

李成章教练奥数笔记

—— 第9卷 ——

李成章 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

LI CHENG ZHANG JIAO LIAN AO SHU BI JI

李成章教练奥数笔记

第9卷

李成章 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书为李成章教练奥数笔记第九卷,书中内容为李成章教授担任奥数教练时的手写原稿.书中的每一道例题后都有详细的解答过程,有的甚至有多种解答方法.

本书适合准备参加数学竞赛的学生及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

李成章教练奥数笔记.第9卷/李成章著. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2016.1

ISBN 978-7-5603-5752-2

I. ①李… II. ①李… III. ①数学-竞赛题-题解
IV. ①O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 296488 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 杜莹雪

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 9.75 字数 112 千字

版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5752-2

定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
目
录

- 一 抽屉原理 //1
- 二 图论方法 //21
- 三 点染色问题 //38
- 四 组合数论 //53
- 五 条件子集问题 //73
- 六 组合计数问题 //95
- 七 换序求和法 //117
- 编辑手记 //135

一 抽屉原理

抽屉原理是竞赛数学的组合数学中最重要的一条定理。学习和应用它，象中国象棋一样，易懂难精，但学精以后却会给你带来无穷的快乐。在运用抽屉原理论证的过程中灵活巧妙变化无穷，将使年轻的大脑不断经受锻炼，使年轻人的科学思维能力达到一个新的高度。

定理1 设有 m 个元素分属于 n 个集合且 $m > nr$ ，则必有一个集合中至少有 $r+1$ 个元素。

定理2 设有无穷多个元素分属于 n 个集合，则必有一个集合中含有无穷多个元素。

定理3 设有 m 个元素分属于 n 个两两不交的集合且 $m < nr$ ，则必有一个集合中至多有 $r-1$ 个元素。

关于使用抽屉原理的几点说明：

- 1 如以抽屉原理定理3一样好用；
- 2 重复元素的妙用；
- 3 抽屉大小可以不一致；
- 4 不一定把所有元素全部放入各个抽屉中；
- 5 出现均匀分布时可在抽屉原理之后加上适当的分析；
- 6 反用抽屉原理；
- 7 累次使用各种抽屉原理；
- 8 分类使用抽屉原理；
- 9 挖掘两看似不同元素之共同点，巧妙使用抽屉原理。

1 甲乙二人轮流给一个正方体的棱涂色. 首先, 甲任选3条棱涂成红色. 然后, 乙从余下的9条棱中任选3条涂成绿色, 接着甲从未涂色的6条棱中任选3条涂成红色. 最后乙将余下的3条棱涂成绿色. 如果甲能将某个面上的4条边全都涂成红色, 甲就获胜. 试问甲有必胜策略吗? 说明理由.

(1984年全苏数学奥林匹克)

解 将正方体的12条棱分成下列4组:

$$\{A_1B_1, B_2B_3, A_3A_4\}$$

$$\{A_2B_2, B_3B_4, A_4A_1\}$$

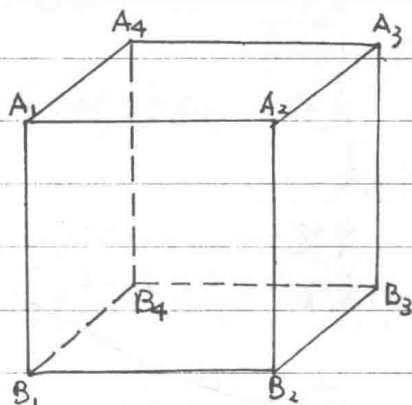
$$\{A_3B_3, B_4B_1, A_1A_2\}$$

$$\{A_4B_4, B_1B_2, A_2A_3\}$$

当甲第1次涂红3条棱之后, 这3条红棱

属于上述4个互不相交的集合, 由抽屉原理

知, 上述4个集合中必有一个集合中的3条棱均未涂红, 于是乙只要把这一组3条棱涂绿, 则正方体的6个面上恰如各有1条绿边. 甲当然无法获胜了. 可见, 甲没有必胜策略.



