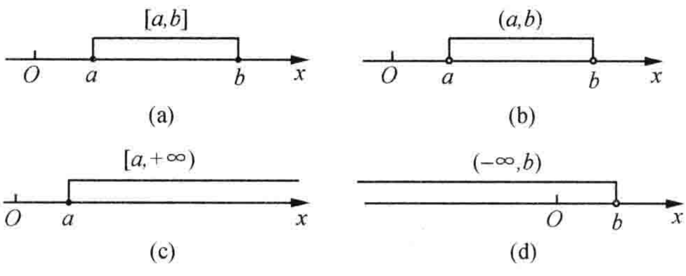


**图 1-1**

**定义 1.1** 设 $\delta$ 为某个正数,实数集 $\{x\mid |x-a|<\delta,\delta>0\}$,即开区间 $(a-\delta,$

$a+\delta)$称为**点 $a$ 的 $\delta$ 邻域**,记为 $U(a,\delta)$,其中 $a$ 称为**邻域的中心**,$\delta$ 称为**邻域的半径**(图 1-2).

点 $a$ 的邻域去掉中心 $a$ 后的集合 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$,即

$$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

称为点 $a$ 的**去心邻域**,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,其中$(a-\delta,a)$称为 $a$ 的**左邻域**,$(a,a+\delta)$称为 $a$ 的**右邻域**.

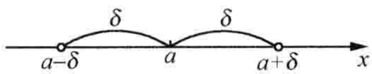


**图 1-2**

## 二、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在某一自然现象或社会现象中,往往同时存在多个不断变化的量,即变量,这些变量并不是孤立变化的,而是相互联系并遵循一定的规律.函数就是描述这种联系的一个法则.本节我们先讨论两个变量的情形(多于两个变量的情形将在第 8 章中讨论).

例如,在自由落体运动中,设物体下落的时间为 $t$,下落的距离为 $s$.假设开始下落的时刻为 $t=0$,则变量 $s$ 与 $t$ 之间的相依关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定,其中 $g$ 是重力加速度.

**定义 1.2** 设 $x$ 和 $y$ 是两个变量,$D$ 是一个给定的非空数集.如果对于每个数 $x\in D$,变量 $y$ 按照一定法则总有确定的数值和它对应,那么称 $y$ 是 $x$ 的**函数**,记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中,$x$ 称为**自变量**,$y$ 称为**因变量**,数集 $D$ 称为这个函数的**定义域**,也记为 $D_f$,即 $D_f=D$.

对 $x_0\in D$,按照对应法则 $f$,总有确定的值 $y_0$(记为 $f(x_0)$)与之对应,称 $f(x_0)$为函数在点 $x_0$ 处的**函数值**.因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量 $x$ 取遍 $D$ 的所有数值时,对应的函数值 $f(x)$的全体构成的集合

称为函数 $f$ 的**值域**,记为 $R_f$ 或 $f(D)$,即

$$R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素,两个函数相同的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

**例 1.1** 判断下列函数是否相同.

(1) $y=1+x^2$ 与 $y=(1+x^2)(\sin^2x+\cos^2x)$;

(2) $y=\dfrac{x}{x(1+x)}$ 与 $y=\dfrac{1}{1+x}$;

(3) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$;

(4) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{\sin^2x}$.

**解** (1) 相同. 因为两个函数的定义域相同,均为 $\mathbf{R}$,而 $\sin^2x+\cos^2x\equiv1$,即有相同的对应法则,因此,这两个函数相同.

(2) 不相同. 因为定义域不同,前者定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$,后者定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

(3) 不相同. 因为定义域不同,前者定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,后者定义域为 $(0,+\infty)$.

(4) 不相同. 因为对应法则不同,前者为 $y=\sin x$,后者为 $y=|\sin x|$.

表示函数的主要方法有三种:表格法、图形法、解析法(公式法),这在中学里大家已经熟悉,其中,用图形法表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D_f\}$$

称为函数 $y=f(x),x\in D_f$ 的图形(图 1-3). 图中的 $R_f$ 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

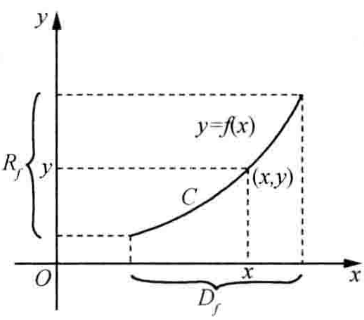


图 1-3

根据函数的解析表达式的形式不同,函数也可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**三种:

(1) 显函数:函数 $y$ 由 $x$ 的解析表达式直接表示. 例如,$y=x^2+1$.