评论 奇思妙想——由抽屉原理
从好的组合入手构造抽屉

② 设 $S = \{1, 2, \dots, 1989\}$, 从 S 中取出 k 个数, 使得其中任何两数之差都不等于 4 和 7, 求 k 的最大可能值.

(1989 年美国数学邀请赛)

解 首先来考察, 从集合

从简单又有代表性的局部入手

$$T = \{1, 2, \dots, 11\}$$

中最多可以选出几个数, 使得任何两数之差都不等于 4 和 7. 由于

$$\{1, 3, 4, 6, 9\} \text{ 和 } \{1, 4, 6, 7, 9\}$$

每组由 5 个数中任意两数之差都不等于 4 和 7, 故知 T 中至少可以选出 5 个数满足要求.

考虑 T 中的所有“坏对”:

从坏对入手构造抽屉

$$\{1, 5\} \quad \{5, 9\} \quad \{1, 8\}$$

差的平移不变性

$$\{2, 6\} \quad \{6, 10\} \quad \{2, 9\}$$

周期性

$$\{3, 7\} \quad \{7, 11\} \quad \{3, 10\}$$

$$\{4, 8\} \quad \{4, 11\}$$

易见, T 中每个数都恰在两个坏对中出现. 如果从 T 中取出 6 个数, 则由于每个数都出现两次, 故 6 个数将在 11 个坏对中出现 12 次, 由抽屉原理知必有两个数出现在同一个坏对中, 当然组成一个坏对. 故知 T 中最多可以取出 5 个数, 满足任何两数之差都不等于 4 和 7 的要求.

此外注意

$$\{1, 3, 4, 6, 9\} \quad \{12, 14, 15, 17, 20\}$$

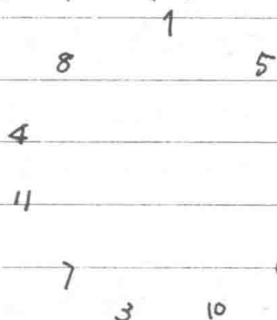
在接缝之处也没有任何两数之差为 4 或 7, 所以每连续 11 个数中都可以取出 5 个数. 连续若干组的各 5 个数放在一起也没有问题. 由于

$$1989 = 11 \times 180 + 9,$$

而开头的例子表明最后9个数中也可以选出5个数满足要求, 所以要求的最大值应为 $5 \times 181 = 905$.

注 前段证明中“坏时”的例子也可以变为将T中11个数写在一个圆周上, 使每相邻两数都是一个“坏时”:

如果从这11个数中选取6个数, 则必有
两个在圆周上相邻, 当然构成一个“坏时”,
从而也表明T中至多可以选出5个数满足
题中要求.



第5页中3-(ii)题中的“88”是最优的. 即当改为87时, 结论就不再成立.
反例如下:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ..., 199,

$2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2$

$2^3, 3^3, 5^3$

$2^4, 3^4, 5 \times 7$

$2^5, 3 \times 11, 5 \times 11, 7 \times 11$

$2^6, 3 \times 13, 5 \times 13, 7 \times 13, 11 \times 13$

$2^7, 3 \times 17, 5 \times 17, 7 \times 17, 11 \times 17$

$2 \times 19, 3 \times 19, 5 \times 19, 7 \times 19$

$2 \times 23, 3 \times 23, 5 \times 23, 7 \times 23$

$2 \times 29, 3 \times 29, 5 \times 29$

$2 \times 31, 3 \times 31, 5 \times 31$

注意, 表中共87个数, 但每个质
因子至多出现在11个数中, 所以其中
任意12个数都互质.
表中第1行共47个数, 其中46
个质数.

* 3 设 $S = \{1, 2, \dots, 200\}$,

(i) 从 S 中任取 96 个数, 则其中必有 15 个数两两互质;

(ii) 从 S 中任取 88 个数, 则其中必有 12 个数两两互质.