(2) 隐函数:函数的自变量 $x$ 与因变量 $y$ 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定. 例如,$\ln y=\sin(x+y)$.

(3) 分段函数:函数在其定义域的不同范围内,具有不同的解析表达式. 以下是几个分段函数的例子.

**例 1.2** 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，图形如图 1-4 所示.

**例 1.3** 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-5 所示.

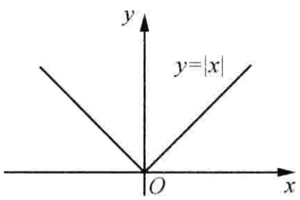


**图 1-4**

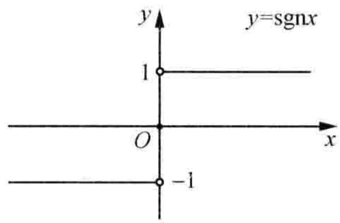


**图 1-5**

**例 1.4** 取整函数 $y=[x]$，其中，$[x]$表示不超过 $x$ 的最大整数. 例如，

$$[\pi]=3,[-2.3]=-3,[\sqrt{3}]=1.$$

易见，取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$，图形如图 1-6 所示.

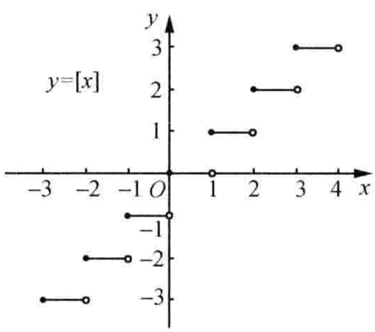


**图 1-6**

**例 1.5** 某商店对一种商品的售价规定如下：购买量不超过 5 千克时，每千克 0.8 元；购买量大于 5 千克而不超过 10 千克时，其中超过 5 千克部分优惠价为每千克 0.6 元；购买量大于 10 千克时，超过 10 千克部分每千克 0.4 元. 若购买 $x$ 千克该商品的费用记为 $f(x)$，则

$$y=f(x)=\begin{cases}0.8x, & 0\leqslant x\leqslant 5,\\ 0.8\times 5+0.6(x-5), & 5<x\leqslant 10,\\ 0.8\times 5+0.6\times 5+0.4(x-10), & x>10,\end{cases}$$

即

$$y=f(x)=\begin{cases}0.8x, & 0\leqslant x\leqslant 5,\\ 1+0.6x, & 5<x\leqslant 10,\\ 3+0.4x, & x>10.\end{cases}$$

关于函数的定义域,在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定.若讨论的是纯粹数学问题,则往往取使函数表达式有意义的自变量取值的全体,这种定义域称为函数的**自然定义域**.

**例 1.6** 求函数 $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$的定义域.

**解** 为使 $f(x)$有意义,应有

$$9-x^2\geqslant 0 \text{ 且 } x^2-1>0.$$

由 $9-x^2\geqslant 0$,得$|x|\leqslant 3$,即 $x\in[-3,3]$;由 $x^2-1>0$,得 $x>1$ 或 $x<-1$,即 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.综合得函数的定义域为

$$\begin{aligned}D_f&=[-3,3]\cap[(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)]\\&=[-3,-1)\cup(1,3].\end{aligned}$$

## 三、函数的几何特性

### 1. 函数的有界性

**定义 1.3** 设函数 $f(x)$的定义域为 $D$,数集 $X\subset D$,若存在一个正数 $M$,使得对一切 $x\in X$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 $X$ 上**有界**.或称 $f(x)$是 $X$ 上的**有界函数**.每一个具有上述性质的正数 $M$,都是该函数的**界**.(图 1-7).

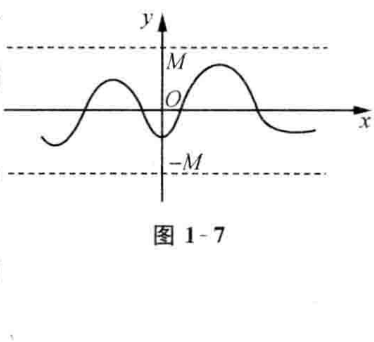

图 1-7

若具有上述性质的正数 $M$ 不存在,则称 $f(x)$ 在 $X$ 上**无界**,或称 $f(x)$是 $X$ 上的**无界函数**.

例如,函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界,因

为对任何实数 $x$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，在 $[1,+\infty)$ 上有界.

2. **函数的单调性**

**定义 1.4** 设 $x_1$ 和 $x_2$ 为区间 $(a,b)$ 内的任意两个数，若当 $x_1<x_2$ 时函数值 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内**单调增加或递增**；若当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内**单调减少或递减**.