证 (i) 令

$$M_1 = \{2k \mid k = 1, 2, \dots, 100\},$$

$$M_2 = \{6k-3 \mid k = 1, 2, \dots, 33\}.$$

由于 $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, 所以 $|M_1 \cup M_2| = 133$, $|S - (M_1 \cup M_2)| = 67$. 所以, 在取定的 96 个数中, 至少有 29 个数属于 $M_1 \cup M_2$. 由抽屉原理知这 29 个数中必有 15 个同属于 M_1 或同属于 M_2 , 当然两两互质.

(ii) 令

$$M_1 = \{2k \mid k = 1, 2, \dots, 100\},$$

$$M_2 = \{6k-3 \mid k = 1, 2, \dots, 33\},$$

$$M_3 = \{5, 25, 35, 55, 65, 85, 95, 115, 125, 145, 155, 175, 185\},$$

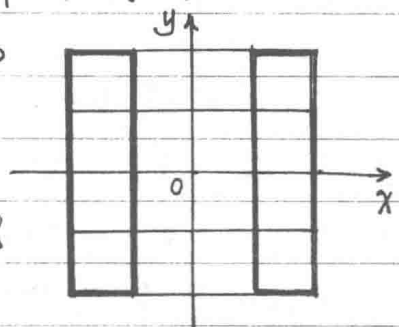
由于 M_1, M_2, M_3 互不相交, 所以 $|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = 146$. 所以, 在任取的 88 个数中, 至少有 34 个数属于 $M_1 \cup M_2 \cup M_3$. 由抽屉原理知, 这 34 个数中总有 12 个数属于同一个 M_i ($1 \leq i \leq 3$), 当然两两互质.

从好的组合入手构造抽屉

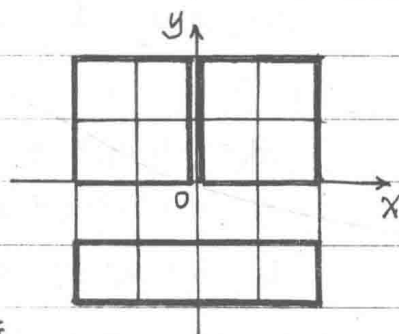
注 对于此题, 还可以进一步地问: (i) 与 (ii) 题中的结果是否是最优结果? 如果是最好的, 请给出证明, 如果不是最好的, 请找出最优结果并给出证明.

④ 设 4×4 方格纸上每个方格面积为 1, 从它的 25 个结点中任取 6 点, 其中任何 3 点都不共线. 求证: 所取的 6 点中必存在 3 点, 使得以它们为顶点的三角形的面积不大于 2. (1992 年全国联赛二试 3 题)

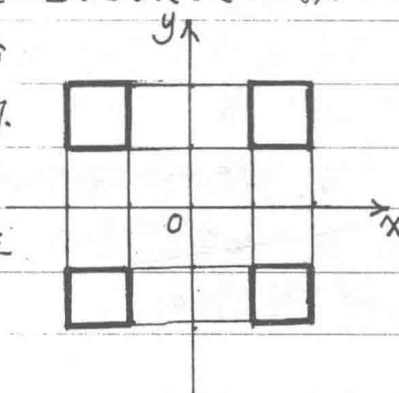
证 1 取以方格纸中心为原点, 以过中心的十字线为两条坐标轴的直角坐标系. 设已经选中 6 个结点.



(1) 若 y 轴 (或 x 轴) 上没有选定点, 则所选 6 点全在右图所示的左右两个 4×1 矩形的各 10 个结点中. 由抽屉原理知, 总有 3 个选定点在一个矩形中, 以它们为顶点的三角形的面积当然不大于 2. 从好的组合入手构造抽屉



(2) 设正半 y 轴 (包括原点) 上至少有一个选定点. 这时, 在 4×4 方格纸上画出 3 个矩形如右图所示, 每个矩形中的 4 个结点再作为一个集合. 于是 3 个集合包含了 4×4 方格纸的全部结点. 6 个选定点当然分属于这 3 个集合且上半 y 轴上的选定点属于两个集合, 所以 3 个集合中至少有一个集合中至少有 3 个选定点. 由抽屉原理知必有一个集合中至少有 3 个选定点, 相应的三角形当然满足要求.