单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**，使函数 $f(x)$ 单调的区间称为**单调区间**. 从几何直观来看，递增就是当 $x$ 自左向右变化时，函数的图象上升；递减就是当 $x$ 自左向右变化时，函数的图象下降(图 1-8).

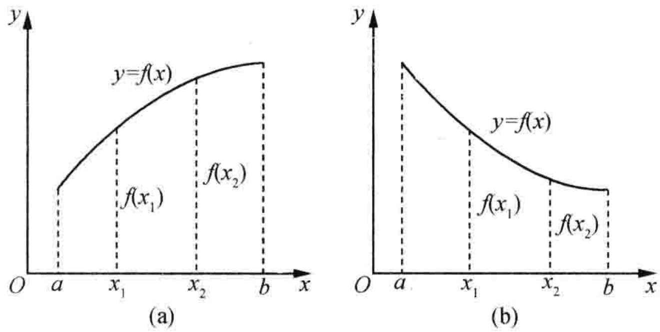


**图 1-8**

例如，$y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内递增；$y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 内递减；$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内递减，在 $(0,+\infty)$ 内递增；$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内递增.

3. **函数的奇偶性**

**定义 1.5** 设函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若对任意的 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

由定义可知，偶函数的图形关于 $y$ 轴对称，如图 1-9(a)所示；奇函数的图形关于原点对称，如图 1-9(b)所示.

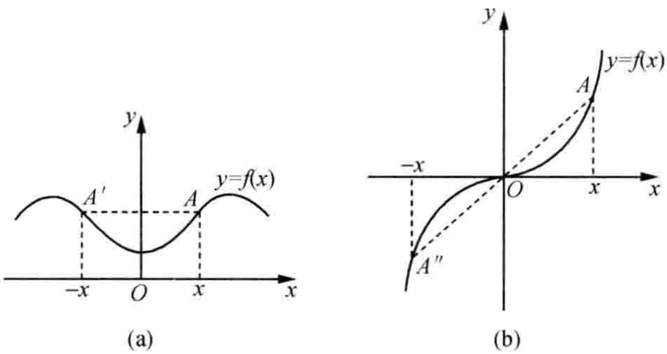


图 1-9

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\operatorname{sgn}x$ 是奇函数，函数 $y=\cos x$，$y=x^2$ 是偶函数，而函数 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数又不是偶函数.

**例 1.7** 判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性.

**解** 因为函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$为奇函数.

4. **函数的周期性**

**定义 1.6** 设函数 $f(x)$的定义域为 $D$，若存在常数 $T>0$，使对任意的 $x\in D$，恒有

$$x+T\in D \text{ 且 } f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$为**周期函数**，满足上式的最小正数 $T$ 称为 $f(x)$的**周期**.

若 $f(x)$是周期为 $T$ 的周期函数，则在长度为 $T$ 的两个相邻的区间上，其函数图形的形状相同(图 1-10).

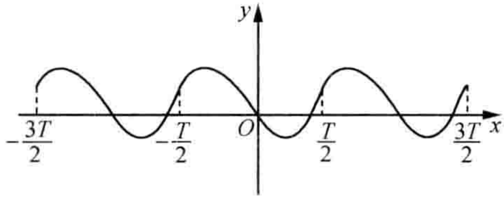


图 1-10

例如，三角函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 均是 **R** 上的周期函数，周期均为 $2\pi$；$\tan x$ 是周

期为 $\pi$ 的周期函数.

## 习题 1-1

1. 判断下列各对函数是否相同,并说明理由.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$,$g(x)=x-1$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{2+x}$,$g(x)=\sqrt{(1-x)(2+x)}$;

(3) $f(x)=\sqrt{2}\cos x$,$g(x)=\sqrt{1+\cos 2x}$;

(4) $f(x)=\ln(x^2-4x+3)$,$g(x)=\ln(x-1)+\ln(x-3)$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}$;　　(2) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-3}}$;

(3) $y=\sqrt{\ln\dfrac{x^2-9x}{10}}$;　　(4) $y=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

(5) $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$;　　(6) $y=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$,$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$,$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$,$f(-2)$.

4. 讨论下列函数的单调性.

(1) $y=1+\sqrt{6x-x^2}$;　　(2) $y=e^{|x|}$.

5. 讨论下列函数是否有界.

(1) $y=e^{-x^2}$;　　(2) $y=\sin\dfrac{1}{x}$;　　(3) $y=\dfrac{1}{1-x}$.

6. 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x\sin x+\cos x$;　　(2) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;

(3) $f(x)=\sin x e^{\cos x}$;　　(4) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.