综上所述, 总有 3 个选定点, 以它们为顶点的三角形的面积不大于 2.

证 2 因为两条坐标轴上至多各有两个选定点, 所以右上图中的 4 个小区



方形分别包含的16个结点中,至少会有两个选定点。

不妨设左图中左上角正方形中至少含1个选定点。取

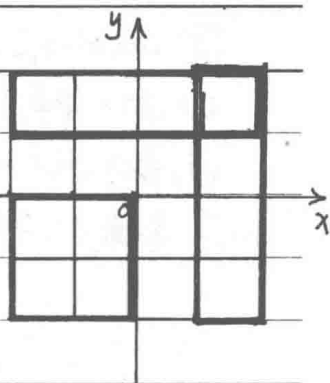
3个结点集合分别为:上两行的10个结点,右两列的10

个结点和左下角的 2×2 正方形上的9个结点。于是这3个

集合中至少会有7个选定点,由抽屉原理知必有一

个集合中有3个选定点,以它们为顶点的三角形的面

积当然不大于2。



证3 将 4×4 方格表中上两行、下两行、左两列

和右两列的各10个结点各作为一个抽屉,共4个。将左

上、右上、左下、右下的 2×2 正方形上的各9个结点也各作

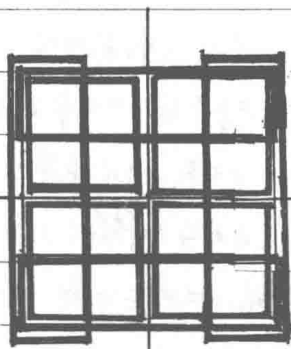
一个抽屉。加上前4个,共8个抽屉。

注意, 4×4 方格表中的每个结点至少属于3个不

同抽屉,所以8个抽屉中至少共有18个选定点。由抽

屉原理知,必有一个抽屉中至少有3个选定点,于是以

其中3个选定点为顶点的三角形的面积不大于2。



评注:这种巧妙应用重复元素的抽屉原理的方法属于“奇思妙想”。

*⑤ 10人到书店去买书, 已知

(i) 每个人都买了三种书;

(ii) 每两人所买的书中, 都至少有一种相同.

问购买人数最多的一种书, 最少有几人购买? 说明理由.

(1993年中国数学奥林匹克题5题)

解1 设10人是A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. A买的3种书是1, 2, 3, 于是另9人每人都至少买1, 2, 3这3种书之一, 于是由抽屉原理知下列两案之一成立:

(1) 1, 2, 3这3种书, 每种书都恰有4人买 (包括A在内);

(2) 3种书中有一种书至少有5人买.

平均状态的抽屉原理

显然, 对于另外9人中的每个人, 情况都是如此. **反设分析**

如果10个人都是第1种情况, 则每种书都恰有4人买. 从而10人买书的种数为4的倍数. 但已知10人共买书的种数是30而30不是4的倍数矛盾. 这表明10人中至少有一人属于第2种情形. 所以购买人数最多的一种书至少有5人买.

下面来构造每种书至多有5人买的满足题中要求的例子, 这可以按字典排列出来写出:

$\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}$

$\{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}.$

容易验证, 这种情况下, 每种书至多有5人买且每两人所买的各3种书中, 至少有一种相同.

解2 考虑如下例子: 6元子集 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 共有20个三元子集,

恰可分成10对:

$$\begin{array}{ll} \{1, 2, 3\} \{4, 5, 6\} & \{1, 3, 5\} \{2, 4, 6\} \\ \{1, 2, 4\} \{3, 5, 6\} & \{1, 3, 6\} \{2, 4, 5\} \\ \{1, 2, 5\} \{3, 4, 6\} & \{1, 4, 5\} \{2, 3, 6\} \\ \{1, 2, 6\} \{3, 4, 5\} & \{1, 4, 6\} \{2, 3, 5\} \\ \{1, 3, 4\} \{2, 5, 6\} & \{1, 5, 6\} \{2, 3, 4\} \end{array}$$

每对两个三元素子集互补, 当然互不相交; 但不同对中的两个三元素子集至少有1个公共元素. 所以10人买书时对应的10个三元素子集恰应为每对选取1个且每个元素出现次数最多的尽量少. 例如可取为:

$$\begin{array}{l} \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 5, 6\} \\ \{3, 4, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 5, 6\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 3, 6\} \end{array}$$

其中每个元素恰属于5个三元素子集, 故知所求的最大值的最小值不大于5.

另一方面, 若有一种买书情况使购买人数最多的一种书只有4人买, 则每种书都至多有4人买. 10人共买30种书, 其中至少有8种不同的书. 由抽屉原理知其中必有一种书, 至多有3人买. 不妨设第1种书有3人A, B, C买且A买3种书为1, 2, 3. 于是后7人中每个人都买2, 3两种书之一. 由抽屉原理知两种书中必有一种至少4人买. 加上A共有5人买了这种书, 矛盾.

综上所述, 所求的最小值为5.

注 本题需要的例子还有

$$\begin{array}{l} \text{轮换排列法, } \{1, 2, 4\} \{2, 3, 5\} \{3, 4, 6\} \{4, 5, 7\} \{5, 6, 1\} \\ \{6, 7, 2\} \{7, 1, 3\} \{1, 2, 4\} \{2, 3, 5\} \{3, 4, 6\} \end{array}$$

分组成题设: $\{1, 2, 5\} \{3, 4, 5\} \{1, 3, 6\} \{2, 4, 6\} \{1, 4, 7\}$
 $\{2, 3, 7\} \{5, 6, 7\} \{1, 2, 5\} \{3, 4, 5\} \{1, 4, 7\};$

以及借助正五边形给出的例子:

$\{1, 2, 3\} \{1, 3, 4\} \{1, 4, 5\} \{1, 5, 6\} \{1, 6, 2\}$

$\{2, 4, 5\} \{3, 5, 6\} \{4, 6, 2\} \{5, 2, 3\} \{6, 3, 4\}.$

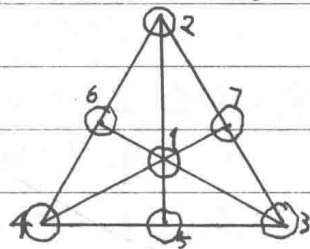
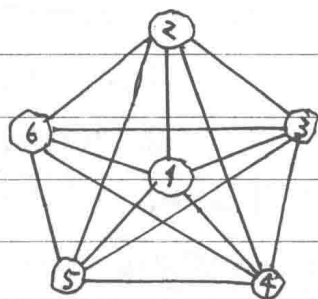
还有借助正三角形给出的例子:

$\{4, 5, 3\} \{3, 7, 2\} \{2, 6, 4\}$

$\{2, 1, 5\} \{3, 1, 6\} \{4, 1, 7\}$

$\{5, 6, 7\} \{4, 5, 3\} \{3, 7, 2\} \{5, 6, 7\}.$

容易验证, 这里举出的4个例子都满足
 题中的条件且购买人数最多的一种书有5人购买.



⑥ 一次考试中共有4道选择题，每题都有3个选项。一组学生参加考试，每人每题恰选一个选项。考完之后发现，对于任何3人，都有一道试题使3人的答案互不相同。问最多有多少名学生参加了考试？说明理由。

(1988年IMO候选题)

解 当只有1道试题时，若有4人参加考试，则4人选择3个不同选项，由抽屉原理必有一人选取同一选项。再加之人时，共3人至多能选两个不同选项，不满足题中要求。可见，这时至多可以有3人参加考试，4人就不能满足题中要求。

当有两道试题时，有5人参加考试就不行。实际上，先考察第2题的结果。这时，5人选取3个不同选项，由抽屉原理知必有1个选项至多1人选用。去掉这个选项之后，剩下至少4人在第2题上至多两个不同选项，于是4人中任何3人都不能指望使第2题的答案互不相同，所以全得指望第1题，而上段已经证明了一道题时4人不行。

从简单入手

当有3道试题时，若有7人参加考试就不行。实际上，这时可先考试第3题。由抽屉原理知3个选项中共有一个选项至多两人选用。去掉这两人，剩下5人在第3题的答案至多两个。当然无法使某3人答案互不相同。所以这5人全得指望在前两题中满足题中要求。由上段证明知这是不可能的。

当有4道试题时，若有10人参加考试，则由抽屉原理知第4题的3个选项中总有一个选项至多3人选用，于是又导致剩下至少7人要使任何3人都有一题答案互不相同，都得指望前三题。用上段结果知这是不可能的。所以至多有9人参加考试。

下面用字典排列法来给出9个人参加考试的答案可以满足题中要求的例子。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
一	1	1	1	2	2	2	3	3	3
二	1	2	3	1	2	3	1	2	3
三	1	2	3	2	3	1	3	1	2
四	1	2	3	3	1	2	2	3	1

对于表中任何3人,其中任何两人都只有1题答案相同,3人共能组成3个两人时,至多在3个题上有两人答案相同,于是余下的题目就使3人的答案互不相同。

综上所述,最多有9人参加考试。

评注 上述的字典排列构造法是对“任何3人,都存在一道试题使3人的答案互不相同”的加强要求“任何两人,都恰有一题答案相同”为指导原则的字典排列法。

对于表中9人中的任何3人 A_1, A_2, A_3 ,可以组成3个两人时: $\{A_1, A_2\}, \{A_2, A_3\}$ 和 $\{A_3, A_1\}$.由构造原则可知,对于这里3对中的每一对,都只有某一题答案相同,从而对3人组成的组,至多有3个题目的答案各有两人相同.这样,由于共有4道试题,所以必有第4个题目使3人的答案满足互不相同,即可推得题中的要求。

这样加强之后,使得构造过程有了明确的指导思想,从而避免了题中原要求不好用的困难及只用眼睛硬性观察不易全面彻底之缺点。

2014.3.19

此外,解此题时还可以从构造9人满足要求的例子入手,然后即可用抽屉原理证明10人不能满足题中要求。

7. 一位棋手参加为期3周的集训, 每天至少下一盘棋, 每周至多下12盘棋, 求证这位棋手必在连续的若干天中恰如下了21盘棋.

证 用 a_k 来记前 k 天所下棋的盘数, 于是有

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{20} < a_{21} \leq 36.$$

将 $\{1, 2, \cdots, 36\}$ 分成下列21组:

同余构造抽屉

$$\{1, 22\}, \{2, 23\}, \{3, 24\}, \{4, 25\}, \cdots, \{15, 36\},$$

$$\{16\}, \{17\}, \{18\}, \{19\}, \{20\}, \{21\}.$$

由抽屉原理知必有下列两条结论之一成立:

(i) 上列21个集合中各含1个 a_i ;

(ii) 存在 i, j ($1 \leq i < j \leq 21$), 使得 a_i 和 a_j 属于上述21个集合中的同一个.

若为前者, 则有 $a_k = 21$, 这表明前 k 天共下了21盘棋. 若为(ii), 则有 $1 \leq a_i < a_j \leq 36$,

使得 $a_j - a_i = 21$, 这表明从第 $i+1$ 天到第 j 天的连续 $j-i$ 天中, 共下了21盘棋.

可见, 无论哪种情况, 都必有连续若干天中恰如下了21盘棋.